Boletín de Estadística e Investigación Operativa
Vol. 25, No. 2, Junio 2009, pp. 97-108

Investigación Operativa

Sharing costs in airport and highway problems

M. Gloria Fiestras-Janeiro and Manuel A. Mosquera
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Vigo
fiestras@uvigo.es, ✉ mamrguez@uvigo.es

Abstract

This paper is a review of two problems of sharing the construction costs of a particular resource by using Game Theory tools. In the first problem, these costs are referred to an airport runway and it is studied how to share them among the types of planes who use the runway. The second problem is how to assign highway tolls to the different travels into the highway in order to defray these costs.

Keywords: TU cooperative games, sharing costs, airport games, highway games, Shapley value, the nucleolus.
AMS Subject classifications: 91A12, 91A43.

1. Introducción

En muchas situaciones reales se plantea el problema del reparto del coste asociado a la construcción de una instalación que va a ser utilizada por varios agentes, los cuales tienen necesidades diferentes que podemos suponer ordenadas linealmente. Ejemplos de este tipo de problemas aparecen en diversos ámbitos. La pista de un aeropuerto es utilizada por aviones de diferentes tamaños y, por tanto, necesitan diferentes longitudes para realizar las operaciones de aterrizaje y despegue (Littlechild y Owen, 1973). Este problema se conoce con el nombre de problema del aeropuerto. Un canal de riego es utilizado por un grupo de agricultores cuyas parcelas están situadas en sus márgenes. El agricultor cuyas parcelas están más cercanas a la cabecera del canal necesita que se construya un tramo de canal de menor longitud (Aadland y Kolpin, 1998). En estos problemas hay un único punto de entrada, el inicio de la pista o la cabecera del canal, y varios puntos de salida determinados por la longitud de pista necesaria o la localización de las parcelas. Un caso más general es el relativo a la construcción de una autopista (Mosquera y Zarzuelo, 2009). En una autopista hay diferentes puntos de entrada y de salida que delimitan tramos "indivisibles". Cada viaje dentro de la autopista necesita usar los tramos que están entre su punto de entrada y su punto de salida.

El coste de construcción de la instalación ha de ser abonado por los agentes. El problema que se plantea es cómo repartir este coste teniendo en cuenta el coste que tendría que abonar cada agente si construyese una instalación adaptada a sus propias necesidades. Este problema puede abordarse de varias formas: proponer reglas directas de reparto de coste basadas en los parámetros del problema, o asociar un juego cooperativo y utilizar algún concepto de solución propuesto en este contexto para establecer el coste que ha de abonar cada agente.

En este trabajo vamos a describir el problema del aeropuerto y el problema de la autopista. Recopilamos algunas propuestas de reparto del coste en el problema del aeropuerto correspondientes al valor de Shapley (Shapley, 1953) y al nucleolo (Schmeidler, 1969) del juego de coste con utilidad transferible asociado. Una recopilación exhaustiva de modelos y resultados relacionados con el reparto del coste en problemas del aeropuerto puede encontrarse en Thomson (2007). En Fragnelli et al. (2000) y Norde et al. (1992) puede encontrarse el estudio de problemas de aeropuerto más generales en los que aparecen involucrados costes de mantenimiento. Estos problemas dan lugar a los juegos de coste de infraestructura (de una instalación).

En Villarreal-Cavazos y García-Díaz (1985), Makrigeorgis (1991), y Castaño-Pardo y García-Díaz (1995) se proponen distintos repartos de los costes de mantenimiento y construcción entre las diferentes clases de vehículos que utilizan una autopista (vehículos ligeros, pesados de un eje, de dos ejes, . . .). En Villarreal-Cavazos y García-Díaz (1985) se propone como reparto el valor del nucleolo, al cual llaman *método generalizado*. Además, Luskin et al. (2001) comparan distintos tipos de repartos para el caso real de las autopistas en el estado de Texas (USA) y llegan a la conclusión de que el método generalizado es uno de los más adecuados a pesar de sus dificultades de cómputo.

En Luskin et al. (2001) se estudia el problema del reparto de costes de construcción entre los distintos viajes dentro de una autopista. Definen la clase de *juegos de autopista* y proporcionan dos métodos de reparto de costes intuitivos y fáciles de calcular. Estos repartos resultan ser el valor de Shapley y el valor de compromiso para los juegos de autopista. Además, a la vista de los buenos resultados sobre el nucleolo obtenidos en estudios previos, se proporciona un algoritmo que simplifica la obtención de este reparto para la clase de juegos de autopista. Un estudio sobre problemas de autopista con estructura más compleja puede encontrarse en Çiftçi et al. (2008).

La estructura de este artículo es la siguiente. En la Sección 2 presentamos unas nociones básicas de la Teoría de Juegos Cooperativos con el fin de que este trabajo sea autocontenido (véase Peleg y Sudholter, 2003 para un estudio más detallado). En la Sección 3 describimos y presentamos algunos resultados relativos a los juegos del aeropuerto. Y por último, en la Sección 4, presentamos las principales ideas sobre juegos de autopista que aparecen en Mosquera y Zarzuelo (2009).

2. Nociones de Teoría de Juegos Cooperativos

Un *juego de coste con utilidad transferible* (juego de coste TU) es un par (N, c) con $N = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, representando el conjunto de *jugadores* y $c : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es la *función característica* del juego donde $c(\emptyset) = 0$ y, para cada *coalición* $\emptyset \neq S \subseteq N$, $c(S)$ representa el coste que tendrían que pagar los jugadores de S si deciden cooperar entre ellos. Decimos que un juego de coste TU es *monótono* si el coste de una coalición es mayor o igual que el coste de cualquiera de sus subcoaliciones. Decimos que un juego de coste TU es *subaditivo* si el coste de una coalición es menor o igual que la suma de los costes de cualquier partición de dicha coalición. Decimos que un juego de coste TU es *cóncavo* si el coste que aporta un jugador a una coalición es mayor cuánto más pequeña es la coalición. Así, los jugadores tendrán más incentivos a unirse a la coalición a la que menor coste aporten, es decir, a la gran coalición N.

Uno de los principales objetivos de la teoría de juegos de coste TU es proponer repartos del coste total $c(N)$ generado por la cooperación de todos los jugadores de forma que se cumplan ciertas propiedades de estabilidad o justicia. Formalmente, se desea encontrar un vector de números no negativos $x \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $x(N) = \sum_{i=1}^n x_i = c(N)$. Decimos que un reparto es *individualmente racional* si $x_i \leq c(i)$ para todo $i \in N$. El conjunto de repartos individualmente racionales se conoce con el nombre de *conjunto de imputaciones* y se denota por $\mathcal{I}(N, c)$. Decimos que un reparto es *coalicionalmente estable* si $x(S) = \sum_{i \in S} x_i \leq c(S)$ para todo $\emptyset \neq S \subseteq N$. Definimos el *núcleo* de un juego de coste TU como el conjunto de repartos coalicionalmente estables,

$$\mathcal{C}(N, c) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ \;\middle|\; x(N) = c(N), x(S) \leq c(S) \text{ para cada } S \subset N \right\}.$$

Nótese que, dado un $x \in \mathcal{C}(N, c)$, $c(N) - c(N \setminus \{i\}) \leq x_i \leq c(i)$.

Debido a un resultado que aparece en Shapley (1971) y en Ichiishi (1981), el núcleo de juegos de coste TU cóncavos es siempre no vacío y por tanto siempre podemos encontrar repartos coalicionalmente estables. Un reparto que siempre está en el núcleo cuando el juego es cóncavo es el conocido como *valor de Shapley* (Shapley, 1953). Dado un juego de coste TU (N, c), el valor de Shapley es una regla de reparto que para cada juego (N, c) propone que el jugador $i \in N$ debe de asumir el coste dado por

$$\Phi_i(N, c) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!} (c(S \cup \{i\}) - c(S)),$$

donde $|S|$ denota el número de jugadores de una coalición $S \subseteq N$.

Una interpretación que se le puede dar al valor de Shapley es la siguiente: supongamos que los jugadores van llegando a un punto de encuentro en un orden determinado y a cada uno se le va asignando el coste que aporta a la coalición de jugadores que han llegado antes que él. Si hacemos esto con todos los posibles ordenes de llegada y los consideramos todos equiprobables obtenemos el valor de Shapley. Una revisión de sus propiedades puede encontrarse en Winter (2002) y de los campos de aplicación de este valor puede encontrarse en Moretti y Patrone (2008). El principal problema que tiene el valor de Shapley es que su coste computacional aumenta exponencialmente con el número de jugadores.

Otra regla de reparto interesante para juegos de coste TU es el *valor de compromiso* (Tijs, 1981). Esta regla se define como el único reparto que está en la recta que une un reparto de utopía y el reparto de mínimos derechos. El *valor de utopía* se define como lo que el jugador aporta a la gran coalición, $U_i(N,c) = c(N) - c(N \setminus \{i\})$, y el *mínimo derecho* se define como lo mejor que puede obtener el jugador i si al resto de jugadores se les concede su valor de utopía, $m_i(N,c) = \text{mín}_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\{c(S\cup\{i\}) - \sum_{j\in S} U_j(N,c)\}$.

El *nucleolo* (Schmeidler, 1969) es otra regla de reparto para juegos de coste TU. Informalmente, el nucleolo es un reparto que trata de maximizar la "satisfacción" de las coaliciones menos satisfechas con el reparto propuesto. Una buena propiedad de esta regla de reparto es que, si el núcleo del juego es no vacío, entonces el nucleolo es su centro "lexicográfico" y, por lo tanto, es estable. A continuación presentamos su definición formal.

Sean (N,c) un juego de coste TU, $S \subseteq N$ y $x \in \mathbb{R}^n$ un reparto cualquiera. El *exceso* $e(S,x)$ *de la coalición* S *en el reparto* x viene dado por $e(S,x) = c(S) - x(S)$. Cuanto más grande es $e(S,x)$, más satisfecha está la coalición S con el reparto asignado x ya que paga menos. Definimos $\theta(x) \in \mathbb{R}^{2^n}$ como el vector que se obtiene al ordenar de forma no decreciente los excesos de todas las coaliciones de N en el reparto x. Sean $u, v \in \mathbb{R}^{2^n}$, se dice que u es *lexicográficamente más grande o igual* que v si $u = v$ o si existe un índice $s \in \{1,\ldots,2^n\}$ tal que $u_k = v_k$ para todo $k \in \{1,\ldots,s-1\}$ y $u_s > v_s$. Lo denotaremos por $u \geq_L v$.

Si $\mathcal{I}(N,c) \neq \emptyset$, el *nucleolo* de (N,c) se define como

$$\nu(N,c) = \{x \in \mathcal{I}(N,c) \mid \theta(x) \geq_L \theta(y) \text{ para todo } y \in \mathcal{I}(N,c)\}.$$

Se puede probar que el nucleolo está formado por un único punto (véase Peleg y Sudholter, 2003). Entonces, el nucleolo es la única imputación que lexicográficamente maximiza $\theta(x)$ sobre el conjunto de imputaciones. Una recopilación de sus propiedades puede encontrarse en Maschler (1992).

3. El problema del aeropuerto

En esta sección recopilamos algunos resultados relativos al problema del aeropuerto (Littlechild y Owen, 1973). Consideremos un conjunto finito M que representa el conjunto de los diferentes tipos de aviones. Cada tipo de avión $\ell \in M$ necesita una pista para realizar sus operaciones de aterrizaje y despegue valorada en d_ℓ unidades, $d_\ell > 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $d_1 < d_2 < \ldots < d_m$. Además, cada tipo de avión $\ell \in M$ declara que va a realizar N_ℓ operaciones.

¿Cómo repartir el coste de construcción de la pista entre las distintas operaciones? Un primer intento para abordar este problema fue propuesto por Baker y Associates (1965) y Thompson (1971). En ambos trabajos se propone la siguiente regla de reparto.

> *Dividir el coste de construcción de la pista de aterrizaje correspondiente a los aviones de tipo más pequeño entre todas las operaciones.*
>
> *Dividir el incremento del coste de construcción de la pista de aterrizaje que supone habilitarla para aviones que son del segundo tipo más pequeño, entre todas las operaciones que requieren al menos una pista de aterrizaje con esa longitud.*
>
> *Proceder de este modo hasta llegar al incremento del coste que supone la ampliación de la pista para que los aviones de mayor tamaño puedan realizar una operación si se había construido adecuada a las necesidades de los aviones del segundo tipo más grande. En este caso, dividir el incremento del coste entre el número de operaciones que realizan los aviones de mayor tamaño.*

Una forma alternativa de abordar el problema es utilizar herramientas de Teoría de Juegos. A continuación exponemos el modelo de juego de coste TU propuesto por Littlechild y Owen (1973). El juego de coste TU asociado a un problema del aeropuerto está dado por (N, c), donde $N = \bigcup_{\ell \in M} N_\ell$ y la función característica está dada por $c(S) = d_{i_S}$, con $i_S = \text{máx}\{l \in M \mid N_\ell \cap S \neq \emptyset\}$. El valor que la función característica asigna a una colección de movimientos es el coste de construcción de una única pista con la mínima longitud necesaria para que puedan realizarse todos esos movimientos. A continuación presentamos un ejemplo.

Ejemplo 3.1. *Consideremos* 3 *tipos de aviones con costes* $d_1 = 10$, $d_2 = 16$, $d_3 = 20$ *y supongamos que el conjunto de operaciones de cada tipo de avión es* $N_1 = \{1\}$, $N_2 = \{2, 3\}$, *y* $N_3 = \{4\}$. *El juego del aeropuerto asociado está dado por* (N, c) *con* $N = \{1, 2, 3, 4\}$ *y la función característica está dada por* $c(\emptyset) = 0$ *y*

$$c(1) = 10,$$
$$c(2) = c(3) = c(1,2) = c(1,3) = c(2,3) = c(1,2,3) = 16,$$
$$c(4) = c(1,4) = c(2,4) = c(3,4) = c(1,2,4) = c(1,3,4) = c(2,3,4) = c(N) = 20.$$

El juego que se asocia a un problema del aeropuerto presenta propiedades de interés como muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.1. *El juego TU asociado a un juego del aeropuerto es subaditivo, monótono y cóncavo.*

El valor de Shapley del juego de coste TU asociado a un problema del aeropuerto se calcula de modo sencillo. La expresión ha sido obtenida por Littlechild y Owen (1973) y la presentamos a continuación.

Teorema 3.1. *Dado un problema del aeropuerto $(M, \{N_\ell\}_{\ell\in M}, d)$ y su juego de coste TU asociado (N, c), el valor de Shapley asigna a cada $j \in N$ el valor*

$$\Phi_j(N,c) = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{d_k - d_{k-1}}{r_k},$$

si $j \in N_\ell$ con $\ell \in M$, siendo $d_0 = 0$ y $r_k = \sum_{\ell=k}^{m} |N_\ell|$, para cada $k \in M$. Obsérvese que dado un tipo de avión $\ell \in M$, se verifica que las operaciones correspondientes pagan lo mismo, a saber

$$\Phi_i(N,c) = \Phi_j(N,c) = \varphi_\ell,$$

para cualquier $i, j \in N_\ell$. Además, el valor se puede calcular como

$$\varphi_\ell = \varphi_{\ell-1} + \frac{d_\ell - d_{\ell-1}}{r_\ell},$$

si $\ell \geq 1$, siendo $\varphi_0 = 0$ y $d_0 = 0$.

Pues bien, el valor de Shapley del juego asociado al problema del aeropuerto coincide con la regla de reparto del coste de construcción propuesta por Baker y Associates (1965) y Thompson (1971).

En el Ejemplo 3.1, se obtiene

$$\Phi_1(N,c) = 2.5,\ \ \Phi_2(N,c) = \Phi_3(N,c) = 2.5+6/3 = 4.5,\ \ \Phi_4(N,c) = 4.5+4 = 8.5.$$

En el caso del juego del aeropuerto el nucleolo puede calcularse de modo recursivo de acuerdo a la fórmula obtenida por Littlechild (1974).

Teorema 3.2. *Dado un problema del aeropuerto $(M, \{N_\ell\}_{\ell\in M}, d)$ y su juego de coste TU asociado (N, c), el nucleolo asigna a cada agente i el valor*

$$\nu_i = \gamma_k,\ \textit{para cualquier } i \in \textstyle\bigcup_{\ell_{k-1}<\ell\leq\ell_k} N_\ell, \textit{con } k = 1, \ldots, k',$$

donde γ_k está definido por

$$\gamma_k = \min\left\{ \min_{\ell_{k-1}+1\leq\ell\leq m-1} \left\{ \frac{d_\ell - d_{\ell_{k-1}} + \gamma_{k-1}}{s_\ell - s_{\ell_{k-1}} + 1} \right\}, \frac{d_m - d_{\ell_{k-1}} + \gamma_{k-1}}{s_m - s_{\ell_{k-1}}} \right\}, \quad (3.1)$$

siendo ℓ_k *el mayor índice donde se alcanza el mínimo en la Ecuación (3.1),* $d_0 = \gamma_0 = \ell_0 = s_0 = 0$*,* $s_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} |N_j|$ *y* $\ell_{k'} = m$*.*

Veamos en el Ejemplo 3.1 como se distribuye el coste de acuerdo con el nucleolo. Aplicando el procedimiento descrito en el Teorema 3.2 y tomando $d_0 = \gamma_0 = \ell_0 = s_0 = 0$, entonces,

$$\gamma_1 = \text{mín}\left\{\text{mín}\left\{\frac{10}{2}, \frac{16}{4}, \frac{16}{4}\right\}, \frac{20}{4}\right\} = 4.$$

Por tanto, $\ell_1 = 2$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 4$. Además, $\gamma_2 = \frac{20-16+4}{4-3} = 8$, $\ell_2 = 4$. Por tanto, el nucleolo está dado por $\nu(N, c) = (4, 4, 4, 8)$.

Obsérvese que no es necesario describir la función característica para obtener el reparto del coste que proponen el valor de Shapley y el nucleolo. Pueden obtenerse directamente a partir de los parámetros del problema inicial. De hecho el reparto que propone el valor de Shapley coincide con el reparto que proponen Baker y Associates (1965) y Thompson (1971) y con la regla secuencial de contribuciones iguales (Moulin y Shenker, 1992). El reparto que propone el nucleolo coincide con el reparto que propone la regla maximizadora del exceso.

El ejemplo anterior muestra que el reparto que propone el valor de Shapley y el reparto que propone el nucleolo son diferentes. El estudio de las propiedades que verifica una regla de reparto de costes es un tema de interés ya que permite realizar comparaciones entre reglas de reparto. En el trabajo de Thomson (2007) aparece una revisión amplia de reglas de reparto de coste y de las propiedades utilizadas para su caracterización en el contexto de los problemas del aeropuerto.

4. El problema de autopista

Una generalización de los problemas del aeropuerto son los problemas de autopista definidos en Mosquera y Zarzuelo (2009). A continuación describiremos las principales características de estos problemas y cómo se podrían abordar.

Como ya se ha indicado en la introducción, en una autopista existen distintos puntos de entrada y salida. Los distintos *viajes* que se pueden realizar en la autopista están delimitados por un punto de entrada y un punto de salida. Además, estos puntos de entrada, considerados "ordenadamente", dividen a la autopista en un conjunto de *tramos* indivisibles. Con el fin de sufragar los distintos costes derivados de la construcción de la autopista (entre otros costes), la concesionaria de la autopista cobra una *tasa* o *peaje* por cada viaje que se realiza dentro de la autopista. Uno de los muchos problemas a estudiar es cómo asignar esta tasa. En Mosquera y Zarzuelo (2009) se intenta dar respuesta a este problema utilizando herramientas de Teoría de Juegos Cooperativos.

Para simplificar el problema vamos a suponer que la autopista es lineal, es decir, existen dos puntos extremos unidos por la autopista pero no existen ramificaciones. Asumiremos también que la dirección en la que se realizan los viajes no es importante.

Como ejemplo de una autopista en estas condiciones tomemos el trozo de la autopista AP-9 que une A Coruña con Vigo, y por simplicidad tomemos los puntos de entrada y salida que se marcan en la siguiente figura.

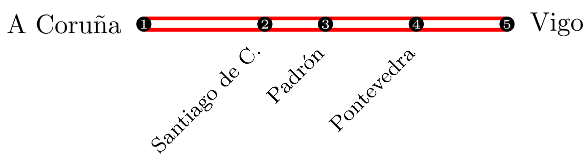

Figura 1: Autopista A Coruña-Vigo.

Un *problema de autopista* se puede representar por una 4-tupla (N, M, C, T) dónde N es el conjunto de los distintos *viajes* que se realizan por la autopista, $M = \{t_1, \ldots, t_m\}$ es el conjunto completamente ordenado de *tramos* de los que consta la autopista $(t_1 \leq \cdots \leq t_m)$, $C : M \longrightarrow \mathbb{R}_{++}$ es la *función de coste* que representa el coste de sufragar cada tramo y $T : N \longrightarrow 2^M$ es una función que a cada viaje le asigna los tramos de autopista que realiza, de tal forma que cada viaje utiliza un conjunto de tramos de autopista consecutivos y cada tramo de autopista es usado por al menos 2 viajes.

El problema que surge es: ¿cómo deberíamos asignar los peajes a los viajes? Una primera aproximación a este problema podría ser utilizando:

1. un *reparto igualitario*: el coste de cada tramo se reparte igualitariamente entre el número de viajes que lo usan, al igual que Baker y Associates (1965) y Thompson (1971) proponen para problemas del aeropuerto, o

2. un *reparto proporcional*: cada viaje tiene que pagar una parte del coste total que es proporcional al coste que tendría que pagar si ese fuese el único viaje de la autopista.

Sin embargo, como ya se ha mencionado, la Teoría de Juegos proporciona herramientas para resolver este problema de reparto de costes. Asociado a cada problema de autopista (N, M, C, T) se define el *juego de autopista* como el juego de coste TU (N, c) con

$$c(S) = \sum_{t \in T(S)} C(t) \qquad \text{para cada } S \subseteq N,$$

donde $T(S) = \{t \in M \mid t \in T(i) \text{ para algún } i \in S\}$ es el conjunto de tramos que utilizan los viajes de la coalición S. Así, $c(S)$ representa el coste que la coalición de viajes S tiene que pagar si la autopista está formada sólo por los tramos de $T(S)$ y esos viajes son los únicos que se realizan sobre esa parte de la autopista.

La siguiente proposición muestra algunas de las propiedades de esta clase de juegos.

Proposición 4.1. *Sea* (N, M, C, T) *un problema de autopista. El juego de autopista asociado* (N, c) *es subaditivo, monótono y cóncavo.*

El siguiente resultado nos indica que, para el caso de los juegos de autopista, tanto el valor de Shapley como el valor de compromiso tienen interpretaciones intuitivas y sus expresiones son sencillas, evitando así su complejidad computacional. Estas reglas de reparto coinciden con las reglas de reparto definidas directamente sobre el problema de autopista.

Teorema 4.1. *Dado un problema de autopista* (N, M, C, T) *y su juego de autopista asociado* (N, c)*,*

(i) el reparto igualitario de (N, M, C, T) *coincide con el valor de Shapley de* (N, c)*,*

(ii) el reparto proporcional de (N, M, C, T) *coincide con el valor de compromiso de* (N, c)*.*

Veamos que ocurre con el nucleolo. Aunque su cálculo no siempre es sencillo, existen clases de juegos para las que se puede encontrar un procedimiento simple que nos proporcione su valor. Este es el caso de la clase de juegos de autopista. Otro aspecto motivador para el uso del nucleolo como regla de reparto, es que esta regla se aplica en un caso real de autopista bastante vinculado al nuestro (véase Luskin et al., 2001).

A continuación presentamos un algoritmo para el cálculo del nucleolo. Para simplificar la exposición del algoritmo vamos a suponer que existe un viaje desde un extremo al otro de la autopista, es decir, existe $i \in N$ tal que $T(i) = M$. Decimos que una coalición $S \subset N$ es *relevante* si existen $a_S, b_S \in M$ tales que

$$S = \{i \in N \mid a_S \leq t \leq b_S \text{ para cada } t \in T(i)\}.$$

Algoritmo para el cálculo del nucleolo

Sea (N, M, C, T) un problema de autopista tal que $|N| \geq 3$ y verificando todas las suposiciones hechas. Sea (N, c) el juego de autopista asociado. El algoritmo que se propone es el siguiente:

Paso 0: Establecer $(N^0, M^0, C^0, T^0) = (N, M, C, T)$ y $\ell = 0$.

Paso 1: Buscar el conjunto de coaliciones relevantes $\mathcal{RC}^\ell$.

Paso 2: Calcular:

$$\begin{aligned}
\gamma^\ell(S) &= \frac{\sum_{a_S^\ell \leq t \leq b_S^\ell} C^\ell(t)}{|S| + 1} \qquad \text{para toda } S \in \mathcal{RC}^\ell \\
\delta^\ell &= \frac{\sum_{t \in M^\ell} C^\ell(t)}{|N^\ell|} \\
\lambda^\ell &= \min\{\delta^\ell, \min_{S \in \mathcal{RC}^\ell} \gamma^\ell(S)\}.
\end{aligned}$$

Paso 3: Si $\boldsymbol{\lambda^\ell = \delta^\ell}$, entonces el nucleolo es $\nu_i = \lambda$ para todo $i \in N^\ell$. El algoritmo se acaba.

Si $\boldsymbol{\lambda^\ell \neq \delta^\ell}$, entonces $\nu_i = \lambda$ para $i \in Z^\ell = \bigcup_{S \in \mathcal{RC}^\ell | \ \gamma^\ell(S) = \lambda^\ell} S$.
Definir el problema de autopista reducido $(N^{\ell+1}, M^{\ell+1}, C^{\ell+1}, T^{\ell+1})$.
Establecer $\ell = \ell + 1$ e ir al Paso 1.

Para ver en detalle como se obtiene el problema de autopista reducido véase Mosquera y Zarzuelo (2009). A grandes rasgos, los viajes de Z^ℓ pagan un peaje igual a λ y abandonan la autopista. En el problema reducido, los tramos que no están en $T(Z^\ell)$ no se ven afectados. Sin embargo, la suma de los costes de los tramos de $T(Z^\ell)$ se reduce a $\lambda = C(Z^\ell) - |Z^\ell|\lambda$. Este coste tiene que ser redistribuido entre los viajes restantes que utilizan alguno de los tramos de $T(Z^\ell)$. Esto conduce a una redefinición de los tramos dentro de $T(Z^\ell)$ (quizás los nuevos tramos sean completamente diferentes a los tramos originales). En términos de Teoría de Juegos, el juego asociado a este problema de autopista reducido se corresponde con el juego reducido del juego de autopista original (Davis y Maschler, 1965).

Nótese que, si se aplica este algoritmo a un problema de aeropuerto, se obtiene el procedimiento iterativo descrito en el Teorema 3.2.

Al igual que ocurre con los juegos del aeropuerto, no es necesario conocer la función característica del juego para calcular el valor de Shapley, el valor de compromiso y el nucleolo.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo económico del *Ministerio de Innovación y Ciencia* a través del proyecto ECO2008-03484-C02-02/ECO.

Referencias

[1] Aadland D., y Kolpin V. (1998). Shared irrigation costs: an empiral and axiomatic analysis. *Math. Soc. Sci.*, **35**, 203-218.

[2] Baker M.J., y Associates (1965). Runway Cost Impact Study. Informe técnico. Association of Local Transport Airlines. Jackson (MIS).

[3] Castaño-Pardo A., y García-Díaz A. (1995). Highway cost allocation: An application of the theory of nonatomic games. *Transport. Res.*, **29**, 187-203.

[4] Çiftçi B., Borm P., y Hamers H. (2008). A note on the balancedness and the concavity of highway games. *CentER Discussion Paper Series*, **2008-29**.

[5] Davis M., y Maschler M. (1965). The kernel of a cooperative game. *Nav. Res. Logist. Q*, **12**, 223-259.

[6] Fragnelli V., García-Jurado I., Norde H., Patrone F., y Tijs S. (2000) How to share railways infrastructure costs? En: *Game Practice: Contributions from Applied Game Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

[7] Ichiishi T. (1981). Super-modularity: Applications to convex games and to the greedy algorithm for LP. *J. Econ. Theory*, **25**, 283-286.

[8] Littlechild S.C. (1974). A simple expression for the nucleolus in a special case. *Int. J. Game Theory*, **3**, 21-29.

[9] Littlechild S.C., y Owen G. (1973). A simple expression of the Shapley value in a special case. *Manage. Sci.*, **20**, 370-372.

[10] Luskin D., García-Díaz A., Lee D., Zhang Z., y Walton C.M. (2001). A framework for the texas highway cost allocation study. Informe técnico. *Tech. Rep. 0-1801-1,* Center for Transportation Research, the University of Texas at Austin, and Texas Transportation Institute, Texas A&M University System.

[11] Makrigeorgis C.N. (1991). Development of an optimal durability-based highway cost allocation model. En: *Ph.D. dissertation*, Department of Industrial Engineering, Texas A&M University, College Station, TX.

[12] Maschler M. (1992). The bargaining set, kernel, and nucleolus. En: *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Elsevier, Amsterdam.

[13] Moretti S., y Patrone F. (2008). Transversality of the Shapley value. *TOP*, **16**, 1-41.

[14] Mosquera M.A., y Zarzuelo J.M. (2009). Sharing costs in highways: A game theoretic approach. *Mimeo.*

[15] Moulin H., y Shenker S. (1992). Serial cost sharing. *Econometrica*, **60**, 1009-1037.

[16] Norde H., Fragnelli V., García-Jurado I., Patrone F., y Tijs S. (2002). Balancedness of infrastructure cost games. *Eur. J. Oper. Res.*, **136**, 635-654.

[17] Peleg B., y Sudholter P. (2003). *Introduction to the Theory of Cooperative Games*, Kluwer Academic Publisher, Boston.

[18] Schmeidler D. (1969). The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM J. Appl. Math.*, **17**, 1163-1170.

[19] Shapley L.S. (1953). A value for n-person games. En: *Contributions to the Theory of Games*, vol. 2, Princeton University Press, New York.

[20] Shapley L.S. (1971). Cores of convex games. *Int. J. Game Theory*, **1**, 11-26.

[21] Thompson G. F. (1971). Airport Costs and Pricing. PhD thesis, University of Birmingham.

[22] Thomson W. (2007). Cost allocation and airport problems. Informe técnico, Working paper 538, University of Rochester.

[23] Tijs S.H. (1981). Bounds for the core and the τ-value. En: *Game Theory and Mathematical Economics*, North-Holland Publising Company, Amsterdam.

[24] Villarreal-Cavazos A., y García-Díaz A. (1985). Development and application of new highway cost allocation procedures. *Transport. Res. Rec.*, **1009**, 34-45.

[25] Winter E. (2002). The Shapley value. En: *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, vol. 3, Elsevier, Amsterdam.

Acerca de los autores

M. Gloria Fiestras Janeiro es profesora Titular de Universidad del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Vigo. Sus líneas de investigación son el estudio de conceptos de solución en el ámbito de juegos cooperativos y en el ámbito de juegos no cooperativos. Tiene publicados varios artículos en revistas de impacto internacional en las áreas de Investigación Operativa y Economía y ha participado en diversos congresos nacionales e internacionales.

Manuel A. Mosquera Rodríguez es profesor contratado en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Vigo. Sus principales líneas de investigación son teoría de juegos, reparto de costes y problemas de decisión con incertidumbre. Tiene publicados varios artículos en revistas de impacto internacional en las áreas de Investigación Operativa y Economía y ha participado en diversos congresos nacionales e internacionales.