

## 1. ARTÍCULOS DE ESTADÍSTICA

ANDREI MARKOV (1856-1922)  
EN EL 150 ANIVERSARIO DE SU NACIMIENTO

Miguel A. Gómez Villegas

*Departamento de Estadística e Investigación Operativa I**Facultad de Ciencias Matemáticas**Universidad Complutense de Madrid*

Andrei Andreevich Markov nace en Ryazan (Rusia) el 14 de junio de 1856 y muere en San Petersburgo en 1914, se cumplen por tanto 150 años del nacimiento del creador de las *cadena de Markov*, uno de los conceptos más importantes en la construcción de modelos en gran cantidad de campos que abarcan desde la sociología a la física teórica.

Markov estudia en San Petersburgo y muestra un carácter fuerte que le causará problemas posteriormente con el régimen zarista y con sus colegas de la Universidad de San Petersburgo. Era mal estudiante en todo menos en matemáticas. En 1913 la dinastía Romanov, que había estado en el poder en Rusia desde 1613, celebró sus 300 años de permanencia en el mismo -él prefirió celebrar los 200 años de la ley de los grandes números tal y como había sido introducida postumamente por J. Bernoulli en 1713-.

Inició sus estudios universitarios de matemáticas en 1874 que acabó en 1878, siendo premiado con una medalla de oro al terminarlos. Realizó en la Universidad de San Petersburgo su carrera académica. Su tesis doctoral estuvo en el ámbito de la teoría de números, pero con la retirada de Chebychev, en 1883, Markov pasó a encargarse del curso sobre la teoría de la probabilidad continuando con el mismo incluso después de su retirada de la universidad en 1905.

Perteneció a la escuela matemática de San Petersburgo fundada por Chebychev, y junto a Liapunov llegó a ser una de las figuras más eminentes de la misma en el campo de la probabilidad. Bernstein (1927), otro de los representantes de la escuela de San Petersburgo, decía de él:

Sin duda el más importante continuador de las ideas sobre probabilidad fué Markov, sus trabajos son modelos de rigor y claridad en la exposición, y han contribuido en gran medida a transformar la teoría de la probabilidad en uno de los más perfectos campos de la matemática y a aumentar la popularidad de los métodos y las ideas de Chebychev.

Sus primeras contribuciones son relativas al teorema central del límite para variables independientes pero no idénticamente distribuidas y son motivadas por una imprecisión que había cometido Chebychev y que Markov corrige. En concreto Chebychev había demostrado que si las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n, \dots$  cumplen que (i) son de media cero; y (ii)  $E|(X_i)|^k \leq C$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Pr \left\{ \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{V[S_n]}} \leq t \right\} \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-0.5x^2} dx,$$

donde  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Markov establece que ha de añadirse la hipótesis (iii)  $(\sum_{i=1}^n Var[X_i])/n$  es uniformemente acotada.

La demostración del teorema central del límite dada por Chebychev está basada en la utilización de variables aleatorias truncadas, la obtenida por Markov se basa en la utilización de la desigualdad

$$Pr\{|S_n - E[S_n]|/n \geq \varepsilon\} \leq \frac{Var[S_n]}{(n\varepsilon)^2}$$

La demostración basada en la función característica es posterior y se debe a Lyapunov.

Sin duda la otra contribución importante de Markov fué la introducción del concepto de cadena de Markov, como un modelo para el estudio de variables dependientes, el cual dió lugar a una gran cantidad de investigación posterior en la teoría de los procesos estocásticos. Las páginas 319-338 de Markov (1951) contienen estos resultados, en el mismo libro puede verse también una lista completa de los trabajos de Markov y dos fotografías del mismo tomadas por su hijo.

Los trabajos sobre estadística de Markov consisten en la modelización de la alternancia entre vocales y consonantes, mediante una cadena de Markov con dos estados, de composiciones literarias en ruso, y en el estudio de los mínimos cuadrados para la obtención del teorema de Gauss-Markov.

Una exposición detallada de las contribuciones

de los matemáticos de la escuela de San Petersburgo puede verse en el clásico libro de Maistrov (1974) sobre la historia de la probabilidad.

Justo es rendir tributo a uno de los más prominentes representantes de la escuela de San Petersburgo.

### Referencias

- [1] Bernstein S.N. (1927). Sur l'extension du théorème limité du calcul des probabilités aux sommes des quantités dépendantes, *Math. Ann.*, **97**, 1-59.
- [2] Maistrov L.E. (1974). *Probability Theory: A Historical Sketch*, Academic Press, London.
- [3] Markov A.A. (1951). *Izbrannie Trudy AN SSR*, Leningrad. [Selected works on number theory and the theory of probability].