Boletín de Estadística e Investigación Operativa
Vol. 26, No. 3, Octubre 2010, pp. 192-207

Investigación Operativa

Location with preferences

Sergio García Quiles
Departamento de Estadística
Universidad Carlos III
✉ sergio.garcia@uc3m.es

Abstract

Many location problems assume that, once facilities have been located, customers will be allocated to the closest open facility. However, this is not guaranteed by the model and, as a consequence, must be explicitly imposed by adding some closest assignment constraints. Moreover, the concept of "closest" is easily extended to the one of "most preferred". In this paper, several classical closest assignment constraints appeared in the literature are analyzed. Then, a model which considers location with most preferred allocation is stated: the Simple Plant Location problem with Order. Finally, some valid inequalities which strengthen this formulation are shown.

Keywords: Location, Simple Plant Location Problem, preferences.
AMS Subject classifications: 90C11, 90B80.

1. Modelos de asignación más cercana

Un *problema de localización de plantas* consiste en, dados un conjunto de plantas potenciales que ofrecerán un servicio y un conjunto de clientes que deben ser servidos desde las plantas, decidir qué plantas conviene abrir y qué clientes deben ser servidos desde qué plantas de modo que se optimice una cierta función objetivo. En el caso de una empresa privada, normalmente es minimizar costes o maximizar beneficios. Cuando se trata de servicios públicos, hay un doble objetivo: minimizar el coste total a la vez que se maximiza el bienestar de los clientes que reciben el servicio. Si ambos valores son medibles en términos de una unidad común (por ejemplo, dinero), los dos criterios pueden combinarse en una única función objetivo; cuando esto no es posible, debe resolverse un problema biobjetivo. Excelentes revisiones sobre modelos de localización pueden encontrarse en ReVelle y Laporte [30] y Drezner y Hamacher [11].

Un elemento fundamental en los problemas de localización de plantas es cómo deben asignarse los clientes a las plantas. Algunas veces la respuesta es implícita al modelo. Por ejemplo, en el problema ampliamente estudiado de localización de p-mediana (Hakimi [18]), el objetivo es minimizar la distancia total que los clientes recorren hasta las plantas. Puesto que no hay otras restricciones, cada cliente es asignado siempre a la planta abierta que tiene más cerca.

Aunque la mayor parte de los modelos de localización de plantas no tienen esta propiedad de asignación más cercana, es una suposición razonable en muchos de ellos. Otro ejemplo en donde los clientes minimizan las distancias recorridas es el caso de los vehículos de respuesta de emergencias. Incluso si un vehículo que no es el más cercano puede proporcionar el servicio dentro de un tiempo de respuesta razonable, no es probable que se comprenda (especialmente, por parte de las personas que necesitan el servicio) por qué la unidad de emergencias más cercanas no acudió en su ayuda. Así pues, cuando se desea (o cuando es un imperativo externo) que la unidad disponible más cercana sirva al cliente, esta propiedad debe incorporarse al modelo a través de *restricciones de asignación más cercana*. Ejemplos en el sector público en donde los clientes son asignados a una planta (centro de servicios) y se les niega el acceso a cualquier otra a través de leyes o decretos son escuelas (Ferland y Guénette [12]), centros de reciclaje (Flahaut et al. [13]) y mesas electorales (Mehrotra et al. [25]).

En Leonardi [23, 24] se afirma que casi todo problema de localización de plantas puede dividirse en dos subproblemas interrelacionados, solucionándose cada uno mediante un operador formal que conoce la propuesta del otro y optimiza su función objetivo particular de acuerdo con la misma. Por un lado, hay un subproblema de localización estricto: el *localizador* determina cuántas plantas se abrirán y sus características (tamaño, ubicación, etc.); por otro, hay un subproblema de asignación: el *asignador* decide qué clientes acudirán a qué plantas. Normalmente, el localizador puede identificarse con la empresa privada o la autoridad pública que proporciona el servicio; el asignador puede ser de nuevo ésta, pero puede ser también el conjunto de los clientes como un todo. Depende de si los clientes tienen libertad de elección o no. En estos modelos, *se asume que el localizador conoce el criterio de optimalidad del asignador.*

El conflicto aparece cuando los clientes se comportan de un modo que no es el más rentable para el localizador. El comportamiento de un determinado cliente depende de muchos factores: rasgos del cliente (edad, sexo, educación, nivel económico. . .), características del lugar (coste de producción, disponibilidad de los productos. . .) y la ruta entre el cliente y el lugar (coste de transporte, peligros de la ruta. . .). Toda esta información debe trasladarse a un conjunto de restricciones que se añaden al modelo de localización original.

1.1. Aplicaciones

Como ya se ha indicado, muchos modelos de localización carecen de la propiedad de asignación más cercana. En Balinski [1], en el Problema de Localización de Plantas Simple (en inglés, *Simple Plant Location Problem*, SPLP), el coste total a minimizar (equivalentemente, el beneficio total a maximizar) es una combinación de costes de apertura y costes de asignación. Así, una solución óptima puede conducir a asignaciones a plantas que no son las más cercanas de sus respectivos clientes (véase ReVelle [29]). La razón por la que esto sucede es que el coste total para un cliente arbitrario es una combinación de subcostes de producción y de transporte. Así, un menor coste unitario de producción por parte de una planta distinta de la más cercana puede resultar interesante para la empresa que proporciona el servicio.

Otro campo interesante de aplicaciones para las restricciones de asignación más cercana son los modelos de plantas con capacidades, pues la presencia de capacidades puede conducir con facilidad a asignaciones que no son la más cercana. Algunos ejemplos de tales aplicaciones son el problema de p-mediana con capacidades (Neebe [27]) y los modelos de cubrimientos maximales con capacidades (Current y Storbeck [9]; Pirkul y Schilling [28]). Otros modelos interesantes son la localización de puntos estratégicos para ambulancias minimizando el tiempo de tránsito ponderado por un cierto "circuito" (Berlin et al. [2]) y el modelo de mediana de asignación vectorial (Weaver y Church [34]), un problema de p-mediana donde puede que las plantas más cercanas no estén siempre disponibles.

En Gerrard y Church [16] se resume de un modo muy acertado el espíritu de las restricciones de asignación más cercana: "la confianza pública en y la aceptación de las decisiones de localización (en especial para los servicios de emergencia) depende de que se perciba la equidad y la eficacia de la provisión del servicio. La asignación más cercana es una regla de asignación que es una guía razonable y lógica para muchas aplicaciones. Si se proponen reglas complejas y aparentemente inefectivas, es fácil encontrarse con una oposición pública significativa". No obstante, la asignación más cercana no tiene por qué ser siempre adecuada. En el mundo real, las plantas pueden ser a veces suficientemente atractivas como para conducir a asignaciones que no son la más cercana (por ejemplo, los grandes centros comerciales). Es cierto que existen aproximaciones más realistas que definen asignaciones basadas en un modelo interactivo (Hodgson [22]; Fotheringham y O'Kelly [14]), pero la asignación más cercana puede verse como el tipo más sencillo de "asignación de demanda estructural".

1.2. Restricciones de asignación más cercana

Consideremos un conjunto de clientes I, $|I| = m$, y un conjunto de plantas potenciales J, $|J| = n$. Se tiene la siguiente información inicial: a_i es la demanda del cliente i, f_{ij} es el beneficio unitario del cliente i al ser servido desde la planta j, d_{ij} es la distancia desde el cliente i hasta la planta j y $p \geq 1$ es el número de plantas que hay que ubicar. Además, las variables y_j son variables binarias que toman valor uno si la planta j está abierta (y cero en caso contrario) y las variables x_{ij} representan la fracción de demanda del cliente i servida desde la planta j. El siguiente modelo de localización de plantas se toma como base para el análisis posterior de las distintas restricciones de asignación más cercana que pueden encontrarse en la literatura:

$$\left\{\begin{array}{lll}\text{Max.} & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i f_{ij} x_{ij} & \\ \text{s.a} & \sum_{j\in J} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in I, & (1.1)\\ & 0 \leq x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in I, \forall j \in J, & (1.2)\\ & \sum_{j\in J} y_j = p, & (1.3)\\ & y_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in J, & \end{array}\right.$$

Las desigualdades (1.1) evitan que se sirva más demanda de la solicitada y permiten que no se sirvan totalmente algunas demandas en caso de que no resulten provechosas. Las desigualdades (1.2), que evitan que los clientes sean servidos desde plantas sin abrir, se denominan *desigualdades de Balinski*.

Restricción de Rojeski-ReVelle

Normalmente hay casos en los que hay que exigir al SPLP restricciones de asignación más cercana, siendo el primero en la literatura el Problema de Mediana con Restricción de Presupuesto, estudiado en Rojeski y ReVelle [31]. Como en el SPLP, este problema minimiza la distancia total recorrida por los clientes, existiendo además una limitación sobre el presupuesto en el que se puede incurrir. Al poder aparecer asignaciones que no son la más cercana, se añade la siguiente *restricción de Rojeski-ReVelle* (RR) para evitarlo:

$$x_{ij} \geq y_j - \sum_{k\in C_{ij}} y_k \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \tag{1.4}$$

donde $C_{ij} = \{k \in J \,/\, d_{ik} < d_{ij}\}$, es decir, el conjunto de plantas que están más cerca del cliente i que la planta j. Esta restricción tiene una interpretación sencilla: dado un cliente i y una planta abierta j,

- si ninguna planta más cercana a i está abierta ($\sum_{t\in C_{ij}} y_t = 0$), entonces el cliente i es servido desde la planta j ($x_{ij} \geq 1$);
- si hay alguna otra planta abierta j' más cercana a i que j, entonces la restricción RR (1.4) no tiene ningún efecto.

En consecuencia, cada cliente es asignado a su planta abierta más cercana (considérese la desigualdad RR de la planta abierta más próxima al cliente).

En presencia de una restricción de p-mediana tal como (1.3), basta con definir las restricciones (1.4) para las $n-p+1$ plantas más cercanas a cada cliente. Esto conduce a una reducción en el número de restricciones. Esta metodología se aplicó originalmente al problema de la p-mediana en Rosing et al. [32].

Algunas propiedades de la restricción de Rojeski-ReVelle son:

i) Cuando la solución óptima tiene al menos una planta abierta (como sucede en el caso de la p-mediana), las restricciones (1.1) son verificadas con igualdad, pues cada cliente es servido desde la planta abierta más cercana. Más aún, no puede haber asignaciones parciales (es decir, asignaciones incompletas a plantas distintas).

ii) La restricción RR hace que las desigualdades de Balinski (1.2) sean redundantes.

iii) Aparecen dificultades en caso de empate en la distancia de dos o más plantas. En Gerrard y Church [16] puede encontrarse una discusión más profunda sobre esta cuestión.

Restricción de Wagner-Falkson

En Wagner y Falkson [33] se introduce un modelo de SPLP cuya función objetivo a maximizar es el bienestar social (excedente de los consumidores más excedente del productor) en un marco de servicio público. Dentro de este contexto es obligatorio considerar cómo los clientes (la gente) se asignarían a los distintos servicios. Es lo que ellos llaman "servir a todos los que lleguen" (en inglés, *serve all comers*), es decir, los clientes son libres de elegir el servicio que les atrae más (el más cercano). A pesar de tener conocimiento de la restricción RR (1.4), definen una nueva restricción de asignación más cercana: la *restricción de Wagner-Falkson* (WF)

$$\sum_{k \in R_{ij}} x_{ik} + y_j \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \tag{1.5}$$

donde $R_{ij} = \{s \in J \,/\, d_{is} > d_{ij}\}$, es decir, el conjunto de plantas más alejado de i que la planta j. Significa que si la planta j está abierta, entonces el cliente i no puede ser asignado a plantas más alejadas de i que esta planta j.

Pueden destacarse algunas diferencias entre la restricción de Wagner-Falkson y la restricción de Rojeski-ReVelle:

i) A diferencia de la restricción RR, la restricción WF no fuerza la asignación simple. Más aún, esta es la razón por la que Wagner y Falkson justifican la creación de una restricción de asignación más cercana alternativa a la de Rojeski-Revelle (véase Wagner y Falkson [33]). No estar obligado a hacer asignaciones completas tiene mucho interés en algunas aplicaciones (por ejemplo, en problemas con limitaciones de capacidad).

ii) Las desigualdades de Balinski (1.2) no son redundantes con la restricción de Wagner-Falkson.

iii) En caso de empate entre las distancias de dos o más plantas a un cliente, la desigualdad (1.5) no tiene los problemas que aparecen en la de Rojeski-ReVelle. Obsérvese que la restricción WF decide si se permiten o no asignaciones a plantas que están más lejos, pero no limita la asignación a plantas *equidistantes*.

Restricción de Dobson-Karmarkar

Dobson y Karmarkar [10] es un trabajo sobre localización competitiva en una red: se fijan los precios y las demandas y hay que ubicar un número de centros bajo unas ciertas condiciones de estabilidad (por ejemplo, restringiendo la entrada de nuevos vendedores) de modo que el beneficio se maximice. Una vez más, la combinación de costes de producción y de transporte puede conducir a asignaciones que no son del tipo más cercano. No obstante, los autores del trabajo desean asumir un comportamiento en el que los clientes eligen el centro abierto más cercano. Con este fin, introducen la *restricción de Dobson-Karmarkar* (DK)

$$x_{ij} + y_k \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in C_{ij}. \tag{1.6}$$

Básicamente, esta restricción impide que un cliente i sea asignado a una planta abierta j si hay otra planta abierta k más cercana a i que la propia j.

Algunos hechos interesantes a destacar acerca de (1.6) son:

i) Al igual que la restricción de Wagner-Falkson, los empates no son problemáticos. De todos modos, en Dobson y Karmarkar [10] se impone explícitamente que no existen empates entre las distancias.

ii) Se permiten asignaciones parciales.

iii) A diferencia de las otras restricciones que aquí se muestran y cuyo número es $\mathcal{O}(n^2)$, la restricción DK tiene el considerable inconveniente de que tiene $\mathcal{O}(n^3)$ desigualdades.

Restricción de Church-Cohon/Hanjoul-Peeters

Otra forma de forzar la asignación más cercana puede encontrarse en Hanjoul et al. [19] en un modelo para el sector privado: debe maximizarse el beneficio bajo una política de precios de molienda uniformes (en inglés, *uniform mill pricing*), es decir, los clientes deciden cómo será la asignación y, puesto que todas las plantas son igualmente atractivas (ya que el producto tiene el mismo precio en cada planta), viajan a la planta abierta más cercana para recibir el servicio. Para garantizar que efectivamente cada cliente es asignado a la planta abierta más cercana, es necesario incluir una restricción de asignación más cercana. Esta restricción, usada en estudios de ubicación de servicios energéticos (Church y Cohon [7]) y en una versión modificada del SPLP (Hanjoul y Peeters [20]), es la siguiente *restricción de Church-Cohon/Hanjoul-Peeters* (CCHP)

$$\sum_{k \in Q_{ij}} x_{ik} \geq y_j \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \tag{1.7}$$

donde $Q_{ij} = \{k \in J \,/\, d_{ik} \leq d_{ij}\}$. La restricción significa que si la planta j está abierta, entonces el cliente i debe ser asignado a una planta que no está más lejos que j.

Es fácil darse cuenta de que:

i) Los empates de proximidad no son problemáticos.

ii) Si la solución óptima contiene al menos una planta abierta, entonces los clientes son servidos totalmente, es decir, las desigualdades (1.1) se satisfacen con igualdad.

iii) No obstante, están permitidas asignaciones fraccionales.

En Hanjoul y Peeters [20] se hizo un avance sencillo, pero, al mismo tiempo, bastante notable: la generalización del término "más cercano" al de "más preferido". Introduciendo una ordenación de preferencias, el concepto de *asignación más cercana* puede extenderse al de *asignación más preferida*, donde las preferencias pueden venir dadas por cualquier pauta (en particular, por la de proximidad). En consecuencia, cualquiera de las restricciones de asignación más cercana puede extenderse considerando simplemente los órdenes de las preferencias. En particular, en la siguientes secciones se estudia con más detalle las desigualdades CCHP que se acaba de mencionar.

2. SPLPO: formulación y propiedades

El Problema de Localización de Plantas Simple (SPLP) es un problema de optimización combinatoria bien conocido: se debe seleccionar qué plantas abrir de entre un conjunto de candidatas y cada uno de los clientes de un conjunto dado debe asignarse a una de las plantas abiertas de manera que el coste total (localización más asignación) sea mínimo. En la literatura pueden encontrarse muchos trabajos sobre este problema (Cho et al. [4, 5]; Cornuéjols et al. [8]; Goldengorin et al. [17]; Mladenovic et al. [26], etc.).

En el SPLP pueden distinguirse dos elementos: uno de *localización* (la empresa que decide qué plantas se abrirán) y otro de *asignación* (el proceso de decidir qué clientes acuden a qué plantas). En esta aproximación clásica, se supone que o bien el localizador y el asignador son el mismo o bien el asignador (los clientes de manera global) conoce el criterio de optimalidad del localizador y está de acuerdo con él. Esto ocurre, por ejemplo, cuando una empresa reparte un producto a los clientes desde distintas plantas o cuando el cliente se ve obligado a una planta predispuesta a causa de una ley o decreto.

Sin embargo, si los clientes viajan a las plantas para recibir el servicio, entonces no tienen ninguna obligación sobre a qué planta acudir. Esto significa que, una vez han sido abiertas las plantas, lo que el localizador desea por parte de los clientes puede que no coincida con cómo ellos se van a comportar y, en consecuencia, se vea abocado a una solución con peor valor (mayor coste o menor beneficio). Diversas razones justificándolo se han introducido ya en la sección anterior.

Por lo tanto, una forma de resolver esta situación es considerar una formulación que tenga en cuenta las preferencias de los clientes, como se hizo en Hanjoul y Peeters [20] en el denominado *Problema de Localización de Plantas Simple con Orden* (en inglés, *Simple Plant Location Problem with Order*, SPLPO). En el modelo que se propone en dicho trabajo, cada cliente ordena las distintas plantas potenciales según lo atractivas que le resultan y, una vez se ha decidido cuáles van a ser abiertas, acude a la que más le gusta de entre todas las abiertas. El modelo postula que *el localizador conoce el orden de estas preferencias*. Contrariamente a lo que sucede con el SPLP, que ha sido ampliamente estudiado en la literatura, hay pocas referencias al estudio del SPLPO: Hanjoul y Peeters [20], donde el problema se introduce por primera vez y se sugiere un heurístico muy básico para resolver problemas bastante pequeños y Hansen et al. [21], donde una formulación binivel para este problema se convierte en una lineal de varias formas, siendo la más robusta la misma que aparece en el trabajo de Hanjoul y Peeters. Recientemente se ha estudiado dicho problema con mucho más detalle (véanse, por ejemplo, García [15] y Cánovas et al. [3]).

Aunque, como ya se ha dicho, algunos trabajos anteriores tratan la noción de asignación más cercana (la restricción RR en Rojeski y ReVelle [31], la restricción WF en Wagner y Falkson [33] o la restricción DK en Dobson y Karmarkar [10]), es en Hanjoul y Peeters [20] en donde se extiende la noción al considerar el concepto de preferencias de los clientes.

A continuación, se mostrará la formulación del SPLPO junto con algunas propiedades.

2.1. Formulación y notación

Se considera un conjunto I de clientes, $|I| = m$, y un conjunto J de plantas, $|J| = n$. Existen también costes $c_{ij} \geq 0$ asociados a satisfacer toda la demanda del cliente i desde la planta j y costes $f_j \geq 0$ por abrir una planta en el nodo j.

Definición 2.1. *Sean $i \in I$, $k, j \in J$. Se dice que j* es i-mejor que k *si el cliente i prefiere la planta j a la planta k. Este hecho se denotará por $j >_i k$. Sin ningún problema, se generaliza el resto de desigualdades usuales a este orden de preferencias.*

A lo largo del trabajo, se supone que las preferencias son estrictas. Por lo tanto, si $k =_i j$ entonces $k = j$.

Las variables habituales siguientes se usan en el modelo: x_{ij} es la fracción de la demanda del cliente i que se sirve desde la planta j, mientras que las variables binarias y_j valen uno si la planta j está abierta (y cero en caso contrario).

La siguiente formulación se propuso en Hanjoul y Peeters [20]:

$$
(\text{SPLPO})\begin{cases}
\text{Min.} & \displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} + \sum_{k\in J} f_k y_k & & & & \\
\text{s.a} & \displaystyle\sum_{j\in J} x_{ij} & = & 1 & \forall i \in I, & (2.1)\\
 & x_{ij} & \leq & y_j & \forall i \in I, j \in J, & (2.2)\\
 & \displaystyle\sum_{\{k\,/\,k\geq_i j\}} x_{ik} & \geq & y_j & \forall i \in I, j \in J, & (2.3)\\
 & x_{ij} & \geq & 0 & \forall i \in I, j \in J, & (2.4)\\
 & y_j & \in & \{0,1\} & \forall j \in J. & (2.5)
\end{cases}
$$

Como puede comprobarse, se trata de la formulación clásica del SPLP junto con la familia de desigualdades (2.3), la familia que modeliza las preferencias: si una planta j está abierta, entonces todo cliente i será servido o bien por j o bien por una planta que el cliente i prefiera estrictamente a j (de acuerdo con nuestra terminología, por una planta i-mejor que j). Nos referiremos a estas desigualdades como *restricciones de preferencias.*

Obsérvese que si se define el siguiente criterio de preferencias:

$$j \geq_i k \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} \leq c_{ik},$$

entonces el problema que se obtiene es el SPLP.

Además, análogamente a lo que sucede con el SPLP, puesto que no se consideran capacidades, existe siempre una solución óptima cuyas variables x_{ij} toman valores binarios.

Ahora, el conjunto $W(i,j)$, $i \in I$, $j \in J$, se define como el conjunto de plantas que son estrictamente i-peores que j, es decir,

$$W(i,j) = \{k \in J \,/\, k <_i j\}.$$

Así, usando la igualdad (2.1), las restricciones de preferencia (2.3) pueden escribirse como

$$\sum_{k\in W(i,j)} x_{ik} + y_j \leq 1. \tag{2.6}$$

Finalmente, definimos también los siguientes conjuntos:

$$
\begin{aligned}
&W'(i,j) = W(i,j) \cup \{j\} = \{k \in J \;:\; k \leq_i j\},\\
&\overline{W(i,j)} = J\backslash W(i,j) = \{k \in J \;:\; k \geq_i j\},\\
&\overline{W'(i,j)} = J\backslash W'(i,j) = \{k \in J \;:\; k >_i j\}.
\end{aligned}
$$

2.2. Análisis de las restricciones de asignación más cercana

Una vez que las desigualdades de preferencia (2.3) han sido transformadas en (2.6), analicemos las distintas restricciones de asignación más cercana introducidas anteriormente.

Básicamente, puede verse que si todo cliente es servido completamente, es decir, $\sum_{j\in J} x_{ij} = 1 \,\forall j \in J$, y se asume que las preferencias son estrictas (como es el caso), el estudio de las cuatro familias de restricciones puede reducirse al estudio de las desigualdades (2.6), la restricción CCHP (o, equivalentemente, las desigualdades (2.3)).

Restricción de Rojeski-ReVelle

Recuérdese que la desigualdad RR es $x_{ij} \geq y_j - \sum_{k\in C_{ij}} y_k$. Puesto que las preferencias definidas en el SPLPO generalizan el papel desempeñado por las distancias $\{d_{ij}\}$ usadas en la sección anterior, entonces

$$C_{ij} = \{k \in J \,/\, d_{ik} < d_{ij}\} = \{k \in J \,/\, k >_i j\}\,.$$

Así, se tiene que $C_{ij} = \overline{W'(i,j)}$. Además, obsérvese que:

- las preferencias son estrictas, es decir, $W'(i,j) = W(i,j) \cup \{j\}$, y que
- $x_{ij} \leq y_j \;\; \forall i \in I, \forall j \in J$ (desigualdad (2.2)).

Por lo tanto:

$$x_{ij} + \sum_{k\in C_{ij}} y_k \geq x_{ij} + \sum_{k\in C_{ij}} x_{ik} = x_{ij} + \sum_{k\in\overline{W'(i,j)}} x_{ik} = \sum_{k\in\overline{W(i,j)}} x_{ik}.$$

En consecuencia, la restricción de Rojeski-ReVelle $x_{ij} + \sum_{k\in C_{ij}} y_k \geq y_j$ está dominada por la desigualdad de preferencia (2.3) $\sum_{k\in\overline{W(i,j)}} x_{ik} \geq y_j$.

Restricción de Wagner-Falkson

Como la restricción WF es $\sum_{k\in R_{ij}} x_{ik} + y_j \leq 1$ y, en el contexto de preferencias, se tiene que

$$R_{ij} = \{k \in J \,/\, d_{ik} > d_{ij}\} = \{k \in J \,/\, k <_i j\} = W(i,j),$$

entonces la restricción se reescribe como $\sum_{k\in W(i,j)} x_{ik} + y_k \leq 1$, que es exactamente la desigualdad de preferencias (2.6).

Restricción de Dobson-Karmarkar

Recuérdese que la restricción DK es $x_{ik} + y_j \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall k \in J, \forall j \in C_{ik}$, donde $C_{ik} = \overline{W'(i,k)}$. Es fácil comprobar que $j \in \overline{W'(i,k)}$ si, y sólo si, $k \in W(i,j)$. Si fijamos un cliente $i \in I$ y una planta $j \in J$, entonces las variables $\{x_{ik}\}$ de la restricción DK pueden agregarse hasta obtener $\sum_{k\in W(i,j)} x_{ik} + y_j \leq 1$, que es la restricción de preferencias (2.6).

Puede así concluirse que, bajo las condiciones suficientemente generales anteriormente expuestas, el estudio de la restricción de Rojeski-ReVelle (por dominancia), la de Wagner-Falkson (por equivalencia), la de Dobson-Karmarkar (por agregación) y la de Church-Cohon/Hanjoul-Peeters (por equivalencia) se reducen al estudio de la restricción de preferencias (2.6).

3. Desigualdades válidas para el SPLPO

La formulación original del SPLPO (2.1)-(2.5) no es demasiado robusta: lleva mucho tiempo resolverla y se obtienen huecos de integridad muy grandes (Cánovas et al. [3]). Por lo tanto, debe fortalecerse. A continuación se citan algunas desigualdades que permiten reforzar la formulación.

La siguiente familia de desigualdades permite reforzar la formulación original: dominan estrictamente las desigualdades de preferencias (2.3). Sin embargo, hay un número cuadrático de ellas, por lo que no deben usarse todas para sustituirlas directamente debido al considerable incremento en el tamaño del modelo.

Proposición 3.1 (Preferencias con dos clientes)**.** *Sean* $i_1, i_2 \in I, i_1 \neq i_2$, *y* $j \in J$. *Se tiene que*

$$\sum_{k \in W(i_1,j)} x_{i_1 k} + \sum_{k \in W(i_2,j) \setminus W(i_1,j)} x_{i_2 k} + y_j \leq 1. \tag{3.1}$$

El caso $W(i_1,j) \cap W(i_2,j) = \emptyset$ es de especial interés:

Corolario 3.1. *Sean* $i_1, i_2 \in I$ *y* $j \in J$. *Si*

$$W(i_1,j) \cap W(i_2,j) = \emptyset,$$

entonces se tiene que

$$\sum_{k \in W(i_1,j)} x_{i_1 k} + \sum_{k \in W(i_2,j)} x_{i_2 k} + y_j \leq 1. \tag{3.2}$$

Por lo tanto, si $W(i_1,j)$ y $W(i_2,j)$ no tienen plantas en común, entonces *una* única restricción de preferencias de 2 clientes *domina dos* restricciones de preferencias de 1 cliente.

Por otra parte, las desigualdades de preferencias para dos clientes pueden generalizarse para cualquier conjunto de clientes.

Proposición 3.2 (Preferencias con s clientes)**.** *Sean* $i_1, \ldots, i_s \in I$ *y* $j \in J$. *Se tiene que*

$$\sum_{k \in W(i_1,j)} x_{i_1 k} + \sum_{t=2}^{s} \sum_{k \in W(i_t,j) \setminus \left(\bigcup_{q=1}^{t-1} W(i_q,j)\right)} x_{i_t k} + y_j \leq 1. \tag{3.3}$$

Además, estudiando la relación entre determinados conjuntos de preferencias, es posible establecer una jerarquía entre ciertas variables x_{ij}.

Proposición 3.3 (Dominancia)**.** *Sean* $i_1, i_2 \in I$ *y* $j \in J$*. Si*

$$W(i_1, j) \subseteq W(i_2, j),$$

entonces se tiene que

$$x_{i_1 j} \leq x_{i_2 j}. \tag{3.4}$$

En especial, cuando los conjuntos $W(i_1, j)$ y $W(i_2, j)$ coinciden, la desigualdad (3.4) pasa a ser una igualdad.

Corolario 3.2. *Sean* $i_1, i_2 \in I$ *y* $j \in J$*. Si*

$$W(i_1, j) = W(i_2, j),$$

entonces se tiene que

$$x_{i_1 j} = x_{i_2 j}. \tag{3.5}$$

De hecho, las igualdades (3.5) son las “condiciones de asignación equivalente” descritas en [6] para el problema de localización de p-mediana. Luego las desigualdades de dominancia (3.4) que se acaban de introducir pueden verse como una generalización de estas condiciones de asignación equivalente, siendo válidas no solo para el caso de la p-mediana sino también para el problema general en el que no se ha fijado el número de plantas a abrir.

Una consecuencia bastante importante es que no todas las desigualdades $x_{ij} \leq y_j$ serán facetas, una propiedad básica en el SPLP. Por lo tanto, aunque parecen problemas muy similares, vemos aquí que el SPLP y el SPLPO tienen diferencias notables.

Otro hecho a destacar es que no es una buena idea sustituir cada desigualdad dominada $x_{ij} \leq y_j$ por todas las desigualdades $x_{i_1 j} \leq x_{i_2 j}$ disponibles, pues hay muchas más de este segundo tipo que de las primeras. El siguiente ejemplo ilustra la situación.

Ejemplo 3.1. *Sea* j *una planta arbitraria y supóngase que el árbol de la Figura 1 representa los diferentes contenidos maximales propios de un subconjunto de variables* $\{x_{1j}, \ldots, x_{10\,j}\}$*: cada nodo* i *representa el conjunto* $W(i, j), i = 1, \ldots, 10$*, y los arcos representan contenidos maximales propios, con las flechas indicando el sentido del contenido. Por ejemplo,* $W(5, j) \subsetneq W(8, j)$ *y no existe* $h \in I$ *tal que* $W(5, j) \subsetneq W(h, j) \subsetneq W(8, j)$*.*

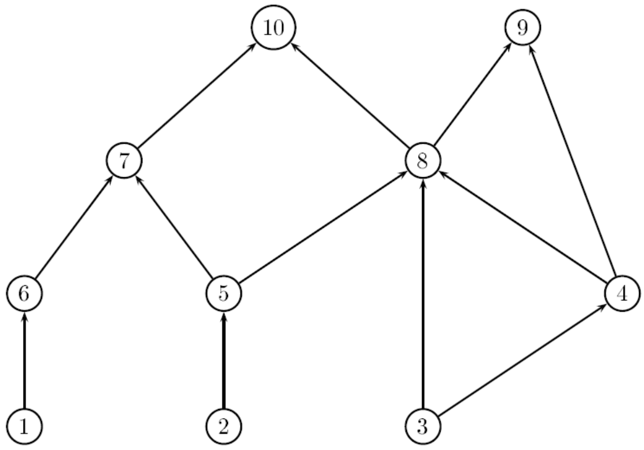

Figura 1: Un "árbol" de desigualdades válidas

Tomando estas diez variables y aplicando la Proposición 3.3 cada vez que sea posible, hasta veinticuatro desigualdades de dominancia pueden generarse, tantas como predecesores distintos tienen las variables:

$$\sum_{i=1}^{8} |predecesores(i)| = 3 + 5 + 4 + 3 + 4 + 2 + 1 + 2 = 24,$$

que son

$$\begin{array}{cccc}
x_{1j} \leq x_{6j}, & x_{2j} \leq x_{9j}, & x_{4j} \leq x_{8j}, & x_{5j} \leq x_{10\,j}, \\
x_{1j} \leq x_{7j}, & x_{2j} \leq x_{10\,j}, & x_{4j} \leq x_{9j}, & x_{6j} \leq x_{7j}, \\
x_{1j} \leq x_{10\,j}, & x_{3j} \leq x_{4j}, & x_{4j} \leq x_{10\,j}, & x_{6j} \leq x_{10\,j}, \\
x_{2j} \leq x_{5j}, & x_{3j} \leq x_{8j}, & x_{5j} \leq x_{7j}, & x_{7j} \leq x_{10\,j}, \\
x_{2j} \leq x_{7j}, & x_{3j} \leq x_{9j}, & x_{5j} \leq x_{8j}, & x_{8j} \leq x_{9j}, \\
x_{2j} \leq x_{8j}, & x_{3j} \leq x_{10\,j}, & x_{5j} \leq x_{9j}, & x_{8j} \leq x_{10\,j}.
\end{array}$$

Sin embargo, más de la mitad de estas desigualdades están dominadas por otras que pertenecen a esta misma lista. Por ejemplo, la desigualdad $x_{3j} \leq x_{8j}$ está dominada por $x_{3j} \leq x_{4j}$ porque la desigualdad $x_{4j} \leq x_{8j}$ también es válida.

En nuestro dibujo, las desigualdades no dominadas están representadas por arcos que conectan dos nodos y que no aceptan un camino más largo.

Es posible encontrar diez de dichas desigualdades:

$$\begin{array}{cc}
x_{1j} \leq x_{6j}, & x_{5j} \leq x_{8j}, \\
x_{2j} \leq x_{5j}, & x_{6j} \leq x_{7j}, \\
x_{3j} \leq x_{4j}, & x_{7j} \leq x_{10\,j}, \\
x_{4j} \leq x_{8j}, & x_{8j} \leq x_{9j}, \\
x_{5j} \leq x_{7j}, & x_{8j} \leq x_{10\,j}.
\end{array}$$

Luego, 14 de las 24 desigualdades son redundantes.

Estas desigualdades válidas son muy útiles y su implementación es bastante sencilla. Una explicación sobre cómo hacerlo se puede encontrar en Cánovas et al. [3].

Más detalles e información sobre el SPLPO pueden encontrarse en dicho artículo y en García [15].

Agradecimientos

La investigación del autor ha sido financiada a través del Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica (proyecto MTM2009-14039-C06-C04) y la Fundación Séneca (proyecto 08716/PI/08).

Referencias

[1] Balinski M.L. (1965). Integer programming: methods, uses and computation. *Management Science Series A*, 12:253–313.

[2] Berlin G.N., ReVelle C.S. y Elzinga D.J. (1976). Determining ambulance-hospital locations for on-scene and hospital services. *Environment and Planning A*, 8:553–561.

[3] Cánovas L., García S., Labbé M. y Marín A. (2007). *A strengthened formulation for the simple plant location problem with order*. Operations Research Letters 35 (2):141–150.

[4] Cho D.C., Johnson E.L., Padberg M.W. y Rao M.R. (1983). On the uncapacitated plant location problem I: valid inequalities and facets. *Mathematics of Operations Research*, 8 (4):579–589.

[5] Cho D.C., Padberg M.W. y Rao M.R. (1983). On the uncapacitated plant location II: facets and lifting theorems. *Mathematics of Operations Research*, 8 (4):590–612.

[6] Church R.L. (2003). COBRA: a new formulation for the p-median location problem. *Annals of Operations Research*, 122:103-120.

[7] Church R.L. y Cohon J.L. (1976). Multiobjective location analysis of regional energy facility siting problems. Technical report, U.S. Energy Research and Development Administration (BNL 50567).

[8] Cornuéjols G., Fisher M.L. y Nemhauser G.L. (1977). On the uncapacitated facility location problem. *Annals of Discrete Mathematics*, 1:163–177.

[9] Current J. y Storbeck J. (1988). Capacitated covering models. *Environment and Planning B*, 15:153–164.

[10] Dobson G. y Karmarkar U.S. (1987). Competitive location on a network. *Operations Research*, 35:565–574.

[11] Drezner Z. y Hamacher H.W. (editores). (2001). *Facility location*. Springer Verlag.

[12] Ferland J.A. y Guénette G. (1990). Decision support system for the school districting problem. *Operations Research*, 38 (1):15–21.

[13] Flahaut B., Laurent M.A. y Thomas I. (2002). Locating a community recycling center within a residential area: a Belgian case study. *The Professional Geographer*, 54 (1):67–82.

[14] Fotheringham A.S. y O'Kelly M.E. (1989). *Spatial interaction models: formulations and applications*. Kluwer Academic.

[15] García S. (2006). *Advances in Discrete Location*. Tesis doctoral.

[16] Gerrard R.A. y Church R.L. (1996). Closest assignment constraints and location models: properties and structure. *Location Science*, 4 (4):251–270.

[17] Goldengorin B., Ghosh D. y Siersksma G. (2004). Branch and peg algorithms for the simple plant location problem. *Computers and Operations Research*, 31 (2):241–255.

[18] Hakimi S.L. (1964). Optimum locations of switching centers and absolute centers and medians of a graph. *Operations Research*, 11:450–459.

[19] Hanjoul P., Hansen P., Peeters D. y Thisse J.F. (1990). Uncapacitated plant location under alternative spatital price policies. *Management Science*, 36: 41–57.

[20] Hanjoul P. y Peeters D. (1987). A facility location problem with clients' preference orderings. *Regional Science and Urban Economics*, 17:451–473.

[21] Hansen P., Kochetov Y. y Mladenovic N. (2004). Lower bounds for the uncapacitated facility location problem with user preferences. *Les cahiers du GERAD*, G-2004-24.

[22] Hodgson M.J. (1978). Toward more realistic allocation in location-allocation models: an interaction approach. *Environment and Planning A*, 10:1273–1285.

[23] Leonardi G. (1981). A unifying framework for public facility location problems - part 1: A critical overview and some unsolved problems. *Environment and Planning A*, 13 (8):1001–1028.

[24] Leonardi G. (1981). A unifying framework for public facility location problems - part 2: Some new models and extensions. *Environment and Planning A*, 13 (9):1085–1108.

[25] Mehrotra A., Johnson E.L. y Nemhauser G.L. (1998). An optimization based heuristic for political districting. *Management Science*, 44 (8):1100–1114.

[26] Mladenovic N., Brimberg J. y Hansen P. (2006). A note on duality gap in the simple plant location problem. *European Journal of Operational Research*, 174 (1):11–22.

[27] Neebe A.W. (1978). A branch and bound algorithm for the p-median transportation model. *Journal of the Operational Research Society*, 29:989–995.

[28] Pirkul H. y Schilling D.A. (1991). The maximal covering location problem with capacities on total workload. *Management Science*, 37:233–248.

[29] ReVelle C. (1987). *Handbook of Regional and Urban Economics: Volume 2 Urban Economics*, capítulo "Urban public facility location", 1053–1096. Elsevier Science.

[30] ReVelle C.S. y Laporte G. (1996). The plant location problem: new models and research prospects. *Operations Research*, 44 (6):864–874.

[31] Rojeski P. y ReVelle C.S. (1970). Central facilities location under an investment constraint. *Geographical Analysis*, 2:343–360.

[32] Rosing K.E., ReVelle C.S. y Rosing-Vogelaar H. (1979). The p-median and its linear programming relaxation: an approach to large problems. *Journal of the Operational Research Society*, 30:815–823.

[33] Wagner J.L. y Falkson L.M. (1975). The optimal nodal location of public facilities with price-sensitive demand. *Geographical Analysis*, 7:69–83.

[34] Weaver J.R. y Church R.L. (1985). A median location model with non-closest facility service. *Transportation Science*, 19:58–74.

Sobre el autor

Sergio García Quiles es Doctor en Matemáticas por la Universidad de Murcia (2006). Actualmente es Profesor Ayudante Doctor en la Universidad Carlos III de Madrid. Sus líneas de investigación abarcan diversos problemas de Optimización Entera y Combinatoria, en especial en el campo de Localización Discreta: localización de concentradores, localización de plantas con orden y problemas de p-mediana. En 2009 recibió el Premio Ramiro Melendreras al mejor trabajo presentado por un joven investigador en el XXXI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa.