

3. ARTÍCULOS DE APLICACIÓN

ANÁLISIS DEL FUNCIONAMIENTO DE UNA OFICINA DE CORREOS

Olga Costa Estirado¹ y David Conesa Guillén²

¹ Licenciada en Matemáticas y en Ciencias y Técnicas Estadísticas

² Grup d'Estadística espacial i temporal en Epidemiologia i medi ambient
Departament d'Estadística i I.O., Universitat de València

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es aplicar la teoría de colas a las líneas de espera originadas en la oficina principal de Correos de la ciudad de Valencia y surge como resultado de la realización de las prácticas profesionales en dicha oficina por parte de la primera autora. El trabajo se estructura en 7 Secciones, siendo esta primera de carácter introductorio. En la Sección 2, comenzamos detallando cómo funciona la oficina, para a continuación, en la Sección 3, introducir los modelos de colas que mejor aproximan dicho funcionamiento. En las Secciones 4 y 5, presentamos los datos y estimamos los parámetros que describen el comportamiento de la oficina, a partir de los cuales obtenemos, en la Sección 6, las primeras conclusiones del estudio a través de las llamadas medidas de eficiencia (tamaño de la cola, tiempo de permanencia en la cola o en la oficina y utilización de los servidores). Para finalizar, en la última Sección comentamos posibles futuras líneas de trabajo.

2. Funcionamiento de la oficina

De lunes a viernes, la oficina de correos permanece abierta de 08:30 a 20:30 con un horario ininterrumpido de atención al público. Cuando un cliente llega a la oficina, se encuentra en la entrada con dos ordenadores en los que debe seleccionar el servicio que desea realizar. Una vez seleccionado, el ordenador le asigna un ticket con una letra y un número: la letra se refiere al servicio solicitado y el número al orden de llegada (para ese servicio).

Los clientes son atendidos en las distintas ven-

tanillas cuando su número de ticket aparece en la pantalla de alguna de ellas. Para establecer el orden y la forma de atención, los responsables de la oficina los clasifican según el servicio que solicitan en los cuatro tipos siguientes:

- *Enviar*: Incluye a los clientes que solicitan servicios referentes al envío de correspondencia (envío de cartas, giros y telegramas, etc.).
- *Recoger*: Son aquellos que acuden a la oficina a recoger cartas y giros postales y también los que requieren gestiones relacionadas con los apartados de correos.
- *Filatelía*: Agrupa a los clientes que desean adquirir productos de Filatelía (sellos, sobres, etc.).
- *Banco*: Son los clientes que acuden a la oficina a realizar gestiones bancarias.

En concreto, los clientes son atendidos en orden de llegada, independientemente de la letra del ticket pero sí dependiendo del tipo al que pertenecen y, una vez atendidos, abandonan la oficina.

Respecto a los mostradores, en la oficina hay 15 que atienden a los 4 tipos de clientes. Hay uno específico para los clientes tipo *Filatelía* y otro para los clientes tipo *Banco*, y el resto, 13, se emplean unos para atender al tipo *Recoger* y otros para el tipo *Enviar*. La política actual de la oficina para la asignación de estos mostradores es la que muestra el Cuadro 1.

HORARIO	Nº DE SERVIDORES
08:30-09:30	3 mostradores que atienden conjuntamente <i>Enviar</i> y <i>Recoger</i>
09:30-14:30	2 para <i>Recoger</i> y 11 para <i>Enviar</i>
14:30-18:00	1 para <i>Recoger</i> y 3 para <i>Enviar</i>
18:00-20:30	1 para <i>Recoger</i> y 6 para <i>Enviar</i>

Cuadro 1: Asignación actual de ventanillas.

3. Los modelos de colas

Una vez presentado el funcionamiento de la oficina, pasamos a describir nuestra primera aproximación al problema, que se basa en la utilización de modelos básicos de Teoría de Colas. En concreto, hemos considerado 4 colas independientes que hacen referencia a los 4 tipos de clientes.

Cada una de estas colas se puede aproximar según un modelo $M|M|k$ de acuerdo con la notación de Kendall (1951) [2], donde la primera letra hace referencia a la distribución de los tiempos entre llegadas, la segunda a la distribución de los tiempos de servicio y la k al número de mostradores asignados a cada línea de espera. En particular, la M indica que tanto los tiempos entre llegadas como los de atención siguen una distribución exponencial (ver Medhi (2002) [4] para una descripción más detallada de estos modelos).

Conviene destacar que, a priori, se puede intuir que las llegadas a la oficina se producirán según un proceso de Poisson de parámetro desconocido λ , tasa media de llegadas de clientes a la oficina, lo que garantizaría la exponencialidad de los tiempos entre llegadas. Lo que no está tan claro es que los tiempos de atención o de servicio sigan también una distribución exponencial con media $\frac{1}{\mu}$, ya que parece más lógico pensar que estos tiempos se mantendrán más o menos constantes a lo largo del día. La justificación del uso de los modelos $M|M|k$ la veremos en la Sección 5.

A continuación describimos el resto de elementos que determinan cada una de las colas:

Clientes: Consideramos como clientes a los individuos/usuarios que acuden a la oficina para realizar alguno de los servicios ofrecidos.

Servidores: Son los empleados de la oficina que están detrás de cada uno de los mostradores de atención al público. De acuerdo con la políti-

ca de la oficina, los clientes del tipo *Filatelia* y *Banco* son atendidos por un único servidor ($k = 1$) mientras que los de *Enviar* y *Recoger* son atendidos por k servidores (con k variable).

Disciplina de la cola: Cada una de las colas sigue una disciplina FIFO (First In First Out), es decir, el primero que llega es el primero que es atendido.

Tras introducir los modelos de colas que aproximan el funcionamiento de la oficina, pasamos a comprobar, en las dos secciones siguientes, que realmente tanto las llegadas como los servicios son procesos de Poisson y a estimar los parámetros de dichos procesos.

4. Los datos.

La manera habitual de estimar los parámetros de los modelos de colas es a través de tiempos entre llegadas consecutivas y de tiempos de servicio (Bath et al. (1997) [1] presentan de manera detallada cómo realizar inferencia estadística en modelos de colas).

En nuestro caso, y debido a que la oficina está totalmente informatizada, nos es posible conocer en cualquier momento del día cual es su situación, es decir, conocer el estado de cada mostrador (cerrado, atendiendo o pausado), el número de ticket al que están atendiendo y también, entre otras cosas, el número de clientes por servicio esperando a ser atendidos. Así pues, aunque no tenemos información directa sobre los tiempos entre llegadas ni sobre los tiempos de servicio, sí que disponemos de datos sobre los tickets expedidos, en concreto, sobre su hora de expedición, su letra, su número y los tiempos de inicio y fin de atención.

Para utilizar esta información, hemos considerado que un ticket expedido equivale a una llegada a la oficina. ¿Motivo? Generalmente, en los ordenadores

de la entrada no se acumulan los clientes, por lo tanto, cuando un cliente llega a la oficina saca el ticket instantáneamente y en este caso la hora de expedición del ticket coincide con la hora de llegada del cliente. De esta manera, el tiempo entre expediciones de dos tickets consecutivos puede considerarse como el tiempo entre dos llegadas consecutivas.

Respecto a los tiempos de servicio, contamos con datos de los instantes de inicio y finalización de la atención. Como hora de inicio de atención consta la hora en la que el ticket ha sido llamado al mostrador correspondiente y como hora de fin de atención la hora en la que, en ese mismo mostrador, se ha llamado al siguiente número. Por tanto, hemos calculado el tiempo de servicio (o de atención) como el tiempo que transcurre desde que un cliente es llamado al mostrador hasta que se llama al siguiente (en el mismo mostrador).

Para concluir, conviene destacar que disponemos de una base de datos con 130.000 registros correspondientes a los tickets expedidos desde el día 03-01-2005 hasta el día 03-05-2005, ambos inclusive. Como el rango de fechas es muy amplio y deseamos encontrar un modelo que represente un día estándar en la oficina de correos, hemos eliminado los registros con fechas conflictivas.

5. Inferencia sobre los parámetros del modelo

En apartados anteriores ya hemos avanzado que tanto los tiempos entre llegadas consecutivas como los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial. En este apartado, presentaremos el análisis de los datos que justifica dicha afirmación.

Como las llegadas a la oficina dependen en gran medida de la hora, como primera aproximación al problema consideraremos franjas horarias donde tengamos valores constantes de los parámetros a estimar: λ , tasa media de llegadas de clientes a la oficina, y μ , tasa media de servicio por mostrador, para cada uno de los modelos.

Analizaremos de forma distinta los datos de tiempos entre llegadas y los de tiempos de servicio. Los primeros nos servirán para encontrar las franjas horarias donde la afluencia de llegadas a la oficina es similar y en cada una de ellas obtendremos una estimación del parámetro λ . Con los tiempos de servicio nos limitaremos a estimar μ en las franjas obtenidas a partir del análisis anterior.

Insistimos en que este procedimiento nos da una primera aproximación al problema real. Habitualmente, el parámetro λ no es constante sino que varía a lo largo del tiempo (procesos de Poisson no estacionarios). Considerar parámetros variables $\lambda(t)$ y $\lambda(t)$ en lugar de parámetros constantes supondría, sin duda, una mejor aproximación al funcionamiento de la oficina, pero no es el objetivo de este trabajo, aunque sí que lo consideramos como su extensión natural.

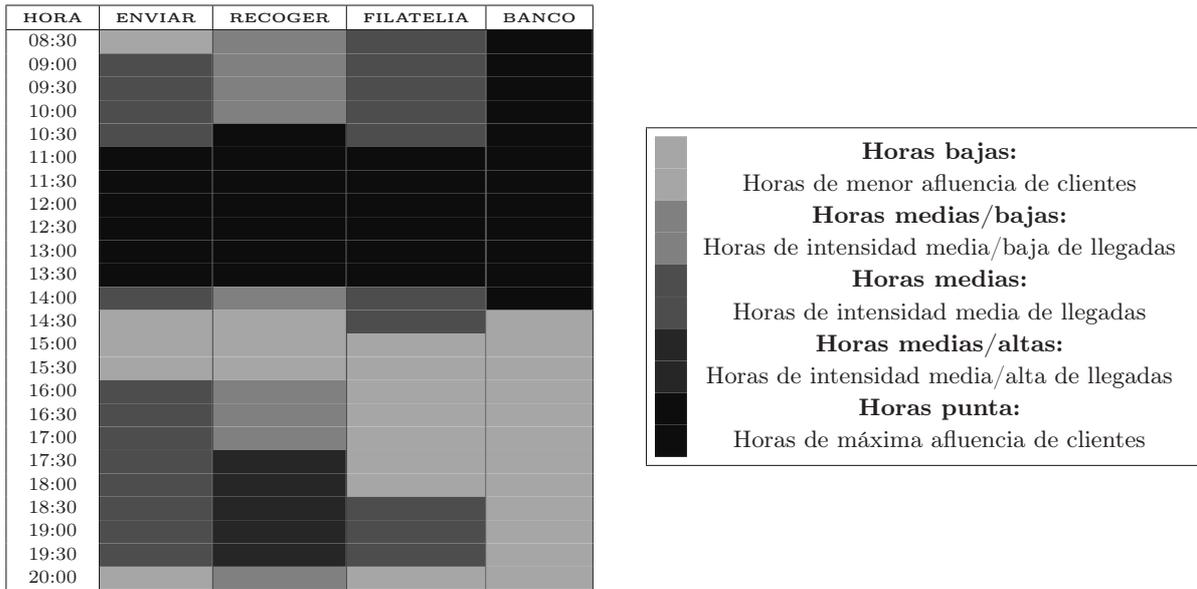
5.1. Tiempos entre llegadas

Tal y como hemos comentado anteriormente, hemos calculado los tiempos entre llegadas como la diferencia entre la hora de llegada de un cliente y la hora de llegada del cliente anterior.

El procedimiento que hemos seguido para detectar las franjas horarias se basa en una técnica propuesta por Law y Kelton (2000) [3]. En primer lugar hemos dividido el tiempo en intervalos horarios de 30 minutos desde las 08:30 hasta las 20:30. En cada uno de los intervalos hemos analizado, utilizando el programa SPSS (2001) [5], los datos de cada cola, separándolos además por día de la semana (L, M, X, J, V) para comprobar si influye el día en los tiempos entre llegadas.

Así, para cada uno de estos intervalos hemos representado los datos en un histograma y hemos realizado el test de bondad de ajuste de Kolgomorov y Smirnov al nivel $\alpha = 0.05$ contrastando la hipótesis nula de que los datos de cada intervalo son exponenciales. Conviene destacar que todos los tests no muestran evidencia en contra de dicha hipótesis, por lo que asumimos que los datos de cada grupo provienen de una distribución exponencial. Además observamos que no existen diferencias significativas entre los días de la semana.

Como estimador del parámetro λ de la exponencial, utilizamos el estimador máximo verosímil, cuya expresión en este caso es la inversa de la media muestral. Agrupando los datos de los intervalos con medias muestrales similares, conseguimos reducir el número de parámetros. Confirmamos la exponencialidad de los datos aplicando de nuevo el test de bondad de ajuste en cada uno de los grupos resultantes. Siguiendo con este procedimiento, obtenemos grupos con medias muestrales bastante diferenciadas que son los que finalmente nos dan las franjas horarias que buscábamos y que hemos representado en el Cuadro 2.



Cuadro 2: Franjas horarias para las 4 colas.

Para no extender innecesariamente este trabajo, en la siguiente tabla mostramos únicamente las estimaciones del modelo de colas *Enviar* (u. t. = minuto).

Parámetro	$\lambda_{H.bajas}$	$\lambda_{H.medias}$	$\lambda_{H.punta}$
Estimación	0.739	1.264	1.962

Podemos observar que realmente hay diferencias importantes en las llegadas diarias a la oficina, en las horas bajas hay 0.7 llegadas por minuto mientras que en las horas punta esta tasa es superior, aproximadamente 2 clientes por minuto.

5.2. Tiempos de servicio

Como hemos comentado anteriormente, los tiempos de servicio los analizamos en las franjas horarias obtenidas a partir del análisis de los tiempos entre llegadas. Conviene señalar que hemos eliminado los tiempos superiores a 20 minutos ya que, según los responsables de la oficina, estos tiempos se deben a un error en la toma de los datos (una posible causa podría ser que algún servidor hubiera abandonado momentáneamente un mostrador sin dejarlo pausado).

Hemos representado los datos mediante histogramas y realizado el test de bondad de ajuste de Kolgomorov y Smirnov a un nivel $\alpha = 0.05$, encontrando que no podemos rechazar la hipótesis de que

los datos provengan de distribuciones exponenciales.

Al igual que antes, en la tabla siguiente presentamos sólo las estimaciones de los parámetros de la cola *Enviar* (u. t. = minuto).

Parámetro	$\lambda_{H.bajas}$	$\lambda_{H.medias}$	$\lambda_{H.punta}$
Estimación	0.234	0.254	0.254

En ella observamos que la tasa de servicio es prácticamente idéntica durante toda la jornada laboral siendo sensiblemente menor durante las horas bajas (esto implica que, en estas horas, los servidores tardan más tiempo en atender a los clientes). Podríamos haber considerado únicamente una franja para los tiempos de servicio, pero hemos decidido mantener las originales por coherencia con la estructura de las llegadas.

6. Cálculo de las medidas de eficiencia

Tal y como hemos visto, los parámetros nos dan una visión de cómo funciona el sistema. De todas maneras, en Teoría de Colas, cuando el sistema se encuentra en equilibrio (es decir, cuando su comportamiento se hace independiente del tiempo), es mucho más habitual el utilizar las llamadas medidas de eficiencia (tales como el tiempo de espera o el número de clientes en cola) para describir de una

manera mucho más intuitiva cuál es su comportamiento. Estas medidas nos pueden ser de utilidad, por ejemplo, para decidir aumentar el número de ventanillas abiertas en ciertas horas del día y a qué tipo de clientes asignárselas.

En nuestro caso, comprobamos qué colas se encuentran en esa situación verificando para ello que se cumple la condición de equilibrio, que, en este tipo de modelos, viene determinada por el hecho de que la intensidad de tráfico debe ser menor que la unidad. Si alguna de las colas analizadas no verifica dicha condición significa que, con el tiempo, puede llegar a congestionarse. En particular, para los modelos $M|M|1$ (*Filatelia* y *Banco*) y $M|M|k$ con $k > 1$ (*Enviar* y *Recoger*) esta condición viene

expresada respectivamente por:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad \text{y} \quad \rho = \frac{\lambda}{k\mu} < 1$$

donde ρ es la intensidad de tráfico (tasa media de llegadas/tasa media de servicio por servidor ocupado).

Tal y como podemos observar en el Cuadro 3, es suficiente un servidor para la cola *Filatelia* y otro para la cola *Banco* para atender a los clientes de estos servicios sin que estas colas lleguen a congestionarse de manera excesiva. En otras palabras, se verifica la condición de equilibrio en todas las situaciones.

	FILATELIA			BANCO	
	H. bajas	H. medias	H. punta	Mañana	Tarde
Tasa de llegadas ($\hat{\lambda}$)	0.057	0.115	0.229	0.028	0.015
Tasa de servicio ($\hat{\mu}$)	0.379	0.290	0.290	0.359	0.399
Intensidad de tráfico ($\hat{\rho}$)	0.151	0.396	0.792	0.078	0.037

Cuadro 3: Valores de $\hat{\lambda}$, $\hat{\mu}$ y $\hat{\rho}$ para los modelos *Filatelia* y *Banco* (u. t. = minuto).

En el Cuadro 4 presentamos algunas medidas de eficiencia para estos dos modelos. Los resultados obtenidos confirman que efectivamente una ventanilla para cada cola es suficiente para garantizar un buen servicio. Además, observamos que el mostrador de la cola *Banco* está la mayor parte del tiempo desocupado, mientras que el de *Filatelia* funciona

bastante bien durante todo el día excepto en las horas punta donde el tiempo esperado en la cola es aproximadamente de 13 minutos. Los responsables de la oficina podrían plantearse en este caso destinar un mostrador más para esta cola si consideraran que este tiempo de espera es excesivo.

	FILATELIA			BANCO	
	H. bajas	H. medias	H. punta	Mañana	Tarde
Utilización	15.09 %	39.56 %	79.18 %	7.76 %	3.70 %
Probabilidad de que el sistema esté vacío	0.849	0.604	0.208	0.922	0.963
Longitud esperada de la cola	0.027	0.259	3.011	0.007	0.001
Número esperado en el sistema	0.178	0.655	3.802	0.084	0.038
Tiempo esperado en la cola	0.469	2.258	13.118	0.234	0.096
Tiempo total esperado en el sistema	3.108	5.708	16.568	3.022	2.600
Probabilidad de que un cliente espere	0.151	0.396	0.792	0.078	0.037

Cuadro 4: Medidas de eficiencia para las colas *Filatelia* y *Banco*.

Para finalizar, analizamos la condición de equilibrio en los modelos de las colas *Enviar* y *Recoger*. Por cuestiones de espacio, no vamos a mostrar todas las comprobaciones, pero son varios los casos en los que no se cumple esta condición. Como en estos casos el sistema no alcanza el equilibrio, se hace necesaria la utilización de herramientas de simulación para describir las medidas de eficiencia del sistema. La simulación de la oficina es una futura línea de trabajo y no se encuentra recogida en nuestra primera aproximación al funcionamiento de la oficina.

7. Posibles extensiones

A partir de ahora, nuestro trabajo se centra en la validación de la modelización planteada, para lo cual necesitaremos herramientas de simulación. De esta manera comprobaremos si los modelos que hemos elegido se ajustan al funcionamiento actual de la oficina, a la vez que nos ayudarán a predecir su comportamiento.

Otra de las futuras líneas de trabajo que nos planteamos es la aproximación del funcionamiento de la oficina mediante modelos $M(t)|M(t)|k$, que constituyen la extensión natural de los modelos considerados en este trabajo.

Agradecimientos

Los autores agradecen a Manuel Molina Fernández la cuidadosa lectura de este trabajo y los comentarios realizados que han llevado a esta versión final. Los autores también agradecen a la oficina principal de Correos de la ciudad de Valencia la colaboración prestada en la realización de este trabajo. El segundo autor agradece la financiación del proyecto de investigación MTM 2004-03290 cofinanciado por el Ministerio de Educación y Ciencia y fondos FEDER.

Referencias

- [1] Bhat U. N., Miller G. K. and Rao S. S. (1997). *Statistical Analysis of Queueing Systems. Frontiers in Queueing*, editado por J. H. Dshalalow.
- [2] Kendall D. G. (1951). Some problems in the theory of queues. *DJ. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **13**, 151-185.
- [3] Law M. and Kelton W. D. (2000). *Simulation modeling and analysis*, Mc Graw Hill, 3ª edición.
- [4] Medhi J. (2002). *Stochastic Models in Queueing Theory*, Academic Press, 2ª edición.
- [5] SPSS for Windows, Rel. 11.0.1 (2001). Chicago: SPSS Inc.