Divulgaciones Matemáticas 2(1) (1994), 83–88

Una Aplicación del Análisis Clásico

An Application of Classical Analysis

Atilio Morillo Piña

División de Posgrado. Facultad de Ingeniería
Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela

En el prólogo del conocido texto "Ordinary Differential Equations", por Coddington y Levinson [1], los autores hacen el siguiente comentario: " ... la Teoría de Ecuaciones Diferenciales es una fuente de aplicaciones sinceras del Análisis ... ". Precisamente es nuestro objetivo en este artículo desarrollar una aplicación del Análisis Clásico, tomada del campo de las Ecuaciones Diferenciales Parciales, que no sólo ilustra adecuadamente el citado comentario sino que nos parece particularmente instructiva del manejo de las técnicas del análisis. Al mismo tiempo puede ser útil como material intuitivo previo para la motivación de la formulación abstracta, por los métodos del Análisis Funcional, del problema involucrado.

Se trata de encontrar una fórmula para la solución del Problema de Cauchy para la ecuación de onda en dimensión 3, utilizando el método de las medias esféricas atribuido a Poisson.

Empezaremos suponiendo que la función $u(x_1, \dots, x_n, t)$ de clase C^2 en $-\infty < x_1, \dots, x_n, t < +\infty$ satisface la ecuación

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_nx_n} = c^{-2}u_{tt} \tag{1}$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_n, 0) &= f(x_1, \dots, x_n) \\ u_t(x_1, \dots, x_n, 0) &= g(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{2}$$

A continuación introducimos la función $I(r, t)$ como la integral de superficie de la función $u(x_1, \dots, x_n, t)$ sobre la esfera de radio r con centro en un punto fijado $(x_1, \dots, x_n)$ en un instante t, promediada por el área de dicha esfera. Esta función se denomina *media esférica* de la función $u(x_1, \dots, x_n, t)$.

De manera que, en fórmulas,

$$I(r,t) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} u(y_1, \ldots, y_n, t)\, dS \tag{3}$$

donde hemos usado la notación ω_n para el área de la esfera unitaria en dimensión n.

En este punto podemos recordar que

$$\omega_n = \int_{|y-x|=1} dw = \frac{2[\Gamma(1/2)]^n}{\Gamma(n/2)} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \tag{4}$$

y que el área de la esfera de radio r es $\omega_n r^{n-1}$.

La definición de $I(r,t)$ nos conduce a valores iniciales para esta función. Más precisamente,

$$\begin{aligned} I(r,0) &= (\text{media esférica de } f) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} f\, dS = F(r) \\ I_t(r,0) &= (\text{media esférica de } g) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} g\, dS = G(r) \end{aligned} \tag{5}$$

Ahora denotemos por $r\xi$ al vector de longitud r que va desde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ hasta $y = (y_1, \ldots, y_n)$, con $y = x + r\xi$. Si llamamos $d\omega$ al elemento de ángulo sólido generado en la esfera unitaria, se verifica la relación $dS = r^{n-1} d\omega$. Luego, (3) puede ser escrita

$$I(r,t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t)\, d\omega \tag{6}$$

Si explotamos en la relación (6) la independencia respecto de r de la región de integración, encontramos el límite $u(x,t) = \lim_{r\to 0} I(r,t)$. de donde surge la idea de buscar una ecuación en derivadas parciales para $I(r,t)$, para la cual sepamos cómo resolver el problema de valores iniciales y, a partir de esa solución, determinar $u(x,t)$ como función límite.

Basándonos en la independencia respecto de r de la región de integración EN (6), podemos derivar dentro del signo integral usando la regla de derivación de una composición de funciones, para obtener

$$I_r(r,t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i}(x + r\xi, t)\xi_i\, d\omega \tag{7}$$

$$= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} \xi_i\, dS \tag{8}$$

donde ξ_i es la i-ésima componente del vector unitario ξ.

Según el Teorema de la Divergencia de Gauss, si Ω es una región con suficientes condiciones de regularidad en $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ es la hipersuperficie cerrada orientada que acota a Ω, H es un campo vectorial de clase C^1 definido en Ω y n es el vector unitario normal saliente a $\partial\Omega$, entonces

$$\int_\Omega \mathrm{div} H \, dV = \int_{\partial\Omega} (H \cdot n) \, dS. \tag{9}$$

Las anteriores hipótesis son satisfechas por el campo $H = (u_{y_1}, \ldots, u_{y_n})$ en la región $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq r\}$. El vector normal a $\partial\Omega$ es el vector unitario ξ. Aplicando el citado teorema obtenemos

$$\begin{aligned} I_r &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} \sum_{i=1}^n u_{y_i} \xi_i \, dS \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|\leq r} \sum_{i=1}^n u_{y_i y_i} \, dy_1 \ldots dy_n. \end{aligned} \tag{10}$$

Y puesto que inicialmente habíamos asumido que la función u es una solución de la ecuación de onda, esto nos conduce a

$$I_r = \frac{c^{-2}}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|\leq r} u_{tt} \, dy_1 \ldots dy_n. \tag{11}$$

Esta expresión a su vez puede escribirse como

$$I_r = \frac{c^{-2}}{\omega_n r^{n-1}} \int_0^r \int_{|y-x|=\rho} u_{tt} \, dS \, d\rho. \tag{12}$$

Abandonando el caso general, la última relación puede justificarse para $n = 3$ del modo siguiente: si introducimos coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \rho \cos\phi \operatorname{sen}\psi \\ y_2 &= x_2 + \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\psi \\ y_3 &= x_3 + \rho \cos\psi \end{aligned}$$

en la esfera $|y - x| \leq r$, con $0 \leq \rho \leq r$, $0 \leq \phi < 2\pi$ y $0 \leq \psi < \pi$, se tendrá

$$\begin{aligned} \int_{|y-x|\leq r} u_{tt} \, dy = \int_0^r \bigg\{ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} & u_{tt}(x_1 + \rho\cos\phi \operatorname{sen}\psi, x_2 + \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\psi, \\ & x_3 + \rho\cos\psi) \rho^2 \operatorname{sen}\psi \, d\phi \, d\psi \bigg\} d\rho \end{aligned} \tag{13}$$

donde la expresión entre llaves es precisamente

$$\int_{|y-x|=\rho} u_{tt}(y,t)\, dS.$$

La fórmula (12) puede reescribirse como

$$r^{n-1} I_r = \frac{c^{-2}}{\omega_n} \int_0^r \int_{|y-x|=\rho} u_{tt}\, dS\, d\rho. \tag{14}$$

La derivación respecto de r nos conduce a

$$\begin{aligned}
(r^{n-1} I_r)_r &= \frac{c^{-2}}{\omega_n} \int_{|y-x|=r} u_{tt}\, dS \\
&= c^{-2} r^{n-1} \left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} u_{tt}\, dS \right) \\
&= c^{-2} r^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} u\, dS \right) \\
&= c^{-2} r^{n-1} I_{tt}
\end{aligned} \tag{15}$$

Es decir, $I(r,t)$ satisface la ecuación en derivadas parciales

$$(r^{n-1} I_r)_r = c^{-2} r^{n-1} I_{tt}, \quad \text{o bien} \quad I_{rr} + \frac{n-1}{r} I_r = c^{-2} I_{tt}. \tag{16}$$

La ecuación anterior, conocida como *ecuación de Darboux*, es difícil de resolver cuando n es un entero par. Cuando n es un entero impar, la ecuación puede reducirse a la ecuación de onda unidimensional. Por ejemplo, para $n = 3$,

$$I_{rr} + \frac{2}{r} I_r = c^{-2} I_{tt}, \quad \text{o bien} \quad (rI)_{rr} = c^{-2} (rI)_{tt}. \tag{17}$$

La última ecuación establece que la función $J = rI$ es solución de la ecuación de onda unidimensional. Esta función satisface, además, las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
J(r,0) &= rI(r,0) = rF(r) \\
J_t(r,0) &= rI_t(r,0) = rG(r)
\end{aligned} \tag{18}$$

En consecuencia podemos aplicar la fórmula de D'Alembert para la solución del problema de valores iniciales para la ecuación de onda en dimensión 1. Es decir,

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau)\,d\tau, \tag{19}$$

donde ϕ y ψ denotan las condiciones iniciales.

Substituyendo los datos actuales en la expresión (19), resulta

$$J(r,t) = \frac{(r+ct)F(r+ct) + (r-ct)F(r-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct} \tau G(\tau)\,d\tau, \tag{20}$$

es decir,

$$I(r,t) = \frac{(r+ct)F(r+ct) + (r-ct)F(r-ct)}{2r} + \frac{1}{2rc}\int_{r-ct}^{r+ct} \tau G(\tau)\,d\tau, \tag{21}$$

Ya habíamos establecido que $\lim_{r\to 0} I(r,t) = u(x,t)$. Para calcular este límite, notemos que $I(-r,t) = I(r,t)$, así que podemos extender la función media esférica para valores negativos de r como función par. Como consecuencia, los valores iniciales F y G quedan extendidos como funciones pares: $F(-r) = F(r)$ y $G(-r) = G(r)$.

La fórmula (21) puede entonces expresarse en la forma

$$I(r,t) = \frac{(ct+r)F(ct+r) - (ct-r)F(ct-r)}{2r} + \frac{1}{2rc}\int_{ct-r}^{ct+r} \tau G(\tau)\,d\tau, \tag{22}$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0} \frac{(ct+r)F(ct+r) - (ct-r)F(ct-r)}{2r} \\
&= \lim_{r\to 0}\left(\frac{(ct+r)F(ct+r) - ctF(ct)}{2r} + \frac{ctF(ct) - (ct-r)F(ct-r)}{2r}\right) \\
&= \frac{d}{d(ct)} ctF(ct) = \frac{d}{dt} tF(ct).
\end{aligned} \tag{23}$$

Mientras que si denotamos

$$H(ct) = \int_0^{ct} \tau G(\tau)\,d\tau$$

resulta

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\frac{1}{2rc}\int_{ct-r}^{ct+r}\tau G(\tau)\,d\tau &= \lim_{r\to 0}\frac{H(ct+r)-H(ct-r)}{2rc}\\ &= \frac{H'(ct)}{c}=\frac{ctG(ct)}{c}=tG(t).\end{aligned}\tag{24}$$

Así que, resumiendo,

$$u(x,t)=\lim_{r\to 0}I(r,t)=\frac{d}{dt}tF(ct)+tG(ct).\tag{25}$$

Finalmente, usamos las fórmulas (5) para escribir (25) en detalle y obtener la fórmula buscada

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial}{\partial t}&\left(\frac{1}{t}\int_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=c^2t^2} f(\xi,\eta,\zeta)\,dS\right)\\ &+\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=c^2t^2} g(\xi,\eta,\zeta)\,dS\end{aligned}\tag{26}$$

Esta fórmula, llamada *Fórmula de Poisson*, generaliza al caso $n=3$ la Fórmula de D'Alembert, ya que expresa la solución $u(x,y,z,t)$ como función de los valores iniciales f y g sobre la superficie de esferas de radio ct.

La Fórmula de Poisson para la ecuación de onda puede deducirse como caso particular de expresiones más generales (véase [4]), pero que no pueden obtenerse de manera tan sencilla como la que hemos expuesto en este artículo.

Referencias

[1] Coddington, E., Levinson, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

[2] Marsden, I., Tromba, A. *Cálculo Vectorial*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.

[3] John, F. *Partial Differential Equations*, 4th ed., Springer-Verlag, New York, 1982.

[4] Sneddon, I. *Elements of Partial Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, London, 1957.