2. ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA

ESTABILIDAD EN PROGRAMACIÓN SEMI-INFINITA LINEAL: UN ENFOQUE CUANTITATIVO

María Josefa Cánovas Cánovas y Juan Parra López
Dpto. de Estadística, Matemáticas e Informática
Centro de Investigación Operativa
Universidad Miguel Hernández de Elche

1. Introducción

El objetivo de este artículo es ofrecer al lector una breve incursión en el campo de la programación lineal con infinitas restricciones, resaltando las diferencias con la programación lineal ordinaria, y adentrándonos fundamentalmente en cuestiones de estabilidad y su cuantificación.

El término Programación Semi-Infinita (PSI) se aplica a problemas de optimización en los que bien el número de variables o bien el de restricciones es finito. Se insiste así en que este concepto abarca como caso particular a los problemas con n variables y m restricciones. Prestaremos especial atención a los problemas de PSI lineal (PSIL). Si llamamos primal a un problema con n variables y (posiblemente) infinitas restricciones, entonces su dual tendrá (posiblemente) infinitas variables y n restricciones.

Los problemas de programación semi-infinita lineal surgen de manera natural al modelar situaciones, o reformular modelos, en diferentes campos de aplicación, como la aproximación funcional, estimación de parámetros, reconocimiento de patrones, políticas medioambientales, etc. El lector interesado no debería perderse la monografía de Miguel A. Goberna y Marco A. López [12] sobre PSIL. Asimismo recomendamos la lectura del reciente artículo de revisión de Marco A. López y Georg Still [15] sobre PSI, en el que se describen fundamentos teóricos (incluyendo condiciones de optimalidad), métodos numéricos (como los de discretización), diversas aplicaciones y una revisión histórica del tema. En concreto se presentan aplicaciones de la PSI a la aproximación de Chebyshev, física matemática, robótica, geometría, optimización bajo incertidumbre (optimización robusta) y economía. En [15] se citan además ciertas aplicaciones a la estadística (diseño de experimentos, regresión, estimación por máxima verosimilitud con restricciones, robustez en estadística bayesiana, estadística actuarial, etc.). Véanse, p.e., [8] y [12].

A modo de ilustración, describiremos muy brevemente un par de aplicaciones de la PSIL: la aproximación de Chebyshev (uniforme) por funciones polinómicas y la optimización robusta aplicada al problema de la cartera.

Imaginemos que buscamos un polinomio de grado menor o igual que n en la variable t, pongamos $p(t) = x_0 + x_1 t + ... + x_n t^n$, que constituya una mejor aproximación uniforme de una función dada f en $[a, b]$. En principio no requerimos ninguna propiedad a f. Dicho problema es equivalente al siguiente problema de PSIL en las variables $x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}$ (donde escribimos Inf en vez de Min):

$$\begin{array}{ll} \text{Inf} & x_{n+1} \\ \text{s. a} & \pm\left(x_0 + t x_1 + ... + t^n x_n\right) - x_{n+1} \\ & \leq \pm f(t) \;\; \forall t \in [a, b]. \end{array}$$

Consideremos ahora el problema de la cartera: Queremos invertir un capital $k > 0$ por un periodo de un año en n bienes cuyo rendimiento (por unidad monetaria invertida) al cabo del citado año denotamos por $t_1, ..., t_n$, respectivamente. Ciertamente existe incertidumbre sobre el valor de $t = (t_1, ..., t_n)$. De no ser así, nuestra decisión óptima consistiría en invertir todo el capital en uno de los bienes (si hay varios) con rendimiento máximo. Supongamos que, basándonos en la experiencia y ciertos modelos económicos podemos predecir (con un cierto margen de confianza) que t variará en un subconjunto $T \subset \mathbb{R}^n$; entonces el enfoque pesimista de la situación nos llevará a buscar el beneficio máximo en el peor de los casos, lo que conduce al problema de PSIL (llamado de optimización robusta):

$$\begin{array}{ll} \text{Sup} & v \\ \text{s. a} & t_1x_1 + ... + t_nx_n - v \geq 0 \; \forall (t_1, ..., t_n) \in T \\ & x_1 + ... + x_n = k, \, x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0. \end{array}$$

La PSI ha despertado el interés de diferentes grupos de investigación desde su inicio, a principios de los años 60, con una serie de artículos (sobre PSIL) de Charnes, Cooper y Kortanek, tanto por los atractivos desarrollos teóricos a los que da lugar como por la variedad de sus aplicaciones. Los citados autores acuñaron el término *semi-infinita*. Desde entonces se han escrito más de mil artículos y diez libros sobre teoría, métodos numéricos y aplicaciones de la PSI. Los antecedentes de esta disciplina se encuentran, entre otros, en la aproximación de Chebyshev, el trabajo de Haar sobre sistemas (semi-infinitos) lineales (1924) y las condiciones de optimalidad de Fritz John (1948). Cabe destacar que la PSI constituye un campo de investigación al que se puede acceder desde diferentes áreas matemáticas, como el análisis, la geometría diferencial, la topología, el cálculo numérico, y por supuesto la investigación operativa.

Son numerosos los investigadores internacionales que han dedicado parte de sus esfuerzos a la PSI (lineal y no lineal). Entre ellos citaremos a Brosowski, Fischer, Jongen y Stein en Alemania, Klatte en Suiza, Still en Holanda, Jiménez, Rückmann y Todorov en México, Vera de Serio en Argentina, Rubinov en Australia, Weber en Turquía, Vaz y Fernandes en Portugal, etc. A nivel nacional, y pidiendo disculpas por adelantado por las involuntarias omisiones, el tema tuvo un desarrollo inicial con Marco A. López y sus entonces doctorandos Miguel A. Goberna, Jesús T. Pastor y poco después Enriqueta Vercher. Esta última ha liderado un grupo en Valencia (Teresa León y Susana Sanmatías) que ha avanzado, entre otros, en el campo de los algoritmos y las aplicaciones. Miguel A. Goberna y Marco A. López lideran el grupo de Alicante (Valentín Jornet, Margarita Rodríguez, Mariola Molina y Mª Dolores Fajardo), mientras que los arriba firmantes, de la mano de Marco A. López, encabezan el grupo de Elche (junto con Fco. Javier Toledo, Francisco J. Gómez-Senent y colaboraciones puntuales de Eva Mª Ortega). Entre las aproximaciones al tema desde áreas afines citaremos a Juan E. Martínez Legaz y Albert Ferrer en Barcelona, Beatriz Hernández en Huelva, y Natividad Llorca y Joaquín Sánchez Soriano en Elche.

Tras la imprescindible dosis de notación, empezaremos resaltando algunas diferencias notables con el campo de la programación lineal (PL) ordinaria. Un problema típico de PSIL puede formularse como

$$\pi: \quad \begin{array}{l} \text{Inf } c'x \\ \text{s. a } a_t'x \geq b_t, \;\; t \in T, \end{array} \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables de decisión, considerado como matriz columna, y' denota el traspuesto de $y \in \mathbb{R}^n$, T es un conjunto de índices completamente arbitrario (posiblemente infinito), y la función $T \ni t \mapsto \binom{a_t}{b_t} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ es igualmente arbitraria. Denotamos por σ al sistema de restricciones de π, esto es,

$$\sigma := \{a_t'x \geq b_t, \;\; t \in T\}. \tag{2}$$

El problema π puede identificarse con el par (c, σ) perteneciente al espacio paramétrico $\Pi = \mathbb{R}^n \times \Theta$, donde $\Theta \equiv (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^T$ es el espacio paramétrico de los sistemas del tipo (2), identificando σ con $\binom{a_t}{b_t}_{t \in T}$. Asociados a $\pi = (c, \sigma)$ consideramos los siguientes elementos:

$F := \{x \in \mathbb{R}^n : a_t'x \geq b_t \text{ para todo } t \in T\}$, el *conjunto factible* de π (o de σ);

$v := \inf \{c'x : x \in F\} \in [-\infty, +\infty]$, el *valor óptimo* de π ($v = +\infty$ si $F = \emptyset$);

$F^* := \{x \in F : c'x = v\}$, el *conjunto óptimo* de π.

Asimismo, denotaremos por $\mathcal{F}, \mathcal{F}^* : \Pi \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ a las multifunciones (correspondencias) conjunto factible y conjunto óptimo, respectivamente, y por $\vartheta : \Pi \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ a la función valor óptimo.

Cuando consideremos diferentes problemas, éstos y sus elementos asociados se distinguirán por medio de sub(super)índices. Así, si $\pi_1 \in \Pi$ escribiremos $\pi_1 = (c^1, \sigma_1)$, donde $\sigma_1 := \left\{ (a_t^1)' x \geq b_t^1, \; t \in T \right\}$, y el conjunto factible, valor óptimo y conjunto óptimo de π_1 se representarán respectivamente por F_1, v_1 y F_1^*.

Consideramos los siguientes subconjuntos relevantes de Π y de Θ:

$\Pi_c := \{\pi = (c, \sigma) \in \Pi : \sigma \in \Theta_c\}$, donde $\Theta_c := \{\sigma \in \Theta : F \neq \varnothing\}$;

$\Pi_b := \{\pi = (c, \sigma) \in \Pi : v \text{ es finito}\}$;

$\Pi_s := \{\pi = (c, \sigma) \in \Pi : F^* \neq \varnothing\}$;

$\Pi_c^d := \left\{\pi = (c, \sigma) \in \Pi : \pi^d \text{ es consistente}\right\}$.

Obviamente $\Pi_s \subset \Pi_b \subset \Pi_c$. Aquí los subíndices c, b y s significan respectivamente *consistente, acotado* y *resoluble*, mientras que el superíndice d hace referencia al problema dual de π (en el sentido de Haar), que viene dado por

$$\begin{array}{rl} \pi^d: & \text{Sup} \sum\limits_{t\in T} \lambda_t b_t \\ & \text{s.a} \sum\limits_{t\in T} \lambda_t a_t = c, \\ & \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}, \end{array} \tag{3}$$

donde $\mathbb{R}_+^{(T)}$ es el cono convexo de todas las funciones $\lambda : T \to \mathbb{R}_+$ $(:= [0, +\infty[)$ que toman valores positivos solamente en una cantidad finita de índices. El hecho de considerar un espacio tan restrictivo (cuando T es infinito) para las variables duales obedece a la necesidad de garantizar la finitud de las sumas cuando las funciones de coeficientes $t \mapsto \binom{a_t}{b_t}$ son arbitrarias. Si se imponen condiciones adecuadas a dichas funciones de coeficientes, puede ampliarse el espacio de las variables duales.

Como anunciábamos hace una líneas, empezaremos reseñando algunas diferencias notables entre la PSIL y la PL ordinaria. En concreto: en PL ordinaria el conjunto factible es poliéderico, un problema es acotado si y sólo si es resoluble, lo que ocurre si y sólo si es primal-dual consistente, y no existen saltos de dualidad. En PSIL, con T infinito, el conjunto factible puede ser cualquier subconjunto convexo y cerrado de $\mathbb{R}^n$, los conjuntos Π_b, Π_s y $\Pi_c \cap \Pi_c^d$ son distintos dos a dos y pueden existir saltos de dualidad aún cuando π y π^d sean consistentes. Los siguientes ejemplos ilustran estos comentarios:

Ejemplo 1.1. $\pi \in \Pi_s \backslash \Pi_c^d$. *Consideremos el problema, en* $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rl} \pi: & \text{Inf } x_1 \\ & \text{s.a} \quad x_1 + t\, x_2 \geq 0, \ t \in]0, +\infty[\ . \end{array}$$

Se tiene $F = [0, +\infty[^2$ *y* $F^* = \{0\} \times [0, +\infty[$; *en particular* $\pi \in \Pi_s$. *Sin embargo, el cono convexo generado por* $\{a_t, \ t \in T\}$ *es* $]0, +\infty[^2 \cup \{(0,0)'\}$, *que no contiene a* $c = (1,0)'$ (*véase* (3)). *Por tanto* $\pi \notin \Pi_c^d$.

Ejemplo 1.2. $\pi \in \left(\Pi_b \cap \Pi_c^d\right) \backslash \Pi_s$ *y hay salto de dualidad. Consideremos el problema, en* $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rl} \pi: & \text{Inf } x_1 \\ & \text{s.a} \quad t\, x_1 + \dfrac{1}{t} x_2 \geq 2, \ t \in]0, +\infty[\ , \\ & \qquad x_1 \geq -1, \ t = 0. \end{array}$$

Puede comprobarse fácilmente que

$$F = \left\{(x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq x_1^{-1}, \ x_1 > 0\right\},$$

y por tanto π *es acotado* ($v = 0$) *pero no resoluble. También se comprueba fácilmente que la única solución factible del problema dual viene dada por* $\lambda_0 = 1$, $\lambda_t = 0$ *si* $t > 0$. *Por lo tanto, el valor del problema dual es* $v^d = \lambda_0 b_0 = -1$.

Nótese que es incluso posible tener salto de dualidad cuando $\pi \in \Pi_s$. Basta añadir al Ejemplo 1.1 la última restricción del Ejemplo 1.2.

2. Estabilidad

En la literatura encontramos diferentes criterios de estabilidad para problemas de optimización o sus sistemas de restricciones que, en el caso concreto de la PSIL, resultan ser equivalentes a las condiciones de interioridad $\pi \in int\,(\Pi_c)$ o $\pi \in int\,(\Pi_s)$. Véanse, por ejemplo, [3], [11], [13], [18] y [21]. La topología considerada en Π es la de la convergencia uniforme de los vectores de coeficientes, que viene dada a través de la distancia extendida $\delta : \Pi \times \Pi \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por

$$\delta(\pi_1, \pi) := \max\left\{\left\|c^1 - c\right\|, \sup_{t\in T} \left\|\begin{pmatrix} a_t^1 \\ b_t^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}\right\|\right\}, \tag{4}$$

donde las normas consideradas en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{R}^{n+1}$ son cualesquiera previamente fijadas. En este contexto se engloban, por ejemplo, aquellas situaciones en las que los datos sólo se conocen aproximadamente, o están sujetos a errores de cálculo, en cuyo caso cualquier perturbación uniformemente pequeña de *todos* los coeficientes es admisible. Es evidente que la estabilidad de un problema depende y mucho de la topología considerada. El siguiente ejemplo muestra un problema que es muy estable en nuestro contexto (4) y sin embargo resulta muy inestable cuando se considera inmerso en un contexto paramétrico, en el cual las perturbaciones no recaen directamente sobre los coeficientes, sino sobre el parámetro θ del que dependen.

Ejemplo 2.1. *Consideremos la familia paramétrica de problemas* $\{\pi_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$, *en* $\mathbb{R}^2$, *dada por*

$$\begin{array}{rl} \pi_\theta: & \text{Inf } x_1 + x_2 \\ & \text{s.a} \quad (t+1)\, x_1 + \left(t^{-1} + 1\right) x_2 \geq \\ & \qquad -1 + \dfrac{\theta^2 t^2}{1 + \theta^2 t}, \ t \in]0, +\infty[\, . \end{array}$$

Puede comprobarse fácilmente que, para todo $\theta \neq 0$, se tiene $\mathcal{F}(\pi_\theta) = [1, +\infty[\times [0, +\infty[$, $\vartheta(\pi_\theta) =$

1 y $\mathcal{F}^*(\pi_\theta) = \{(1,0)'\}$; mientras que $\mathcal{F}(\pi_0) = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, $\vartheta(\pi_0) = 0$ y $\mathcal{F}^*(\pi_0) = \{(0,0)'\}$. De hecho, respecto del conjunto factible, las inclusiones '$\supset$' son inmediatas y las inclusiones inversas se siguen del Lema de Farkas (generalizado): divídase cada inecuación por el correspondiente t y hágase $t \to +\infty$; del mismo modo, multiplíquense las desigualdades por t y tómese $t \to 0$. Así pues, una perturbación arbitrariamente pequeña de $\theta = 0$ produce una reducción drástica del conjunto factible (en términos formales, la multifunción conjunto factible no es semicontinua inferiormente en el parámetro $\theta = 0$), y un alejamiento drástico tanto del valor óptimo como del conjunto óptimo (en ambos casos fallan la semicontinuidad inferior y la superior). Sin embargo, el problema π_0, visto ahora en nuestro contexto (4), goza localmente de gran estabilidad, dado que $\mathcal{F}(\pi) = \mathcal{F}(\pi_0)$ y $\mathcal{F}^*(\pi) = \mathcal{F}^*(\pi_0)$ para todo $\pi \in \Pi$ tal que $\delta(\pi,\pi_0) < 1$ (con respecto de la norma del supremo en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{R}^{n+1}$).

3. Cuantificación de la estabilidad: Distancia al mal planteamiento y regularidad métrica.

Dado que las condiciones de interioridad $\pi \in int(\Pi_c)$ y $\pi \in int(\Pi_s)$ constituyen en sí criterios de estabilidad, una forma de cuantificar dicha estabilidad viene dada por la determinación de $\delta(\pi, bd(\Pi_c))$ y $\delta(\pi, bd(\Pi_s))$, donde bd significa frontera. Convendremos que un problema está *mal planteado* (*ill-posed*) respecto de una propiedad (p.e., consistencia primal y/o dual, carácter acotado o resolubilidad) cuando perturbaciones arbitrariamente pequeñas del problema puedan originar tanto problemas verificando dicha propiedad, como otros no haciéndolo; esto es, un problema se dice mal planteado respecto de una propiedad cuando pertenece a la frontera del conjunto de los problemas que gozan de la propiedad en cuestión. En este sentido las expresiones $\delta(\pi, bd(\Pi_c))$, $\delta(\pi, bd(\Pi_b))$, $\delta(\pi, bd(\Pi_s))$, $\delta\left(\pi, bd\left(\Pi_c^d\right)\right)$ y $\delta\left(\pi, bd\left(\Pi_c \cap \Pi_c^d\right)\right)$ representan diferentes nociones de *distancia al mal planteamiento* en PSIL. Dicha distancia es el objeto de estudio de [20], y allí se prueba que $bd(\Pi_b) = bd(\Pi_s) = bd\left(\Pi_c \cap \Pi_c^d\right)$ (véanse los comentarios previos al Ejemplo 1.1). Por tanto, las cinco nociones anteriores de distancia al mal planteamiento se reducen a tres.

El concepto de distancia al mal planteamiento fue introducido por Renegar en [16] en relación con la propiedad de consistencia (tanto primal como dual) en el contexto de la programación lineal cónica (la relación de orden viene definida por un cono) en espacios de Banach, y resulta ser un ingrediente básico en la generalización del número de condición a este contexto, siendo a su vez dicho número de condición un ingrediente importante en el estudio de la complejidad de ciertos algoritmos (véanse, p.e., [10] y [17]).

En nuestro contexto de la PSIL (4), los distintos tipos de distancia al mal planteamiento referidos anteriormente han sido determinados (o en algunos casos acotados inferior y superiormente) en [4] y [5] en términos de los coeficientes del problema (1). Destacamos el hecho de que, en las fórmulas que se indican a continuación, el problema de hallar la correspondiente distancia al mal planteamiento (en el espacio Π, infinito-dimensional si T es infinito) se traduce en el problema de hallar la distancia, en $\mathbb{R}^n$ y/o $\mathbb{R}^{n+1}$, del origen a la frontera de un conjunto convexo determinado por los coeficientes de π. En el siguiente teorema nos referimos al espacio $\Pi_\infty := \{\pi \in \Pi : \delta(\pi, bd(\Pi_c)) = +\infty\}$, formado exclusivamente por problemas inconsistentes y caracterizado en [4]. Por $conv(X)$ denotamos a la envoltura convexa del conjunto X, y cl significa clausura.

Teorema 3.1. *(i)* [4, Teoremas 5 y 6] *Si* $\pi \in \Pi \backslash \Pi_\infty$, *entonces*

$$\delta(\pi, bd(\Pi_c)) = d(0_{n+1}, bd(H)),$$

donde

$$H := conv\left(\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix},\ t \in T\right\}\right) + \mathbb{R}_+\begin{pmatrix} 0_n \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) [5, Teorema 6] *Para todo* $\pi \in \Pi$, *se tiene*

$$\delta\left(\pi, bd\left(\Pi_c^d\right)\right) = d(0_n, bd(Z)),$$

donde

$$Z := conv(\{a_t,\ t \in T;\ -c\}).$$

(iii) [5, Teorema 2] *Si* $\pi \in cl(\Pi_s)$, *entonces*

$$\begin{aligned} & \delta(\pi, bd(\Pi_s)) \\ = \ & \min\{d(0_{n+1}, bd(H)), d(0_n, bd(Z))\}. \end{aligned}$$

Comentamos asimismo que las expresiones anteriores permiten, dado un problema $\pi \in int(\Pi_s)$, y dado $0 < \varepsilon < \delta(\pi, bd(\Pi_s))$, hallar explícitamente una constante de Lipschitz para la función valor óptimo en la bola cerrada de centro π y radio ε; esto es, un $L > 0$ tal que

$$|v_1 - v_2| \leq L\delta(\pi_1, \pi_2)$$

para cualesquiera π_1 y π_2 en dicha bola. Véase [6].

Otro paso hacia la cuantificación de la estabilidad lo constituye el estudio de diferentes propiedades de tipo Lipschitz para las multifunciones conjunto factible y conjunto óptimo. Informalmente hablando, se trata de medir la tasa de reducción o expansión de dichos conjuntos respecto de la distancia entre los problemas considerados, todo ello en torno a un problema dado.

Una de las propiedades más explotadas, debido a la generalidad y a la vez simplicidad del concepto, es la de *pseudo-Lipschitz* o *propiedad de Aubin*. Vistas desde el enfoque de la multifunción inversa, las propiedades de tipo Lipschitz se traducen en propiedades de regularidad (véase, por ejemplo, [14]), y en concreto la propiedad de Aubin se traduce en la *regularidad métrica*. Para concretar, consideremos una ecuación generalizada del tipo

$$\mathcal{G}(x) \ni y,$$

donde x es la variable, y es el parámetro y $\mathcal{G} : X \rightrightarrows Y$ es una multifunción entre los espacios métricos X e Y (denotando por d ambas distancias asociadas). Esta ecuación generalizada puede ser, por ejemplo, un sistema de ecuaciones del tipo $\{a_t' x \geq b_t,\ t \in T\}$ si

$$\mathcal{G}(x) = (a_t' x)_{t \in T} - \mathbb{R}_+^T \subset \mathbb{R}^T. \tag{5}$$

En este caso el parámetro sería únicamente la función $b \equiv (b_t)_{t \in T}$ del miembro derecho de las restricciones y $\mathcal{G}^{-1}(b)$ es el conjunto factible asociado, suponiendo $(a_t)_{t \in T}$ prefijado.

Decimos que una multifunción genérica $\mathcal{G}$ es métricamente regular en $\bar{x}$ para $\bar{y} \in \mathcal{G}(\bar{x})$ si existen sendos entornos U de $\bar{x}$ y V de $\bar{y}$ y un $k > 0$ tales que

$$d\left(x, \mathcal{G}^{-1}(y)\right) \leq k d(y, \mathcal{G}(x)) \text{ si } (x, y) \in U \times V, \tag{6}$$

donde $\mathcal{G}^{-1}(y) = \{x \in X \mid y \in \mathcal{G}(x)\}$.

Para ilustrar cómo funciona este concepto imaginemos que $\bar{x}$ es una solución de la ecuación $\mathcal{G}(x) \ni \bar{y}$, que $x_p \in U$ e $y_p \in V$ son aproximaciones de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ respectivamente, y que $\widetilde{k} > k$. Entonces la ecuación generalizada $\mathcal{G}(x) \ni y_p$ tiene una solución que dista de x_p no más de $\widetilde{k}$ veces $d(y_p, \mathcal{G}(x_p))$, que en el caso de (5) para $y_p = (b_{p,t})_{t \in T}$, es el residuo

$$\sup_{t \in T} (b_{p,t} - a_t' x_p)_+ ,$$

en general mucho más fácil de calcular o estimar que $d\left(x_p, \mathcal{G}^{-1}(b_p)\right)$. Así, si conocemos la rapidez de convergencia de los residuos a cero, podremos estimar la rapidez de convergencia de las soluciones aproximadas a una solución exacta.

El ínfimo de los $k > 0$ para los que (6) se verifica (para algunos entornos U y V) se denomina *módulo de regularidad métrica*, y es una medida cuantitativa de la estabilidad de $\mathcal{G}$ alrededor de $(\bar{x}, \bar{y})$ que resulta de gran importancia en trabajos tanto teóricos como aplicados. Otra medida importante es el *radio de regularidad métrica*, que informalmente podemos interpretar como el tamaño de la mínima perturbación que ha de realizarse sobre la multifunción para que pierda la propiedad de regularidad métrica en el punto correspondiente (véanse [9] y [19]). Ya en nuestro contexto de la PSIL, la regularidad métrica de sistemas de restricciones (ecuaciones e inecuaciones) se ha analizado en [1], donde se proporcionan fórmulas para el módulo y el radio, mientras que el estudio de la regularidad métrica asociada a soluciones óptimas de problemas semi-infinitos convexos es el objetivo de [2].

No quisiéramos terminar sin hacer una sincera invitación a los lectores interesados en este tema apasionante a contactar con nosotros para ampliar información (suya o nuestra) o cotejar puntos de vista. A día de hoy nos hallamos inmersos en la determinación del módulo de regularidad métrica relativo al conjunto óptimo en PSIL (véase [7]), donde se plantean desafiantes problemas abiertos, que están por resolver incluso en el contexto de la programación lineal ordinaria.

Referencias

[1] Cánovas M.J., Dontchev A.L., López M.A., and Parra J. (2005). Metric regularity of semi-infinite constraint systems. *Math. Program.*, **104B**, 329-346.

[2] Cánovas M.J., Klatte D., López M.A., and Parra J. (2006). Metric regularity in convex semi-infinite optimization under canonical perturbations. Preprint.

[3] Cánovas M.J., López M.A., Parra J., and Todorov M.I. (1999). Stability and well-posedness in linear semi-infinite programming. *SIAM J. Optim.*, **10**, 82-98.

[4] Cánovas M.J., López M.A., Parra J., and Toledo F.J. (2005). Distance to ill-posedness and the consistency value of linear semi-infinite inequality systems. *Math. Program.*, **103A**, 95-126.

[5] Cánovas M.J., López M.A., Parra J., and Toledo F.J. (2006). Distance to solvability/unsolvability in linear optimization. *SIAM J. Optim.* **16**, 629-649.

[6] Cánovas M.J., López M.A., Parra J., and Toledo F.J. (2006). Lipschitz continuity of the optimal value via bounds on the optimal set in linear semi-infinite optimization. *Math. Oper. Res*, to appear.

[7] Cánovas M.J., Gómez-Senent F.J., and Parra J. (2006). On the modulus of metric regularity of the optimal set in linear semi-infinite optimization. Preprint.

[8] Dall'Aglio M. (2001), On some applications of LSIP to Probability and Statistics, in M.A Goberna, M.A. López (Eds.), *Semi-Infinite Programming. Recent advances, Nonconvez Optimization and Its Applications 57*, pp. 237-254, Kluwer Academic Publ., Dordrecht (NL).

[9] Dontchev A.L., Lewis A.S., and Rockafellar R.T. (2003). The radius of metric regularity. *Trans. Amer. Math. Society*, **355**, 493-517.

[10] Freund R.M. and Vera J.R. (1999). Some characterizations and properties of the "distance to ill-posedness" and the condition measure of a conic linear system. *Math. Program.*, **86**, 225-260.

[11] Goberna M.A., López M.A., and Todorov M.I. (1996). Stability theory for linear inequality systems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.,* **17**, 730-743.

[12] Goberna M.A. and López M.A. (1998). *Linear Semi-Infinite Optimization*, John Wiley & Sons, Chichester (UK).

[13] Jongen H.Th., Twilt F., and Weber G.-W. (1992). Semi-infinte optimization: structure and stability of the feasible set. *J. Optim. Theory Appl.*, **72**, 529-552.

[14] Klatte D. and Kummer B. (2002). *Nonsmooth Equations in Optimization: Regularity, Calculus, Methods and Applications*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht (NL).

[15] López M.A. and Still G. (2005). Semi-infinite programming, *Eur. J. Oper. Res*, to appear.

[16] Renegar J. (1994). Some perturbation theory for linear programming. *Math. Program.* **65**A, 73-91.

[17] Renegar J. (1995). Linear programming, complexity theory and elementary functional analysis. *Math. Program.*, **70**, 279-351.

[18] Robinson S.M. (1975): Stability theory for systems of inequalities. Part I: linear systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, **12**, 754-769.

[19] Rockafellar R.T. and Wets R.J.-B. (1998). *Variational Analysis*, Springer, Berlín.

[20] Toledo F.J. (2003), *Distancia al mal planteamiento en optimización lineal.* Tesis doctoral. Universidad Miguel Hernández de Elche.

[21] Tuy H. (1977). Stability property of a system of inequalities. *Math. Oper. Statist. Series Opt.* **8**, 27-39.