Divulgaciones Matemáticas v. 5, No. 1/2 (1997), 77–78

Problemas y Soluciones

Problems and solutions

Editor: José Heber Nieto
Departamento de Matemática y Computación
Facultad Experimental de Ciencias. Universidad del Zulia
Apartado Postal 526. Maracaibo 4001. Venezuela.
(E-mail: jhnieto@@luz.ve)

Las soluciones y los problemas propuestos, incluyendo sus soluciones (si se conocen), deben dirigirse al editor, en español o inglés, por correo electrónico o bien mecanografiadas, a la dirección dada más arriba.

Solutions and proposed problems (including their solutions, if known) should be sent to the editor, in Spanish or English, by e-mail or typewritten, to the address given above.

1 Problemas propuestos

11. Sea P un polinomio con coeficientes enteros de grado $n > 12$. Si el máximo común divisor de los coeficientes de P es 1 y en más de $n/2$ enteros el valor tomado por P es 1 o -1, pruebe que P es irreducible.

    Let P be a polynomial with integer coefficients and degree $n > 12$. If the greatest common divisor of the coefficients of P is 1 and for more than $n/2$ integers P takes the value 1 or -1, then prove that P is irreducible.

2 Soluciones

1. *Propuesto en el v. 1, No. 1 (1993), p. 106.*

   Sea z_n una sucesión de números complejos no nulos tal que si $i \neq j$ entonces $|z_i - z_j| > 1$.

(a) Pruebe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/z_n^{\alpha}$ converge absolutamente para todo real $\alpha > 2$.

(b) Pruebe con un ejemplo que lo anterior no es cierto para $\alpha = 2$.

Solución (por el editor):
a) Es claro que el disco $|z| < 1/2$ contiene a lo sumo un término de la sucesión. Si contiene un término z_j pongamos $A = 1/|z_j|^2$; en caso contrario pongamos $A = 0$. Para cada entero positivo k consideremos los términos de la sucesión z_n contenidos en la corona $k - 1/2 \leq |z| < k + 1/2$, y sea c_k el número de tales términos. Como los discos con centro en estos términos y radio $1/2$ son disjuntos y están contenidos en la corona $k - 1 \leq |z| < k + 1$, comparando áreas resulta

$$c_k \frac{\pi}{4} \leq \pi((k+1)^2 - (k-1)^2)$$

es decir que $c_k \leq 16k$. Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\alpha}} \leq A + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16k}{(k - \frac{1}{2})^{\alpha}} \leq A + 16 \cdot 2^{\alpha} + 16 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^{\alpha}} < \infty$$

b) Dispongamos todos los números $x + iy$ con x e y enteros y no ambos nulos en una sucesión z_n. Cada cuadrado $|x| + |y| = k$ contiene $4k$ términos de dicha sucesión, todos ellos con módulo menor o igual que k. Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^2} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k}{k^2} \geq 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$