Divulgaciones Matemáticas Vol. 12 No. 2(2004), pp. 149–153

El operador de Nemytskij en el Espacio de las Funciones Regladas

The Nemytskij Operator in the Regulated Functions Space

Nelson Viloria (nelson@ula.ve)
Universidad de Los Andes. Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas.
Mérida, Venezuela.

Resumen

Daremos una condición necesaria y suficiente para que el operador de Nemytskij (superposición, composición o substitución), en el caso no autónomo, actúe sobre el espacio de las funciones regladas.
Palabras y frases claves: Funciones regladas, operador de Nemytskij, operador superposición, operador composición, operador substitución, condición Lipschitz.

Abstract

We give a necessary and sufficient condition for the nonautonomous Nemytskij (superposition, composition or substitution) operator to act on the regulated functions space.
Key words and phrases: Regulated functions, Nemytskij operator, superposition operator, composition operator, substitution operator.

1 Introducción

En problemas de control, relacionados con la existencia y/o expansión de soluciones de ecuaciones funcionales, integrales o diferenciales, aparece naturalmente el denominado operador de Nemytskij.

Las ecuaciones que modelan dichos problemas pueden expresarse como una ecuación de la forma

$$Tx = u$$

Recibido 2001/02/16. Aceptado 2004/10/21.
MSC (2000): Primary 47B38.

con T un operador no lineal actuando sobre un cierto espacio de Banach. En muchas ocasiones este operador adopta la forma

$$T = I + k \circ F$$

donde I es el operador identidad, k algún operador lineal y F el operador de Nemytskij generado por una aplicación $f : [a, b] \times X \to X$. En tales casos, basta considerar una condición de lipschitzianidad para F, pues la parte lineal no representa mayor dificultad y, obviamente, menos aún el operador identidad.

Al estudiar dichos problemas es necesario, en primer lugar, constatar el "buen comportamiento" del operador de Nemytskij en el espacio donde se plantea la ecuación en cuestión. Es menester, entonces, tener condiciones necesarias y suficientes sobre la función f, generadora del operador de Nemytskij, de manera tal que actúe en el espacio requerido.

Para el espacio de las funciones regladas no contábamos con ningún resultado que estableciera tales condiciones (ni siquiera en el caso $X = \mathbb{R}$), en este trabajo avanzamos en ese sentido.

2 Funciones Regladas

Consideremos un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, y sea X un espacio de Banach.

Una función $x : [a, b] \to X$ es una *función reglada* si x sólo tiene discontinuidades de primera especie, esto es, si

(i) para todo $t \in [a, b)$ existe $x(t+) = \lim\limits_{\tau \downarrow t} x(\tau)$,

(ii) para todo $t \in (a, b]$ existe $x(t-) = \lim\limits_{\tau \uparrow t} x(\tau)$.

Por $G([a, b], X)$ designamos el espacio de Banach de las funciones regladas de $[a, b]$ en X, considerado con la norma del supremo. Es directo de esa definición que $C([a, b], X) \subset G([a, b], X)$, i.e., que toda función continua es reglada; menos directo resulta que $BV([a, b], X) \subset G([a, b], X)$, i.e., que toda función de variación acotada es reglada (ver Hönig, C.[2]).

Otros espacios de funciones de uso frecuente (continuas, monótonas, Lipschitz, absolutamente continuas, Darboux, con primitiva, etc.) están estrechamente relacionados con el espacio de las funciones regladas.

Una función $x : [a, b] \to X$ es una *función reglada por la izquierda* si

(i) $x(a) = 0$,

(ii) $x(t) = x(t-)$, para todo $t \in (a, b]$.

El espacio de las funciones regladas por la izquierda, $G^-([a, b], X)$, es un subespacio cerrado de $G([a, b], X)$

3 El operador de Nemytskij en $G([a, b], X)$

Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{F}$ de todas las funciones $x : [a, b] \to X$. El operador no lineal $F : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ definido por

$$(Fx)(t) = f(t, x(t)),$$

donde f es una aplicación $f : [a, b] \times X \longrightarrow X$. F es denominado *operador de Nemytskij generado por* f (también: *superposición*, *composición* o *substitución*). Cuando f no depende de t, el operador de Nemytskij generado por f es llamado *autónomo*, refiriéndose al caso general como caso no autónomo.

En 1981, Josephy [3] demostró que el operador de Nemytskij, generado por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (caso autónomo), actúa en $BV([a, b], \mathbb{R})$ si, y sólo si, f es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$. Otros matemáticos mostraron este resultado para diversos espacios de funciones conocidos (hölderianas, lipschitzianas, Λ-variación acotada, absolutamente continuas, etc.), para detalles ver [1] y [5].

Anteriormente, Ljamin [4] había mostrado la suficiencia, pero en el caso no autónomo, para las funciones de variación acotada.

Nosotros daremos condiciones para que el operador de Nemytskij, definido en $G^{-}([a, b], X)$, aplique este espacio en sí mismo. Para esto, consideremos el espacio

$$G^{-} \cdot Lip([a, b] \times X, X),$$

de las funciones regladas por la izquierda en la primera variable y Lipchitz en la segunda, esto es, las f tales que:

- $t \mapsto f(t, \bar{x})$ es reglada, para todo $\bar{x} \in X$, y
- existe $\mathsf{L} > 0$ con

$$||f(t, \bar{x}_2) - f(t, \bar{x}_1)|| \leq \mathsf{L}\ ||\bar{x}_2 - \bar{x}_1||, \tag{L}$$

  para todo $t \in [a, b]$.

$G^{-} \cdot Lip([a, b] \times X, X)$ es un espacio de Banach cuando es considerado con la norma

$$||f||_{Lip} = \sup\{||f_0||,\ [f]\}$$

donde,

$$\begin{aligned} f_0 : \quad [a, b] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto f(t, 0), \end{aligned}$$

y

$$[f] = \text{ínf}\{\mathsf{L} : \mathsf{L} \text{ verifica la desigualdad } (\mathsf{L})\}.$$

Teorema 1. *Sea $f : [a,b] \times X \longrightarrow X$ Lipschitz en la segunda variable. Entonces el operador de Nemytskij F, generado por f, aplica $G^-([a,b],X)$ en sí mismo si, y sólo si, $f \in G^- \cdot Lip([a,b] \times X, X)$. Además, F es acotado.*

Prueba
Si F aplica $G^-([a,b],X)$ en sí mismo, entonces es inmediato que f es reglada por la izquierda en la primera variable.

Recíprocamente, tenemos que

$$(i)\ (Fx)(a) = f(a, x(a)) = 0.$$

Además, para todo $t \in [a,b]$, se verifica que

$$(ii)\ (Fx)(t-) - (Fx)(t) = 0.$$

De hecho,

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \uparrow t} ||(Fx)(\tau) - (Fx)(t)|| \\
&= \lim_{\tau \uparrow t} ||f(\tau, x(\tau)) - f(t, x(t))|| \\
&= \lim_{\tau \uparrow t} ||f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, x(t)) + f(\tau, x(t)) - f(t, x(t))|| \\
&\leq \mathsf{L} \lim_{\tau \uparrow t} ||x(\tau) - x(t)|| + \lim_{\tau \uparrow t} ||f(\tau, x(t)) - f(t, x(t))|| \\
&= 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Veamos ahora que F es acotado. Sea $A \subset G^-([a,b],X)$ acotado, entonces existe $r > 0$ tal que $x \in B_r$ para todo $x \in A$. Así,

$$\begin{aligned}
||Fx|| - ||F0|| &\leq ||Fx - F0|| \\
&= \sup_{t \in [a,b]} ||(Fx)(t) - (F0)(t)|| \\
&= \sup_{t \in [a,b]} ||f(t, x(t)) - f(t, 0)|| \\
&\leq \mathsf{L} \sup_{t \in [a,b]} ||x(t)|| \\
&\leq \mathsf{L}\, r.
\end{aligned}$$

Luego,

$$||Fx|| \leq \mathsf{L} r + ||f_0||.$$

Referencias

[1] Appell, J., Zabrejko, P. *Nonlinear superposition operators*, Cambridge University Press, 1990.

[2] Hönig, C. *Équations intégrales généralisées et applications*, Exp. No. 5, Publ. Math. Orsay 83, 1. Univ. Paris XI, Orsay, 1983.

[3] Josephy, M. *Composing fuctions of bounded variation*, Proc. Amer. Math. Soc. 83, **2**(1981), 354–356.

[4] Ljamin, A. *On the acting problem for the Nemytskij operator in the space of functions of bounded variation*, 11^{th} School Theory operators, Function Spaces, Cheljabinsk, 1986, 63–64.

[5] Merentes, N., Rivas, S. *El operador de composición en espacios con algún tipo de variación acotada*, Novena Escuela Venezolana de Matemáticas, 1996.