EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN VECTORIAL CONCEPTOS DE OPTIMALIDAD

Vicente Novo Sanjurjo
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Nacional de Educación a Distancia

1. Introducción

La necesidad de resolver problemas de optimización se presenta frecuentemente en cualquier actividad técnica o científica. El creciente y constante desarrollo tecnológico ha producido un considerable aumento en el número y complejidad de este tipo de problemas, lo que ha motivado el estudio de teorías matemáticas conducentes a su resolución (un buen ejemplo es la teoría de subdiferenciación de funcionales convexos).

Esta necesidad de marcos cada vez más generales ha conducido a los problemas de Optimización Vectorial. Las aplicaciones de la Optimización Vectorial son muy diversas y cubren desde las más naturales a la Programación Vectorial y Multiobjetivo (o multicriterio), a otras muchas en Estadística (teoría de test de hipótesis, soluciones bayesianas, matrices de covarianza minimales), Teoría de Juegos (juegos cooperativos), Análisis Funcional (teorema de Hahn-Banach, lema de Bishop-Phelps, principios variacionales tipo Ekeland) etc. (véase [18]). En los últimos años se ha empezado a trabajar en problemas de optimización con multifunciones y en el desarrollo de una teoría de optimización de conjuntos.

Esta nota, que sólo pretende ser una breve introducción a la Optimización Vectorial, se estructura en tres secciones. En la sección 2 se formulan los problemas (para el caso de minimales), con especial atención a los programas vectoriales y multiobjetivo, y se comentan los antecedentes. En la sección 3 se presentan los conceptos de optimalidad y una muestra de resultados básicos en este campo.

2. Formulación del problema y antecedentes

En un problema de optimización vectorial (POV) se estudian los elementos minimales de un subconjunto no vacío E de un espacio vectorial parcialmente ordenado Y. Nótese que, en principio, no se requiere estructura topológica para formular el problema, de forma que, una línea moderna de investigación consiste en sustituir los conceptos topológicos por conceptos algebraicos, por ejemplo, el interior topológico se sustituye por el interior algebraico o core (véase [1] y [18]).

La estructura de preferencia en Y se define por medio de un cono como sigue. Sea $D \subset Y$ un cono ($\alpha D \subset D$, $\forall \alpha \geq 0$), y consideremos la siguiente relación binaria en Y. Dados $x, y \in Y$,

$$y \leq x \Leftrightarrow y - x \in -D.$$

Se dice que D es puntiagudo (pointed) si $D \cap (-D) = \{0\}$, que es agudo si cl$D$ es puntiagudo y, en espacios vectoriales topológicos (e.v.t), que es sólido si int$D \neq \emptyset$.

Si $D \subset Y$ es un cono convexo y $\leq$ la relación binaria definida anteriormente, se verifica que:
(i) $\leq$ es reflexiva,
(ii) $\leq$ es transitiva,
(iii) $\leq$ es compatible con la estructura vectorial de Y (para todo $x, y, z \in Y$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}_+$, se verifica que $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ y $\alpha x \leq \alpha y$),
(iv) si además D es puntiagudo, entonces $\leq$ es antisimétrica.

En consecuencia, un cono convexo induce en Y un preorden parcial, compatible con la estructura vectorial, que nos permitirá definir los conceptos de optimalidad en optimización vectorial. Nótese que si D es puntiagudo se tiene un orden parcial, y que la diferencia esencial con los problemas escalares es que existen elementos que no son comparables.

Las aplicaciones más naturales de las técnicas de optimización vectorial se encuentran en la resolución de los programas vectoriales que se formulan como sigue: Sean X, Y, W y Z espacios vectoriales, $f : X \to Y$, $g : X \to W$, $h : X \to Z$, $M \subset X$, y los espacios Y y W dotados de un preorden parcial definido, respectivamente, por los conos convexos $D \subset Y$ y $P \subset W$. Un programa vectorial (PV) es:

$$\text{Min}\,\{f(x) :\ x \in M\},$$

y se tiene un programa vectorial con restricciones (PVR) si $S = \{x \in X : g(x) \in -P,\, h(x) = 0\}$, $Q \subset X$ y $M = S \cap Q$. Este programa es multiobjetivo (PMO) si $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^p$, $W = \mathbb{R}^m$ y $Z = \mathbb{R}^r$, en cuyo caso se puede trabajar con las funciones componentes de f, g y h que denotaremos, respectivamente, por f_i con $i \in I = \{1, \ldots, p\}$, g_j con $j \in J = \{1, \ldots, m\}$ y h_k con $k \in K = \{1, \ldots, r\}$. Si en el PMO se considera el orden de las componentes ($D = \mathbb{R}^p_+$), se tiene el problema multiobjetivo Pareto y si $p = 1$ se tiene un programa escalar.

En los últimos años se está empezando a trabajar en otra extensión de este tipo de problemas, los programas vectoriales con multifunciones (la función objetivo valora en partes de Y que denotamos por 2^Y). Sean $F : X \to 2^Y$ y $G : X \to 2^W$.

Programa vectorial con multifunciones:

General (PVM): $\text{Min}\{F(x) : x \in M\}$.

Con restricciones (PVMR): si $M = S \cap Q$ y $S = \{x \in X : G(x) \cap (-P) \neq \emptyset\}$.

En este tipo de problemas con multifunciones aparece una dificultad añadida al perderse la estructura de espacio vectorial en el espacio objetivo.

Tradicionalmente, en las ciencias, las buenas decisiones se basaban en un único criterio, sin embargo, en campos como la política, la economía, los negocios, las ciencias sociales, la ingeniería o la industria es habitual considerar múltiples aspiraciones u objetivos, a veces enfrentados, con lo que se hace necesario el estudio de técnicas de decisión basadas en un número finito de objetivos (programación multiobjetivo) o incluso en un número no finito (programación vectorial). El gran interés que ha despertado este campo de trabajo en las últimas décadas queda reflejado en el trabajo de White [32] que da una relación de más de 500 trabajos que describen diferentes aplicaciones en el caso multiobjetivo.

El primer tratado de un problema de optimización multiobjetivo fue dado por el economista político F.Y. Edgeworth (1845-1926) en su obra *Mathematical Psychics* (1881). Otro economista, V.F.D. Pareto (1848-1923), en su obra *Manuale di Economia Política* (1896), extendió la teoría y proporcionó condiciones necesarias para lo que hoy denominamos óptimos de Pareto. El concepto de multicriterio también fue tratado por otros autores en el marco de la teoría de juegos, es el caso de varios trabajos de Borel en los años 20, de Von Neumann o de la obra clásica de éste último y Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior* (1943). Sin embargo, el primer tratamiento matemático formal de un problema de programación vectorial en espacios de dimensión finita se encuentra incluido en el célebre trabajo sobre programación no lineal de Kuhn y Tucker [23] de 1951, y el primero en el caso general de los programas vectoriales fue dado por otro economista L. Hurwitz en 1958.

El primer resultado sobre condiciones de optimalidad, para un programa multiobjetivo Pareto con restricciones de desigualdad, fue dado por Kuhn y Tucker ([23], teorema 4) utilizando el lema de Farkas. Es obligado indicar que este resultado ya había sido establecido por Karush, en 1939, en su tesis doctoral bajo la dirección de Graves. La razón de su falta de difusión es que, en aquel momento, el centro de interés era el cálculo de variaciones y no se podía prever el potencial de aplicaciones que tendría. Sin embargo, el trabajo de Kuhn y Tucker tuvo un gran impacto ya que se publicó después del desarrollo por Dantzig del algoritmo simplex, lo que había despertado gran interés por los programas con restricciones de desigualdad.

A partir del trabajo de Kuhn y Tucker, se ha tratado de extender sus resultados a situaciones más generales, bien incluyendo otro tipo de restricciones o espacios más generales, o bien relajando las condiciones de regularidad o el tipo de óptimo. El desarrollo, en paralelo, de las diferentes teorías de diferenciación generalizada, ha permitido tratar, en las últimas décadas, problemas de programación escalar con funciones o condiciones no diferenciables que, en los últimos años, se han extendido a los programas vectoriales.

Formulado el problema, las cuestiones más relevantes son:

1. ¿Bajo qué condiciones podemos asegurar la existencia de solución? Teoremas de existencia de minimales.
2. ¿Qué condiciones (necesarias y/o suficientes) verifican las soluciones? Condiciones de optimalidad.
3. ¿Cómo podemos determinar estas soluciones cuando existan? Métodos y técnicas de búsqueda de soluciones.

3. Conceptos de optimalidad o eficiencia

En esta sección se introducen los diferentes conceptos de solución minimal o eficiente de un problema de optimización vectorial y se comentan algunas propiedades de estas soluciones. Se dan las definiciones para el problema POV ya que luego se trasladan de forma inmediata a los programas vectoriales haciendo $E = f(M)$. En los problemas de optimización vectorial se han ido considerando diferentes conceptos de optimalidad como son los de elementos minimales, minimales ideales, propiamente minimales, débilmente minimales, estrictamente minimales o ε-minimales.

Definición 3.1. *$y_0 \in E$ es minimal ideal de E si $y_0 \leq y$ para todo $y \in E$.*

Definición 3.2. *$y_0 \in E$ es eficiente o minimal de E si no existe $y \in E$, $y \neq y_0$, tal que $y \leq y_0$. Se denota $y_0 \in \mathrm{Min}(E, D)$.*

Esta definición es equivalente a las siguientes:

(i) no existe $y \in E$, tal que $y_0 \in y + D \setminus \{0\}$.

(ii) $(E - y_0) \cap (-D) = \{0\}$.

En la definición conjuntista (ii) aparece claramente visible que los teoremas de separación de conjuntos y los teoremas de alternativas serán herramientas básicas para obtener las condiciones de optimalidad.

Si Y es un e.v.t. y la condición anterior se verifica en un entorno del punto, se tiene el concepto de solución minimal o eficiente local, es decir, $y_0 \in E$ es minimal local de E, si existe un entorno V de y_0, tal que $((E \cap V) - y_0) \cap (-D) = \{0\}$. Se denota $y_0 \in \mathrm{Minl}(E, D)$.

Si se sustituye D por su interior (en este caso se supone D sólido), se tienen los conceptos de eficiencia débil.

Definición 3.3. (i) *$y_0 \in E$ es minimal débil de E si $(E - y_0) \cap (-\mathrm{int}D) = \emptyset$. Se denota $y_0 \in \mathrm{Mind}(E, D)$.*
(ii) *$y_0 \in E$ es minimal local débil de E si existe un entorno V de y_0, tal que $((E \cap V) - y_0) \cap (-\mathrm{int}D) = \emptyset$. Se denota $y_0 \in \mathrm{Minld}(E, D)$.*

Nótese que si D no es sólido, todo elemento de E es minimal débil, con lo que este concepto carece de interés para conos que no sean sólidos.

Uno de los problemas que presenta la optimización vectorial es que, a menudo, el conjunto de soluciones es muy amplio, lo que ha llevado a muchos investigadores a introducir los diferentes conceptos de eficiencia propia con objeto de seleccionar algunas de las soluciones eficientes. La primera noción de eficiencia propia fue introducida por Kuhn y Tucker [23] y modificada posteriormente por Geoffrion [8]. Otros autores han introducido otros conceptos de eficiencia propia, tal vez los más consolidados sean los de Benson [2], Borwein [3] y Henig [14]. Se trata de eliminar soluciones eficientes con propiedades no deseables, es decir, de alguna manera depurar el conjunto de soluciones eficientes, seleccionando sólo algunas que presenten mejores propiedades, en algún sentido a precisar.

Definición 3.4 (Geoffrion [8]). *$x_0 \in M$ es propiamente eficiente del PMO Pareto si es eficiente y existe $k > 0$ tal que para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$ y todo $x \in M$ que verifique que $f_i(x) < f_i(x_0)$, existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ tal que*

$f_j(x_0) < f_j(x), \quad \frac{f_i(x_0) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(x_0)} \leq k.$

Definición 3.5. *$y_0 \in E$ es propiamente eficiente en el sentido de*

(i) *Borwein* [3] *si*
$T(E + D, y_0) \cap (-D) = \{0\}$.

(ii) *Benson* [2] *si*
$\mathrm{clcono}(E + D - y_0) \cap (-D) = \{0\}$.

(iii) *Henig* [14] *si*
$x_0 \in \mathrm{Min}(E, D')$ para algún cono convexo D' tal que $D \setminus \{0\} \subset \mathrm{int}D'$.

En la definición de Geoffrion la idea es que, si al pasar de una solución a otra se gana un poco en un objetivo a costa de perder mucho en los otros, no parece adecuado aceptar la segunda solución frente a la primera. El concepto de Geoffrion es válido para el caso multiobjetivo. En las definiciones de Borwein y Benson, ya válidas para el caso vectorial, se sustituye el conjunto a estudio por algún conjunto que lo aproxime. Benson utiliza la clausura del cono generado y Borwein considera el cono tangente (de Bouligand) en espacios normados dado por: $T(E, y_0) = \{y \in Y : \exists t_n \to 0^+, \exists y_n \in E \text{ tales que } \lim_{n\to\infty} t_n^{-1}(y_n - y_0) = y\}$.

Se demuestra que toda solución propia Benson es propia Borwein y que estos conceptos coinciden para conjuntos convexos. Henig considera un cono convexo que contenga a $D \setminus \{0\}$ en su interior. Para un estudio detallado de estos conceptos puede verse, por ejemplo, [30] y [7].

Si denotamos por $\mathrm{Minp}(E, D)$ las soluciones propias, en cualquier sentido, se tiene que:

$\mathrm{Minp}(E, D) \subset \mathrm{Min}(E, D) \subset \mathrm{Mind}(E, D)$.

Un concepto muy utilizado en optimización escalar es el de mínimo estricto de orden k (véase Hestenes [17]) que ha sido extendido por Jiménez [19] a los programas multiobjetivo y vectoriales. En este caso, este concepto, adquiere un especial interés ya que se puede considerar como un nuevo concepto de eficiencia propia. En Jiménez, Novo [20, 21], se desarrolla una teoría de minimales estrictos de orden k para programas vectoriales.

Definición 3.6 (Jiménez [19]). *Sea $k \geq 1$ un número entero. $x_0 \in M$ es un minimal local (resp. global) estricto de orden k del problema PV en espacios normados, si existen una constante $\alpha > 0$ y un entorno U de x_0 (resp. $U = X$) tales que, para todo $x \in M \cap U \setminus \{x_0\}$:*

$(f(x) + D) \cap B(f(x_0), \alpha\|x - x_0\|^k) = \emptyset$.

En la actualidad está ampliamente reconocido que el concepto de ε-eficiencia o solución aproximada ocupa un papel importante, tanto en el desarrollo teórico de la optimización vectorial como en sus aplicaciones. En los problemas de optimización escalar las soluciones ε-óptimas tienen un significado claro, ya que se trata de puntos $x_0 \in M$ que verifican la siguiente condición ($\varepsilon \geq 0$)

$\inf_{x \in M}\{f(x)\} \leq f(x_0) \leq \inf_{x \in M}\{f(x)\} + \varepsilon$.

En optimización vectorial, la noción de solución aproximada o ε-eficiente se ha definido de diferentes formas que no son equivalentes. Sean $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $q \in D\backslash\{0\}$ y $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente ($y_1, y_2 \in Y$, $y_1 - y_2 \in -D\backslash\{0\} \Rightarrow \varphi(y_1) < \varphi(y_2)$).

Definición 3.7. *Se considera el problema PV.*

(i) (Kutateladze [25]). *$x_0 \in M$ es una solución ε-eficiente si $(f(M) - (f(x_0) - \varepsilon q)) \cap (-D\backslash\{0\}) = \emptyset$.*

(ii) (Tanaka [31]). *Consideremos que Y es un espacio normado y denotemos por B la bola abierta unidad en Y. $x_0 \in M$ es una solución ε-eficiente si $(f(M) - f(x_0)) \cap (-D) \subset \varepsilon B$.*

(iii) (Dentcheva y Helbig [6]). *$x_0 \in M$ es una solución ε-eficiente si $x \in M$, $f(x) - f(x_0) \in -D \Rightarrow \varphi(f(x_0)) \leq \varphi(f(x) + \varepsilon q)$.*

En Gutiérrez et al. [11, 12] se introduce una noción que unifica los diferentes conceptos de solución aproximada en optimización vectorial.

El tratamiento de los problemas de optimización vectorial con multifunciones se ha abordado por medio de dos criterios, el criterio vectorial que consiste en reducir el problema a uno de optimización vectorial, y el criterio conjuntista que parece el más natural y consiste en utilizar ordenes conjuntistas en el conjunto de partes de Y.

Criterio vectorial: Se estudian los puntos eficientes del conjunto $F(M) = \cup_{x \in M} F(x)$ con respecto al preorden parcial definido en Y.

Criterio conjuntista: Se estudian los conjuntos eficientes de la familia $\{F(x) \colon x \in M\}$ con respecto a un preorden parcial $\preceq$, definido entre subconjuntos no vacíos de Y, es decir, se utilizan preordenes en el conjunto de partes de Y. Por ejemplo, dados $A, B \subset Y$ no vacíos $A \preceq B \Leftrightarrow B \subset A + D$ (véase, por ejemplo, [24] y [16]).

Por último y una vez definidos los conceptos de optimalidad, aunque sea de forma incompleta, se presenta una muestra de resultados básicos referidos a las tres líneas de trabajo indicadas anteriormente: Condiciones de existencia o teoremas de Weierstrass vectoriales (teoremas 3.8 y 3.9), condiciones de optimalidad (teorema 3.10) y a una de las técnicas usuales de búsqueda de soluciones como es la técnica de escalarización (teorema 3.11).

Sean Y un espacio vectorial topológico separado y $E \subset Y$. Dado $y_0 \in E$, llamaremos sección de E en y_0 al conjunto $E_{y_0} = \{y \in E : \ y_0 - y \in D\}$.

Teorema 3.8 (Borwein [4]). *Sea D un cono convexo y cerrado. Si existe $y_0 \in E$ tal que E_{y_0} es no vacía y compacta, entonces $\mathrm{Min}(E, D)$ es no vacío.*

E es D-semicompacto si cualquier recubrimiento de E de la forma $\{(y_\alpha - \mathrm{cl}D)^c : \alpha \in I, y_\alpha \in E\}$ admite un subrecubrimiento finito.

Teorema 3.9 (Corley [5]). *Si D es agudo y E es D-semicompacto, entonces $\mathrm{Min}(E, D)$ es no vacío.*

Naturalmente que en el caso de los programas vectoriales se han de imponer condiciones al conjunto factible y a la función objetivo. Un estudio bastante completo sobre condiciones de existencia de minimales puede verse en [26] y [10].

Como muestra de las condiciones de optimalidad, se enuncia una regla de multiplicadores para un programa multiobjetivo con restricciones de igualdad y de desigualdad y funciones de clase C^1.

Teorema 3.10. *Si $x_0 \in M$ es un mínimo local débil de PMOR Pareto, entonces existen $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r$ tales que*

$(\lambda, \mu) \geq 0$,

$\mu_j g_j(x_0) = 0 \quad j = 1, \ldots, m$,

$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla f_i(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(x_0) + \sum_{k=1}^{r} \nu_k \nabla h_k(x_0) = 0$.

Si $(\lambda, \mu, \nu) \neq 0$ la regla es de tipo Fritz John, si $\lambda \neq 0$ es de tipo Kuhn-Tucker y si $\lambda > 0$ es de tipo Kuhn-Tucker fuerte. En 1788, Lagrange obtuvo la primera regla de multiplicadores sólo con restricciones de igualdad para el caso escalar, y casi 200 años después, en 1967, Mangasarian y Fromovitz [28] establecen reglas de multiplicadores, tanto de tipo Fritz John como de tipo Kuhn-Tucker, para el problema multiobjetivo con ambos tipos de restricciones. En los últimos años estas reglas de multiplicadores se han extendido al caso vectorial y con condiciones de diferenciabilidad más débiles. Otro tema de gran interés, en este campo, es el estudio de las cualificaciones de restricciones o condiciones de regularidad que se han de imponer para obtener reglas de tipo Kuhn-Tucker (véase, por ejemplo, [27] y [9]).

En relación con las técnicas de resolución de los programas vectoriales, sin duda la técnica de escalarización ocupa el lugar central. Esta técnica consiste en estudiar los elementos minimales del PV por medio de una familia de problemas escalares asociados a PV como sigue. Dado un PV y $\varphi : Y \to \mathbb{R}$, al variar φ se tiene la familia de programas escalares

$$\mathrm{Min}\{(\varphi \circ f)(x) : x \in M\}.$$

El problema está en analizar el tipo de funcionales de escalarización φ que nos permitan asegurar que una solución del programa escalar es solución (de algún tipo) del PV, y viceversa. Un resultado clásico en el caso multiobjetivo es el siguiente.

Teorema 3.11. *Consideremos el PMO Pareto y asociado a éste la familia de problemas escalares*

$$\mathrm{Min}\left\{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i(x) : x \in M\right\}$$

Cada solución de este programa escalar, con $\alpha_1, \ldots, \alpha_p > 0$, *es propiamente minimal Geoffrion del PMO.*

En general, en el caso de los programas vectoriales, se ha empezado trabajando con escalarizaciones definidas por elementos del polar positivo del cono de orden, pero también se está trabajando con escalarizaciones no lineales y no convexas dadas por otro tipo de funcionales, como pueden ser los funcionales de tipo max o algunas generalizaciones del funcional de Minkowski que han de verificar alguna propiedad de monotonía generalizada (véase, por ejemplo, [13], [16]).

4. Conclusiones

En esta nota se presenta una breve introducción a la Optimización Vectorial, campo en fuerte desarrollo en la actualidad, debido al interés teórico del problema y sobre todo a su gran potencial de aplicaciones. En este momento se sigue trabajando en el estudio de condiciones de optimalidad para problemas de optimización vectorial, tanto diferenciables como no diferenciables, utilizando derivadas generalizadas o conjuntos aproximadores [22] y, a menudo, con algún tipo de convexidad generalizada [1], y se ha iniciado el estudio de las nociones de solución de un programa vectorial con multifunciones [15] y de los problemas de optimización de conjuntos [24].

Agradecimientos: Agradezco a los profesores B. Jiménez, C. Gutiérrez y E. Hernández la revisión de este trabajo y sus comentarios y sugerencias. El trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología a través del proyecto BFM2003-02194.

Referencias

[1] Adán M., Novo V. (2003). Weak efficiency in vector programming using a closure of algebraic type under cone-convexlikeness. *European J. Oper. Res.*, **149**, 641-653.

[2] Benson H.P. (1979). An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones. *J. Math. Anal. Appl.*, **71**, 232-241.

[3] Borwein J.M. (1977). Proper efficient points for maximization with respect to cones. *SIAM J. Control Optim.*, **15**, 57-63.

[4] Borwein J.M. (1983). On the existence of Pareto efficient points. *Math. Oper. Res.*, **8**, 64-73.

[5] Corley H.W. (1980). An existence result for maximization with respect to cones. *J. Optim. Theory Appl.*, **31**, 277-281.

[6] Dentcheva D., Helbig S. (1996). On variational principles, level sets, well-posedness, and ε-solutions in vector optimization. *J. Optim. Theory Appl.*, **89**, 325-349.

[7] Ehrgott M. (2005). *Multicriteria Optimization*, Second Edition, Springer, New York.

[8] Geoffrion A.M. (1968). Proper efficiency and the theory of vector maximization. *J. Math. Anal. Appl.*, **22**, 618-630.

[9] Giorgi G., Jiménez B., Novo V. (2004). On constraint qualifications in directionally differentiable multiobjective optimization problems. *RAIRO Oper. Res.*, **38**, 255-274.

[10] Göpfert A., Riahi H., Tammer C., Zălinescu C. (2003). *Variational Methods in Partially Ordered Spaces.* CMS Books in Mathematics, Springer, New York.

[11] Gutiérrez C., Jiménez B., Novo V. (2006). On approximate efficiency in multiobjective programming. *Math. Methods Oper. Res.*, **64**, 165-185.

[12] Gutiérrez C., Jiménez B., Novo V. (2006). A unified approach and optimality conditions for appoximate solutions of vector optimization problems. *SIAM J. Optim.* In press.

[13] Gutiérrez C., Jiménez B., Novo V. (2006). On approximate solutions in vector optimization problems via scalarization. *Comput. Optim. Appl.* In press.

[14] Henig M.I. (1982). Proper efficiency with respect to cones. *J. Optim. Theory Appl.*, **36**, 387-407.

[15] Hernández E., Jiménez B., Novo V. (2007). Weak and proper efficiency in set-valued optimization on real linear spaces. *J. Convex Anal.*, **14**.

[16] Hernández E., Rodríguez-Marín L. (2006). Nonconvex scalarization in set optimization with set-valued maps. *J. Math. Anal. Appl.* In press.

[17] Hestenes M.R. (1981). *Optimization Theory. The finite dimensional case*, R.E. Krieger Publ. Comp., New York.

[18] Jahn J. (2004). *Vector Optimization. Theory, applications and extensions.* Springer, Berlin.

[19] Jiménez B. (2002). Strict efficiency in vector optimization. *J. Math. Anal. Appl.*, **265**, 264-284.

[20] Jiménez B., Novo V. (2002). First and second order sufficient conditions for strict minimality in multiobjective programming. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **23**, 303-322.

[21] Jiménez B., Novo V. (2003). First and second order sufficient conditions for strict minimality in nonsmooth vector optimization. *J. Math. Anal. Appl.*, **284**, 496-510.

[22] Jiménez B., Novo V. (2004). Optimality conditions in differentiable vector optimization via second-order tangent sets. *Appl. Math. Optim.*, **49**, 123-144.

[23] Kuhn H., Tucker A. (1951). Nonlinear programming. In J. Neyman ed. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley, 481-492.

[24] Kuroiwa D. (2001). On set-valued optimization. *Nonlinear Anal.*, **47**, 1395-1400.

[25] Kutateladze S.S. (1979). Convex ε-programming. *Soviet Math. Dokl.*, **20**, 391-393.

[26] Luc D.T. (1989). *Theory of Vector Optimization.* Lect. Notes in Econ. Mathem. Syst. nº 319, Springer, Berlin.

[27] Maeda T. (1994). Constraint qualifications in multiobjective optimization problems. *J. Optim. Theory Appl.*, **80**, 483-500.

[28] Mangasarian O.L., Fromovitz S. (1967). The Fritz-John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints. *J. Math. Anal. Appl.*, **17**, 37-47.

[29] Miettinen K.M. (1999). *Nonlinear Multiobjective Optimization*, Kluiwer Ac. Pub., Boston.

[30] Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T. (1985). *Theory of Multiobjective Optimization*, Academic Press, Orlando.

[31] Tanaka T. (1995). *A new approach to approximation of solutions in vector optimization problems.* Proceedings of APORS 1994, 497-504. M. Fushimi and K. Tone eds. World Scientific, Singapore.

[32] White D.J. (1990). A bibliography on the applications of mathematical programming multiple-objective methods. *J. Oper. Res. Soc.*, **41**, 669-691.