Divulgaciones Matemáticas v. 6, No. 1 (1998), 21–29

Algunas Notas sobre el Módulo de Convexidad

Some Notes about the Convexity Module

Diomedes Bárcenas (barcenas@ciens.ula.ve)
L. Sánchez (lsanchez@ciens.ula.ve)
Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias.
Universidad de los Andes. Mérida. Venezuela.

Resumen

En este trabajo se hace una revisión del concepto de módulo de convexidad δ de un espacio de Banach E introducido por Day [4]. Se prueba que: (i) E es uniformemente convexo si y sólo si E es estrictamente convexo y δ es continua en 2; (ii) si E tiene dimensión finita entonces E es uniformemente no-cuadrado si y sólo si $\delta(2) > 0$; (iii) E es super-reflexivo si y sólo si admite una norma equivalente con la cual δ es continua y no idénticamente nula.
Palabras y frases clave: módulo de convexidad, espacio de Banach, convexidad uniforme, convexidad estricta, super-reflexividad, espacio no-cuadrado.

Abstract

In this paper we review the concept of convexity modulus δ of a Banach space E introduced by Day [4]. It is proved that: (i) E is uniformly convex if and only if E is strictly convex and δ is continuous at 2; (ii) if E has finite dimension then E is uniformly non-square if and only if $\delta(2) > 0$; (iii) E is super-reflexive if and only if it admits an equivalent norm for which δ is continuous and not identically null.
Key words and phrases: convexity modulus, Banach space, uniform convexity, strict convexity, super-reflexivity, non-square space.

1 Introducción

Ante el problema de hallar una clase concreta de espacios de Banach para los cuales toda función absolutamente continua f con dominio [0,1] fuese derivable casi siempre Clarkson [2], en 1936, introdujo los espacios uniformemente convexos y demostró exitosamente que tales espacios eran parte de la clase buscada (hoy sabemos que la clase de espacios donde el problema tiene una solución afirmativa coincide con los espacios que tienen la propiedad de Radon-Nykodim [13]).

Clarkson introdujo también los espacios estrictamente convexos, una clase de espacios un poco más amplia que la de los uniformemente convexos, y demostró que en esos espacios no siempre el problema tiene una solución positiva, es decir, Clarkson demostró que existen espacios estrictamente convexos, digamos E, y funciones continuas $f : [0,1] \to E$, con f no diferenciable casi siempre. Para ello demostró que $C[0,1]$ es uniformemente convexo y luego invocó un resultado de Banach [1] que afirma que todo espacio separable es isomorfo a un subespacio de $C[0,1]$, para concluir que todo espacio de Banach separable admite una norma equivalente bajo la cual es estrictamente convexo.

Este resultado también puede ser demostrado usando, en lugar del mencionado teorema de Banach, el teorema de Bourbaki-Alaoglu, una herramienta no disponible para la época en que fue concebido este resultado de Clarkson. Para ello, imitando las ideas de la demostración original, se demuestra que si K es un espacio métrico compacto entonces $(C(K), \|\cdot\|)_\infty$ es estrictamente convexo y luego observamos que si E es un espacio de Banach separable y K denota la bola unitaria de E^* con la topología débil*, entonces K es compacto y metrizable y E es isomorfo a un subespacio cerrado de $C(K)$.

Las ideas de Clarkson dieron origen a una línea de investigación en la Geometría de espacios de Banach, que aún 60 años después de la publicación del artículo original sigue siendo prolífera. Una pieza clave para esta proliferación ha sido sin duda el concepto de módulo de convexidad introducido por Day [4] y del cual nos ocuparemos en la próxima sección.

En este trabajo S_E denota la esfera unitaria, B_E la bola unitaria cerrada y E^* el dual de un espacio de Banach E.

2 Módulo de convexidad.

El módulo de convexidad constituye la razón de ser de estas notas; se introdujo con el objeto de hacer más manejables las definiciones de uniforme y estricta convexidad. Específicamente:

Definición 2.1. *Diremos que un espacio de Banach E es* uniformemente convexo *si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$x, y \in B_E, \quad \| x - y \| \geq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \| x + y \| \leq 2(1 - \delta)$$

Definición 2.2. *Un espacio normado E se dice que es* estrictamente convexo *si verifica cualquiera de las dos condiciones equivalentes:*

i) si $x, y \in E$ y $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$ con $y \neq 0$, entonces existe $t \geq 0$ tal que $x = ty$.

ii) si $x, y \in S_E$ y $x \neq y$, entonces $\| x + y \| < 2$.

En cuanto al módulo de convexidad tenemos:

Definición 2.3. *La función $\delta : [0, 2] \to [0, 1]$ definida mediante*

$$\delta(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{\| x + y \|}{2} \;:\; x, y \in S_E, \; \| x - y \| = \epsilon \right\}$$

se llama módulo de convexidad *del espacio normado Ey con ello se tiene que E es estrictamente convexo si y sólo si $\delta(2) = 1$.*

Las siguientes propiedades del módulo de convexidad fueron observadas por Day [4], encontrándose en [3] otra demostración de estos hechos:

$$\delta(\epsilon) = \delta_2(\epsilon) = \delta_3(\epsilon) = \delta_4(\epsilon) = \delta_5(\epsilon) = \delta_6(\epsilon);$$

donde

$$\begin{aligned}
\delta_2(\epsilon) &= \inf \left\{ 1 - \frac{\| x + y \|}{2} \;:\; x, y \in S_E, \; \| x - y \| \geq \epsilon \right\} \\
\delta_3(\epsilon) &= \inf \left\{ 1 - \frac{\| x + y \|}{2} \;:\; x \in S_E, \; y \in B_E, \; \| x - y \| = \epsilon \right\} \\
\delta_4(\epsilon) &= \inf \left\{ 1 - \frac{\| x + y \|}{2} \;:\; x \in S_E, \; y \in B_E, \; \| x - y \| \geq \epsilon \right\} \\
\delta_5(\epsilon) &= \inf \left\{ 1 - \frac{\| x + y \|}{2} \;:\; x, y \in B_E, \; \| x - y \| = \epsilon \right\} \\
\delta_6(\epsilon) &= \inf \left\{ 1 - \frac{\| x + y \|}{2} \;:\; x, y \in B_E, \; \| x - y \| \geq \epsilon \right\}.
\end{aligned}$$

Otra demostración se expone de inmediato:
Del lema VIII.4 de [5], se tiene que $\delta = \delta_3 = \delta_5$; mientras que la igualdad $\delta = \delta_5$ junto con la monotonía creciente de δ implican que $\delta_5 = \delta_6$. Para concluir la demostración observamos que $\delta \geq \delta_2 \geq \delta_4 \geq \delta_6$.

La continuidad del módulo de convexidad en [0,2) no fue demostrada sino hasta 1977, cuando Gurarii [9] estableció la desigualdad

$$\delta(\epsilon_2) - \delta(\epsilon_1) \leq \frac{2\sqrt{5}+1}{2} \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2 - \epsilon_1} \right)$$

siempre que $0 \leq \epsilon_1 < \epsilon_2 \leq 2$.

Otro intento de demostración fue hecho por Goebel [8], quien probó que el módulo de convexidad se puede expresar como un ínfimo de funciones convexas. Específicamente procedió como sigue: para $u, v \in B_E$ definió:

$$\delta(u, v, \epsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{\| x + y \|}{2} \ : \ (x, y) \in N(u, v), \ \| x - y \| \geq \epsilon \right\}$$

y demostró que cada función $\delta(u, v, \cdot)$ es convexa y que el módulo de convexidad δ satisface la ecuación:

$$\delta(\epsilon) = \inf\{\delta(u, v, \epsilon) : \ u, v \in B_E\}$$

para de aquí concluir la continuidad de δ basada en el supuesto de que el ínfimo de una colección de funciones convexas es una función convexa.

Estas ideas allanaron el camino para que Ullán [12] diera una demostración de la continuidad de δ en [0,2) plena de elegancia y sencillez mejorando sustancialmente la acotación obtenida por Gurarii al demostrar que para $0 \leq \epsilon_1 < \epsilon_2 \leq 2$:

$$\delta(\epsilon_2) - \delta(\epsilon_1) \leq \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2 - \epsilon_1} \right)$$

En el mismo trabajo que estamos comentando Goebel introduce el concepto de *característica de convexidad* de un espacio de Banach E como el número real

$$\epsilon_0 = \sup\{\epsilon : \delta(\epsilon) = 0\}.$$

Con esta definición se tiene que un espacio es uniformemente convexo si y sólo si $\epsilon_0 = 0$, y además facilita la siguiente definición:

Definición 2.4. *Un espacio de Banach es* uniformemente no-cuadrado *si y sólo si* $\epsilon_0 < 2$.

La definición de uniforme no-cuadratura es expresada en estos términos por pura conveniencia, ya que el concepto ha sido objeto de estudio detallado entre otros por James [10] y Enflo [6], produciéndose el siguiente teorema cuyo enunciado adaptamos a nuestra conveniencia, al igual que lo hacemos con la siguiente definición:

Definición 2.5. *Un espacio de Banach es* super-reflexivo *si y sólo si admite una norma equivalente con la cual es uniformemente no-cuadrado.*

Teorema 2.6 (James-Enflo). *Un espacio de Banach es super-reflexivo si y sólo si admite una norma equivalente uniformemente convexa.*

El teorema de James-Enflo permite refinar un poco la conclusión de Ullán:

Teorema 2.7. *Todo espacio de Banach admite una norma equivalente bajo la cual para* $0 \le \epsilon_1 < \epsilon_2 \le 2$*:*

$$\delta(\epsilon_2) - \delta(\epsilon_1) \le \delta(2) \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2 - \epsilon_1} \right),$$

siendo $\delta(2)$ *la mejor constante posible.*

Demostración: Sea E nuestro espacio de Banach. Si E es estrictamente convexo, entonces $\delta(2) = 1$ y la conclusión degenera en el resultado de Ullán. Si E admite una norma equivalente uniformemente no-cuadrada, entonces E admite una norma bajo la cual es uniformemente convexo y por lo tanto estrictamente convexo.

Si E no admite norma equivalente con la cual sea uniformemente no-cuadrado, entonces para cualquier norma equivalente a la norma original de E se tiene que $\epsilon_0 = 2$ y por lo tanto si $0 \le \epsilon_1 < \epsilon_2 < 2$,

$$\delta(\epsilon_2) - \delta(\epsilon_1) = 0 \le \delta(2) \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2 - \epsilon_1} \right).$$

Que $\delta(2)$ es la mejor constante posible se sigue del hecho de que independientemente del espacio de Banach en consideración,

$$\delta(2) - \delta(0) = \delta(2) \left(\frac{2 - 0}{2 - 0} \right).$$

$\square$

Las ideas de Goebel nos permiten también una demostración simplificada de un teorema de Figiel [7]. Otra simplificación puede verse en Lindenstrauss-Tzafriri [11]. La importancia de este resultado se pone de relieve en [12] y lo que resta de este trabajo.

Teorema 2.8 (Figiel). *$\delta(\epsilon)/\epsilon$ es monótona creciente para $0 < \epsilon \leq 2$.*

Demostración: Sean $u, v \in E$; $\| u \|, \| v \| < 1$ y $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 \leq 2$. Como $\delta(u, v, \cdot)$ es convexa, $\delta(u, v, 0) = 0$ y

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2} 0 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \epsilon_2$$

se tiene que:

$$\delta(u, v, \epsilon_1) \leq \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \delta(u, v, \epsilon_2).$$

y de aquí se sigue el resultado. □

Como consecuencia inmediata del teorema de Figiel se obtiene que para $\epsilon \in [0, 2]$ se cumple $\delta(\epsilon) \leq \epsilon/2$. Más aún,

Proposición 2.9. *i) si $0 \leq \epsilon < 2$ entonces $\delta(\epsilon) \leq \epsilon(2 - \epsilon_0)/4$.*

ii) $\delta(2) \geq (2 - \epsilon_0)/2$, alcanzándose la igualdad si y sólo si δ es continua en $\epsilon = 2$.

La demostración usa el siguiente resultado de Ullán ([12, página 26]).

Teorema 2.10.

$$\lim_{\epsilon \to 2^-} \delta(\epsilon) = 1 - \frac{\epsilon_0}{2}$$

Demostración de 2.9: i) si $\epsilon = 0$ la conclusión es inmediata. Si ϵ_0 y $\epsilon' \in (\epsilon, 2]$ por el teorema de Figiel se tiene que

$$\frac{\delta(\epsilon)}{\epsilon} \leq \frac{\delta(\epsilon')}{\epsilon'}$$

y por el teorema anterior se concluye que

$$\frac{\delta(\epsilon)}{\epsilon} \leq \frac{1 - \frac{\epsilon_0}{2}}{2} = \frac{2 - \epsilon_0}{4}.$$

ii) Es consecuencia del teorema anterior, la continuidad de δ en [0,2) y el crecimiento de δ en [0,2).

$\square$

Proposición 2.11 ([12]). *La igualdad en $\delta(\epsilon) \leq \epsilon/2$ es posible sólo si $\epsilon = 0$ o $\epsilon = 2$. Esto último ocurre sólo si el espacio es uniformemente convexo.*

Demostración: Supongamos $\epsilon_0 > 0$. Si $0 < \epsilon < \epsilon_0$ entonces $\delta(\epsilon)/\epsilon = 0$ y por lo tanto la igualdad es imposible. Si $\epsilon_0 \leq \epsilon < 2$, entonces

$$\frac{\delta(\epsilon)}{\epsilon} \leq \lim_{\eta \to 2^-} \frac{\delta(\eta)}{\eta} \leq \frac{2 - \epsilon_0}{4} < \frac{1}{2}.$$

Por su parte si $\epsilon_0 = 0$ entonces E es estrictamente convexo.

Supongamos que exista $\epsilon > 0$ tal que $\delta(\epsilon) = \epsilon/2$. Entonces por la definición de $\delta(\epsilon)$ se tiene que

$$\frac{1}{2} \parallel x - y \parallel \leq 1 - \frac{\parallel x + y \parallel}{2}$$

cualesquiera que sean $x, y \in S_E$ con $\parallel x - y \parallel = \epsilon$. O equivalentemente,

$$\parallel x + y \parallel + \parallel x - y \parallel = \parallel (x - y) + (x + y) \parallel .$$

Como E es estrictamente convexo y $x - y \neq 0$, existe $\lambda \geq 0$ tal que

$$x + y = \lambda(x - y) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\lambda - 1}{1 + \lambda} x$$

$$\Rightarrow \quad |\lambda - 1| = |1 + \lambda| \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -y$$

y por lo tanto $\epsilon = 2$. $\square$

La demostración de la proposición 2.13 usa el siguiente resultado de Ullán [12]:

Proposición 2.12. *Si E es uniformemente convexo o de dimensión finita entonces $\delta(\epsilon)$ es continua en $\epsilon = 2$.*

Proposición 2.13. *i) E es uniformemente convexo si y sólo si E es estrictamente convexo y δ es continua en 2.*

ii) Sea E de dimensión finita. Entonces E es uniformemente no-cuadrado si y sólo si $\delta(2) > 0$.

iii) E es super-reflexivo si y sólo si admite una norma equivalente con la cual δ es continua y no idénticamente nula.

Demostración: i) En virtud de la proposición anterior basta probar la suficiencia. Por el Teorema 2.10 tenemos que si δ es continua entonces $\delta(2) = 1-\epsilon_0/2$. Como E es estrictamente convexo se tiene que $\delta(2) = 1$ y en consecuencia $\epsilon_0 = 0$. Es decir que E es uniformemente convexo.

ii) Si E es uniformemente no-cuadrado, $\epsilon_0 < 2$ y así $\delta(2) > 0$. Para la suficiencia, si E es de dimensión finita por la proposición anterior δ es continua en 2. Y como $0 < \delta(2) = 1 - \epsilon_0/2$ se concluye que $\epsilon_0 < 2$.

iii) Si E es super-reflexivo, el teorema de James-Enflo implica la necesidad. Si δ es continua en 2 y no idénticamente nula entonces, por el no decrecimiento de δ se tiene que

$$0 < \delta(2) = 1 - \frac{\epsilon_0}{2},$$

lo cual implica que con esta norma E es uniformemente no-cuadrado y por tanto super-reflexivo.

□

Nota 2.14. Como consecuencia de la proposición anterior se puede obtener una prueba diferente de un hecho bien conocido: en espacios de dimensión finita la convexidad estricta y la uniforme coinciden.

Referencias

[1] Banach, S. *Théorie des Opérations Linéaires*, Varsovia, 1932.

[2] Clarkson, J. A. *Uniformly Convex Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **40** (1936), 396–414.

[3] Daneš, J. *On Local and Global Moduli of Convexity*, Comm. Math. Univ. Carolinæ, **17** No. 3 (1976), 413–420.

[4] Day, M. M. *Uniformly Convexity in Factor and Conjugate Spaces*, Annals of Math., **45** (1944), 375–385.

[5] Dielstel, J. *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - Tokio, 1984.

[6] Enflo, P. *Banach Spaces which Can Be Given an Equivalent Uniformly Convex Norm*, Israel J. Math. **13** (1972), 281–288.

[7] Figiel, T. *On Moduli of Convexity and Smoothness*, Studia Math. **56** (1976), 121–155.

[8] Goebel, K. *Convexity of Balls and Fixed-Point Theorems for Mappings with non-Expansive Square*, Compositio Math. **22** Fasc. 3 (1970), 269–274.

[9] Gurarii, V. I. *On Differential Properties of the Convexity Moduli of Banach Spaces*, Math. Issled. **2** (1967), 141–148.

[10] James, R. C. *Uniformly non-Square Banach Spaces*, Ann. of Math. **80** (1964), 542–550.

[11] Lindenstrauss, J., Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces II*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1979.

[12] Ullán, A. *Módulos de Convexidad y Lisura en Espacios Normados*, Tesis Doctoral, Universidad de Extremadura, Badajoz, 1991.

[13] Van Dulst, D. *Reflexive and Superreflexive Banach Spaces*, Math. Centre Trac., **102**, 1978.