Divulgaciones Matemáticas Vol. 13 No. 1(2005), pp. 65–71

Obtención de la Norma en los Espacios de Bergman

Obtainment of the Norm in Bergman Spaces

Julio C. Ramos Fernández (joramos@ull.es)
Departamento de Matemáticas
Universidad de Oriente
Venezuela

Resumen

Sea $\mathbb{D}$ el disco unitario en el plano complejo y μ una medida positiva que es doblante e invariante por traslación. Para cada función $f \in L^p(\mathbb{D}, \mu)$, analítica sobre el disco, construimos ciertos subconjuntos G_f de $\mathbb{D}$, y probamos que la norma L^p de f se obtiene esencialmente por integración sobre los conjuntos G_f.
Palabras y frases clave: Espacios de Bergman, medidas doblantes, discos seudo-hiperbólicos.

Abstract

Let $\mathbb{D}$ be the open unit disk in the complex plane and let μ be a positive, translation invariant doubling measure. For each analytic function $f \in L^p(\mathbb{D}, \mu)$ on the disk $\mathbb{D}$, we construct a class of subsets G_f of $\mathbb{D}$, and we show that the L^p norm of f is obtained by integration over the sets G_f.
Key words and phrases: Bergman spaces, doubling measures, seudo-hyperbolic disks.

1 Introducción

Sea $\mathbb{D}$ el disco unitario del plano complejo $\mathbb{C}$. Para $p \geq 1$ y $\alpha > -1$, el espacio de Bergman con peso $A^p_\alpha := A^p_\alpha(\mathbb{D})$ es la clase de las funciones analíticas sobre $\mathbb{D}$ tales que

$$\|f\|_{\alpha,p} := \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

Recibido 2004/06/15. Aceptado 2005/07/20.
MSC (2000): Primary 30C25, 30H05, 46E15.

donde $dA_\alpha(z) := (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dA(z)$ y $dA(z) = \frac{1}{\pi}dxdy = \frac{1}{\pi}rdrd\theta$ es la medida bidimensional de Lebesgue. Para $\alpha = 0$, el espacio de Bergman usual (sin peso) se denota por A^p.

Se dice que un subconjunto G de $\mathbb{D}$ es un *conjunto dominante* para A^p_α si $\int_G |f(z)|^p dA_\alpha(z)$ es comparable con $\|f\|^p_{\alpha,p}$ para toda $f \in A^p_\alpha$. En [2], D. Luecking describe los conjuntos dominantes para A^p, notándose que tales conjuntos deben tener una distribución uniforme de masa cerca de la frontera del disco $\mathbb{D}$. En [4] y [1] los autores prueban que tal caracterización también se cumple para los espacios de Bergman con peso A^p_α, con $\alpha > -1$, $p \geq 1$ y en los espacios de Besov B_p con $p > 1$, donde $f \in B_p$, $p > 1$ si y sólo si $f' \in A^p_{p-2}$.

En otro orden de ideas, es conocido que si f es una función analítica sobre $\mathbb{D}$, entonces podemos construir conjuntos G_f (que llamaremos del *tipo dominante* para los espacios de Bergman) tales que la norma de Bergman se obtenga por integración sobre dichos conjuntos. Por ejemplo en [3] D. Marshall y W. Smith prueban que si consideramos $G_f = f^{-1}(\Sigma_\varepsilon)$, entonces se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 1.1. *Dado $\varepsilon > 0$ existe a una constante $\delta > 0$ tal que si $f \in A^1$ es univalente y $f(0) = 0$, entonces*

$$\int_{f^{-1}(\Sigma_\varepsilon)} |f| dA \geq \delta \|f\|_1, \tag{1.1}$$

siendo conjeturado que la desigualdad (1.1) sigue siendo válida, para todo $\varepsilon > 0$, si quitamos la condición de univalencia. El resultado de Marshall y Smith ha sido generalizado por Pérez-González y Ramos en [5] para funciones en el espacio de Bergman con peso A^1_α con $\alpha \geq 0$ mostrándose además, mediante un contraejemplo, que tal generalización no es factible, para todo $\varepsilon > 0$, si $\alpha < 0$.

En este artículo investigamos un problema de esta naturaleza. Consideraremos una medida μ, invariante por traslación que sea doblante, es decir, la medida μ satisface $\mu(D(z,\eta r)) \leq C(\eta)\mu(D(z,r))$, para toda bola en el plano complejo y la constante $C(\eta) > 0$ depende solamente de $\eta > 0$. Entonces dada una función $f \in L^p(\mathbb{D}, d\mu)$, analítica sobre $\mathbb{D}$ y constantes $\rho, \lambda \in (0,1)$, construiremos una clase de subconjuntos $G_f(\rho,\lambda)$ del disco $\mathbb{D}$ tales que

$$\int_{G_f(\rho,\lambda)} |f(z)|^p \, d\mu(z) \geq \delta \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, d\mu(z),$$

donde la constante $\delta > 0$ no depende de la función f.

2 Notaciones y preliminares

Antes de establecer nuestro resultado principal, necesitaremos algunas notaciones. En general, asumiremos que $\varepsilon \in (0,1)$ es fijo; para cada $a \in \mathbb{D}$, definimos

$$D_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{D} \ : \ |z-a| < \varepsilon(1-|a|)\} .$$

Note que $D_\varepsilon(a)$ es un disco euclídeo centrado en a y totalmente contenido en el disco unitario. Dado $\lambda \in (0,1)$ dado y una función analítica f sobre $\mathbb{D}$, definimos

$$E_\lambda(a) := \{z \in D_\varepsilon(a) \ : \ |f(z)| > \lambda |f(a)|\} .$$

Podemos notar que para $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$ se cumple

$$E(\lambda_2, f)(a) \subset E(\lambda_1, f)(a), \qquad a \in \mathbb{D}.$$

Entonces para ρ y λ dados en $(0,1)$ y f analítica sobre $\mathbb{D}$ podemos definir los conjuntos

$$G_f(\rho,\lambda) = \{z \in \mathbb{D} : \mu\left(E_\lambda(z)\right) > \rho\mu\left(D_\varepsilon(z)\right)\}, \tag{2.2}$$

Note que para $\lambda \in (0,1)$ fijo se cumple,

$$\rho_1 < \rho_2 < 1 \Rightarrow G_f(\rho_2,\lambda) \subset G_f(\rho_1,\lambda). \tag{2.3}$$

Los conjuntos G_f juegan un papel fundamental en nuestro resultado. En la próxima sección, nos dedicaremos a demostrar que la norma de f se obtiene esencialmente por integración sobre G_f; pero antes necesitaremos algunas estimaciones que involucran discos seudohiperbólicos.

Recordemos que el disco seudo hiperbólico con centro $a \in \mathbb{D}$ y radio ε se define como

$$\Delta(a,\varepsilon) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \left| \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| < \varepsilon \right\} .$$

Entonces, dado que $\Delta(z,\varepsilon)$ es un disco euclídeo, se cumple la desigualdad

$$|\Delta(z,\varepsilon)| \leq \frac{4\pi\varepsilon^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2}\left(1-|z|\right)^2 \tag{2.4}$$

para cualquier $z \in \mathbb{D}$. Donde $|E|$ denota la medida bidimensional normalizada de Lebesgue del conjunto medible E.

Lema 2.1. *Dado* $\varepsilon \in (0,1)$*, existe una constante* $C(\varepsilon) > 0$ *tal que para cualquier* z *en* $\mathbb{D}$ *se cumple*

$$I := \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{\mu\left(D_\varepsilon(a)\right)} \mathbf{1}_{D_\varepsilon(a)}(z) d\mu(a) \leq C(\varepsilon) \tag{2.5}$$

donde $\mathbf{1}_{D_\varepsilon(a)}$ *denota la función característica del conjunto* $D_\varepsilon(a)$*.*

Demostración: Notamos que $D_\varepsilon(a) \subset \Delta(a,\varepsilon)$ y que $\mathbf{1}_{D_\varepsilon(a)}(z) \leq \mathbf{1}_{\Delta(a,\varepsilon)}(z) = \mathbf{1}_{\Delta(z,\varepsilon)}(a)$, donde en la última desigualdad hemos usado el hecho de que $z \in \Delta(a,\varepsilon)$ si y sólo si $a \in \Delta(z,\varepsilon)$. Luego sustituyendo en la definición de I, obtenemos

$$I \leq \int_{\Delta(z,\varepsilon)} \frac{1}{\mu\left(D_\varepsilon(a)\right)} d\mu(a); \tag{2.6}$$

además, dado que $\Delta(z,\varepsilon)$ es un disco euclídeo con radio (euclídeo) R, entonces usando la cota en (2.4), podemos ver que existe una $C(\varepsilon) > 0$ tal que $R = C(\varepsilon) radio\left(D_\varepsilon(a)\right)$ y por tanto $\mu\left(\Delta(z,\varepsilon)\right) \leq C(\varepsilon)\mu\left(D_\varepsilon(a)\right)$, donde hemos usado que μ es una medida doblante invariante por traslación. Sustituyendo en (2.6) obtenemos $I \leq C(\varepsilon)$, y la prueba está completa. □

3 Clase de conjuntos dominantes

Dedicamos esta sección para probar nuestro resultado principal el cual enunciamos de la siguiente manera:

Teorema 3.1. *Fijemos* $\varepsilon \in (0,1)$ *y sea* $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$*. Entonces existen constantes* $\rho \in (0,1)$ *y* $\delta > 0$ *tal que*

$$\int_{G_f(\rho,\lambda)} |f(z)|^p \, d\mu(z) \geq \delta \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, d\mu(z)$$

para toda función analítica $f \in L^p\left(\mathbb{D}, d\mu\right)$*.*

Demostración: Sea $f \in L^p\left(\mathbb{D}, d\mu\right)$ y $r_0 \in (0,1)$ una constante que depende sólo de ε que seleccionaremos después. Entonces podemos descomponer el disco unitario $\mathbb{D}$ en dos conjuntos disjuntos A y $B = \mathbb{D} \setminus A$, donde

$$A = \left\{ a \in \mathbb{D} : |f(a)|^p \leq \frac{r_0}{\mu\left(D_\varepsilon(a)\right)} \int_{D_\varepsilon(a)} |f(z)|^p d\mu(z) \right\}.$$

Así de la definición de A y el Lema 2.1 podemos ver que existe una constante $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\int_A |f(z)|^p d\mu(z) \leq r_0 C(\varepsilon) \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p d\mu(z). \tag{3.7}$$

Note que si seleccionamos $r_0 C(\varepsilon) < 1$, el conjunto $\mathbb{D} \setminus A$ es también del tipo dominante.

Consideremos ahora un punto $a \in B$, $\lambda \leq \frac{1}{2}$ y sea $R = \dfrac{1}{32} r_0 \varepsilon\,(1 - |a|)$. Probaremos que $D\,(a; R) \subset E_\lambda(a)$. En efecto, consideremos $r = \frac{\varepsilon}{2}(1 - |a|)$ y $z \in D(a, R)$. Entonces por la fórmula integral de Cauchy podemos escribir

$$|f(z) - f(a)| \leq \frac{1}{8} r_0 C_r, \tag{3.8}$$

donde $C_r := \sup\{|f(t)| : |t - a| = r\}$. Dado que $|f|$ es una función subarmónica se tiene

$$C_r \leq \frac{4}{|D_\varepsilon(a)|} \int_{D_\varepsilon(a)} |f(w)| dA(w) < \frac{4}{r_0} \left| f(a) \right|,$$

donde hemos usado que $D\,(t, r) \subset D_\varepsilon(a)$, la definición de r, la desigualdad de Hölder y la definición de B. Luego, sustituyendo en (3.8) se cumple

$$|f(z) - f(a)| < \frac{1}{2} \left| f(a) \right|$$

para todo $z \in D(a, R)$ esto último junto con la desigualdad triangular implica $|f(z)| > \dfrac{1}{2} |f(a)| \geq \lambda |f(a)|$ para cualquier $z \in D(a, R)$ y $D(a, R) \subset E_\lambda(a)$ como lo afirmamos.

Por lo tanto, si $a \in B$ podemos usar el hecho que μ es doblante para concluir que existe una constante $\beta > 1$, que depende sólo de r_0 tal que $\mu\,(D_\varepsilon(a)) \leq \beta\mu\,(D\,(a, R)) \leq \beta\mu\,(E_\lambda(a))$, es decir, dado $\lambda \leq \frac{1}{2}$, existe una constante $\rho \in (0, 1)$ tal que $B \subset G_f\,(\rho, \lambda)$.

Finalmente, seleccionando $r_0 \in (0, 1)$ tal que $r_0 C(\varepsilon) < 1$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, d\mu(z) \leq r_0 C(\varepsilon) \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, d\mu(z) + \int_{G_f(\rho, \lambda)} |f(z)|^p \, d\mu(z)$$

y la prueba está lista con $\delta = \frac{1}{1 - r_0 C(\varepsilon)}$. $\square$

Ejemplo 3.2. Consideremos $\mu = A$ la medida bidimensional de Lebesgue y fijemos $\varepsilon \in (0, 1)$. Entonces podemos notar que la constante $C(\varepsilon)$ en (2.5) se puede tomar como $C(\varepsilon) = \frac{64}{(1-\varepsilon^2)^4}$, de tal manera que para que la conclusión del Teorema sea cierta debemos seleccionar

$$r_0 < \frac{1}{64}\left(1 - \varepsilon^2\right)^4.$$

Por otra parte, de la relación $A\left(D\left(a, R\right)\right) = \frac{1}{32} r_0^2 A\left(D_\varepsilon\left(a\right)\right)$ es claro que la constante ρ al cual se refiere el Teorema puede ser

$$\rho = \frac{r_0^2}{32} < \frac{1}{2^{17}}\left(1 - \varepsilon^2\right)^8$$

que como se nota es una constante bastante pequeña. Esto último junto con el hecho que los conjuntos $G_f\left(\rho, \lambda\right)$ son decrecientes por (2.3) nos lleva a preguntarnos si tales conjuntos no son todo el disco $\mathbb{D}$.

Con el fin de probar que en general los conjuntos $G_f\left(\rho, \lambda\right)$ no son todo el disco $\mathbb{D}$, consideramos $\varepsilon = \frac{1}{10}$, fijamos $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $f(z) = (1 - z)^{-n}$ con $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande tal que $\sqrt[n]{\lambda} > \frac{1}{9}$. Afirmamos que en este caso $G_f\left(\rho, \lambda\right)$ está contenido en $\mathbb{D} \setminus D\left(0; \frac{1}{4}\right)$. En efecto, sea $a \in D\left(0; \frac{1}{4}\right)$ y $z \in D_\varepsilon(a)$, entonces dado que $|z| < \frac{9}{10}|a| + \frac{1}{10}$ es claro que

$$|1 - z| \geq 1 - |z| \geq \frac{9}{10}\left(1 - |a|\right) > 9\left|z - a\right|$$

por lo que $z \notin \left\{z \in D_\varepsilon(a) : |z - a| > \sqrt[n]{\lambda}\left|1 - z\right|\right\} = E_\lambda(a)$; por lo tanto si $a \in D\left(0; \frac{1}{4}\right)$, $E_\lambda(a) = \emptyset$ y $a \notin G_f\left(\rho, \lambda\right)$ tal como lo afirmamos.

Referencias

[1] Arzolay, W., Ramos, J., *Conjuntos donde se alcanza la norma en espacios de Besov*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, **XI**(1) (2004), 5–15.

[2] Luecking, D., *Inequalities on Bergman spaces*, Illinois J. Math., **25** (1981), 1–11.

[3] Marshall, D. E., Smith, W., *The angular distribution of mass by Bergman functions*, Revista Matemática Iberoamericana, **15**(1) (1999), 93–116.

[4] Pérez-González, F., Ramos, J., *Conjuntos dominantes en espacios de Bergman con peso*, in Margarita Matematica, eds. L. Español,

J. L. Varona, Secretariado de Publicaciones de la Universidad de La Rioja, Logroño, 2001, 97–109.

[5] Pérez-González, F., Ramos, J., *The Angular Distribution of Mass by Weighted Bergman Functions*, Divulgaciones Matemáticas, **12**(1) (2004), 65–86.