Boletín de Estadística e Investigación Operativa
Vol. 26, No. 3, Octubre 2010, pp. 218-237

Historia y Enseñanza

The income distribution. A theory of Fréchet

Marc Barbut
Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales (CAMS)
École des Hautes Études en Sciences Sociales-Paris
✉ mbarbut@ehess.fr

Abstract

The aim of this work is to make a historical review of the Fréchet work related to the income distribution and his attempts to improve Pareto's distribution.

Keywords: Income, Fréchet, Pareto distribution.
AMS Subject classifications: 01A60, 01A90.

1. Los antecendentes

Maurice Fréchet (1878-1975) fue un creador en matemáticas puras. Es a él a quien se debe el concepto de *espacio abstracto*, que está en la base de la topología general.

Pero también trabajó mucho en *cálculo de probabilidades* y en *estadística*, tanto desde un punto de vista teórico como práctico. Investigó aplicaciones en campos muy variados e importantes tanto de las ciencias sociales como de las ciencias de la naturaleza. La ley de Pareto para el reparto de la riqueza y de la renta es uno de sus temas favoritos. En lo que concierne al reparto de la renta, se propone en particular mejorar la fórmula de Pareto, ya sea con "leyes" propuestas por otros estadísticos (O. Ammon, F. Vinci, L. Amoroso, E. Halphen, D. McAlister y R. Gibrat, etc...) o con fórmulas de su propia invención.

Todo esto da lugar a cinco publicaciones, escalonadas de 1925 a 1949. Pero no todo fueron esos trabajos publicados.

Maurice Fréchet ha legado a la Academia de Ciencias de Paris un gran archivo. Entre él, encontramos una caja (numerada como F-10), que está dedicada a la Estadística. En ella se encuentran especialmente numerosos textos, manuscritos la mayor parte, de difícil datación, pero que parecen escalonarse entre finales de los años 1930 a 1960. Entre éstos, no sólo había borradores y manuscritos de los artículos publicados, sino también trabajos originales, que eran inéditos. Existen varios relacionados con las investigaciones de Fréchet sobre la distribución de las rentas, y sus ensayos sobre la mejora de la ley de Pareto. En este artículo vamos a tratar la parte principal de estos ensayos.

A continuación se dan algunas indicaciones sucintas sobre la biografía de Maurice Fréchet, sus principales publicaciones y sus relaciones con España. Se encontrará una documentación más completa sobre estos puntos en [Armatte, 2001; Barbut, 2001, 2006; Escribano y Busto, 2002].

Los hechos más reseñables de su biografía son:

- 10-09-1878 Nace en Maligny (Yonne)
- 1900 École Normale Supérieure
- 1906 Doctorado. Tesis sobre los "espacios métricos"
- 1907-1914 Profesor, Universidad de Besançon
- 1914-1918 Intérprete entre los ejércitos inglés y francés
- 1919 Profesor en la Universidad de Estrasburgo
- 1928 Profesor en la Facultad de Ciencias de Paris
- 1956 Academia de Ciencias de Paris
- 04-06-1973 Muere en Paris

Sus principales libros son:

- 1924 (con M. Halbwach) - *"Le calcul des probabilités à la portée de tous"*, Paris, Dunod.
- 1928 - *"Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale"*, Paris, Gauthier-Villars.
- A partir de 1936 en - *"Le traité de calcul des probabilités et de ses applications"*, dirigido por Émile Borel, Paris, Gauthier-Villars.
- 1936 - *"Généralités sur les probabilités. Éléments aléatoires"*.
- 1938 - *"La méthode des fonctions arbitraires"*.
- 1940 - *"Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants"*.
- 1943 - Idem, continúa.
- 1955 - *"Les mathématiques et le concret"*, Paris, Presses Universitaires de France.

M. Fréchet tiene, desde los comienzos de los "años 1920", una abundante correspondencia con matemáticos y estadísticos españoles: Julio Rey Pastor, Esteban Terradas, Juan Bejar, R. San Juan, Manuel Balanzat. Y particularmente con: J. Gallego Díaz, Tomás Rodríguez Bachiller y Sixto Rios. Ha colaborado en la *Revista matemática hispano-americana*. Se desplazó en varias ocasiones a España, en particular en 1942 (ver [Barbut, 2006]) y en 1950 (ver [Escribano y Busto, 2002]).

1.1. 1896: La ley de Pareto

En 1896, Vilfredo Pareto publica su famosa ley sobre el reparto de la renta [Pareto, 1896, 1965]. Si $P(x)$ es la proporción de la renta superior a un x dado, se tiene que:

$$P(x) = \frac{A}{(x+x_1)^\alpha} \quad \text{para } x \geq x_0 > -x_1 \quad \text{y} \quad \alpha > 0. \tag{1.1}$$

Aquí, x_1 es un parámetro de cambio de origen, y x_0 es la renta mínima. La función de distribución $F(x)$ correspondiente es:

$$F(x) = 1 - P(x)$$

Y la función de densidad:

$$f(x) = F'(x) = -P'(x) = \frac{\alpha A}{(x+x_1)^{\alpha+1}}. \tag{1.2}$$

Algunas veces nos encontraremos en las aplicaciones con el caso particular de que $x_1 = 0$, y donde (1.1) toma la forma más simplificada:

$$P(x) = \frac{A}{x^\alpha} \quad x \geq x_0 > 0 \quad \text{y} \quad \alpha > 0. \tag{1.3}$$

Añadamos que, de la expresión anterior (1.2), la ley no tiene momento de orden 2 (y por tanto varianza), ya que la integral:

$$I_2 = A \int_{x_0}^{\infty} \frac{\alpha dx}{(x+x_1)^{\alpha-1}}$$

existe si $\alpha > 2$.

E incluso, no tiene media ya que la integral:

$$I_1 = A \int_{x_0}^{\infty} \frac{\alpha dx}{(x+x_1)^{\alpha}}$$

está bien definida sólo si $\alpha > 1$.

Esta última condición se cumple en general cuando se trata de rentas; pero en la época de V. Pareto por lo menos, y para las estadísticas de las que se disponía, la primera condición no se cumplía. Frecuentemente, se tenía (empíricamente):

$$1 < \alpha \leq 2$$

de manera que la distribución no tiene, en ese caso, varianza. Esto está relacionado con el hecho de que, para la ley de Pareto, los grandes valores de la variable tienen una frecuencia no desdeñable, contrariamente a lo que pasa con las distribuciones como la exponencial, o la "normal" de Laplace y Gauss.

Añadamos también que en otras aplicaciones de distribuciones de la forma (1.1), se puede incluso llegar a encontrar (escrito en lexicología, por ejemplo) que $0 < \alpha \leq 1$. En estos casos, el "valor central" a utilizar no es la media, que es infinita, sino, como preconizaba M. Fréchet, la mediana μ definida de (1.1) como:

$$\frac{1}{2} = \frac{A}{(\mu + x_1)^{\alpha}}$$

donde: $\mu = (2A)^{\frac{1}{\alpha}} - x_1$.

En cuanto a la dispersión de la distribución, se puede siempre medir por los "intervalos inter-cuantiles" $F(q) - F(1-q)$, con $q > 0{,}5$, cuando $0 < \alpha \leq 1$. Y por la desviación media absoluta respecto a la mediana cuando $1 < \alpha \leq 2$, sabemos que:

$$e = \int_{x_0}^{\infty} |x - \mu| f(x)dx = \int_{\mu}^{\infty} xf(x)dx - \int_{x_0}^{\mu} xf(x)dx$$

e es por tanto la diferencia entre la parte de las rentas superiores a la renta mediana y la parte de las rentas inferiores a la renta mediana (los "ricos" menos los "pobres").

Este recurso a la mediana como valor central de la distribución será el centro de las modificaciones aportadas por R. Gibrat en 1931, además de por M. Fréchet algunos años más tarde a la ley de Pareto.

1.2. Una objección británica

Estas modificaciones serán una respuesta a la objeción que formula, desde el año 1896, el economista y estadístico británico Francis Edgeworth [Pareto, 1965]: la función de densidad (1.2) de la ley de Pareto es estrictamente decreciente; sin embargo está claro después de ciertas estadísticas conocidas sobre rentas, que esta función de densidad puede comenzar a crecer, tener un máximo, después decrecer. Y a la fórmula de Pareto, Edgeworth opone una de las propuestas por Karl Pearson; probablemente (la trascripción que hace Pareto es incorrecta):

$$f(x) = \frac{A}{x^{\alpha}} e^{\frac{-\beta}{x}}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad x \geq x_0 > 0$$

que alcanza en efecto un máximo para $x = \frac{\beta}{\alpha}$.

A lo que Pareto responde que su mínimo x_0 no lo es verdaderamente, sino el mínimo de valores *observados*, los que provienen de las estadísticas fiscales; aquellos que tienen en cuenta sólo las rentas declaradas; donde las rentas muy bajas no están en general. Y Pareto ilustra su razonamiento con la Figura 1 siguiente, que es por sí sola elocuente (nosotros sólo hemos modificado las notaciones; se encuentra en [Pareto, 1965, p. 19]). El punto a es el x_0 de Edgeworth y el b es el x_0 de Pareto.

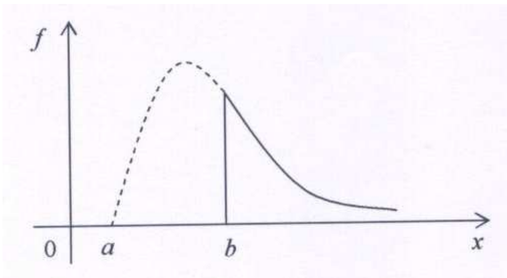

Figura 1

En realidad, la verdadera importancia de la expresión (1.1) de la ley de Pareto es, para $0 < \alpha < 2$, su parentesco con las leyes estables (por la relación con la suma de variables aleatorias independientes) como la "ley normal" inventadas a partir de 1919 por el matemático probabilista Paul Lévy. Su forma definitiva será publicada en 1937 en [Lévy, 1937]. Es este parentesco, (para una formulación más precisa, consultar [Barbut, 2007]), el que da una fundamentación *teórica* sólida a la ley de Pareto, y a la universalidad de los dominios dónde se aplica. Pero esto, ni Pareto, ni Edgeworth, ni incluso K. Pearson han podido o sabido conocerlo.

1.3. Robert Gibrat y "El Efecto Proporcional"

En 1931, Robert Gibrat [1931], propone como "ley" de la repartición de las rentas la distribución log-normal (llamada también de McAlister), en la que es el logaritmo $\ln(x)$ de las rentas (positivas) x el que sigue una ley "normal". A saber, la función de densidad $f(x)$

$$f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du \tag{1.4}$$

donde:

$$u(x) = \frac{\ln(x - x_0) - \ln(\mu - x_0)}{\sigma}, \quad du = \frac{dx}{\sigma x} \quad \text{con} \quad x \geq x_0 \geq 0 \tag{1.5}$$

μ es la *mediana* (y al mismo tiempo la media geométrica) de la distribución, y σ es la desviación típica del logaritmo de la variable. La función de distribución es pues:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{u(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du = G(u(x)) \tag{1.6}$$

donde G denota la función de distribución de la variable normal tipificada.

Salvo una constante aditiva x_0 de diferencia, la variable log-normal tiene por media $\mu e^{\frac{\sigma^2}{2}}$ y por moda (o "dominante") $\mu e^{-\sigma^2}$. Su varianza valdrá $\mu^2 e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

La forma de su función de densidad, conforme a lo que deseaban Edgeworth y Pearson, es la de la Figura 2.

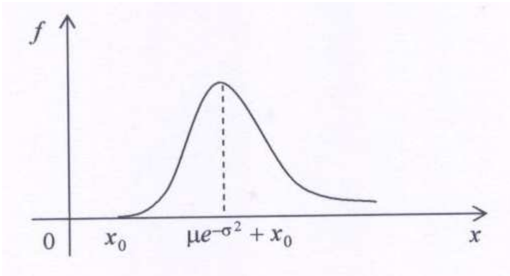

Figura 2

La fortaleza de la ley de Gibrat, es que tiene un fundamento teórico perfectamente conocido en los "años 1920". Lo que R. Gibrat [1931] llama *"La ley del efecto proporcional"* (ver. [Armatte, 1995]).

La ley normal es estable por su relación con la adición de variables aleatorias independientes (v.a.i.) y, según el teorema central del límite, la distribución normal es en cierto sentido límite para las medias de v.a.i. que tengan una varianza finita.

Si lo es el logaritmo de la variable que sigue una ley normal, lo será por tanto por la estabilidad del *producto* de unas v.a.i. (supuestas positivas).

Y como: $d\ln(x) = \frac{dx}{x}$ son las variaciones *relativas* (el efecto "proporcional") las que juegan el papel de las variaciones absolutas en la ley normal.

Dicho de otra manera, para Gibrat, lo que cuenta en la distribución de las rentas no son los crecimientos absolutos, sino los crecimientos relativos: 1 euro suplementario tiene mucho más valor para un mendigo que sólo posea 2 euros, que para un rico que posea tres millones. Esto es el clásico razonamiento marginalista.

En la práctica, en la época actual, la ley de Gibrat se ajusta mucho mejor que la de Pareto a las distribuciones empíricas de las rentas, cuando el α de Pareto sobrepasa el valor crítico 2. Pues, en este caso, la distribución paretiana tiene una varianza finita, y nos encontramos dentro del dominio de atracción de la ley normal, y no dentro de las otras leyes estables de P. Lévy, para las cuales es necesario que $0 < \alpha < 2$. Las rentas en Francia, sobrepasan el valor crítico 2 para el parámetro α a finales de los años 1920. Se verá más adelante con un ejemplo.

1.4. Una idea de M. Fréchet

Algunos años más tarde - soy incapaz de precisar la fecha exacta; en todo caso sobre la primera publicación [Fréchet, 1939] - Maurice Fréchet, que parece no gustarle la ley de McAlister y Gibrat, propone otra fórmula.

Consideraremos la renta mediana μ. Para las rentas superiores, la distribución supongamos que sea la de Pareto, en la forma (1.1). Por contra, para las rentas inferiores, es todavía una función potencia, pero de exponente positivo, por lo tanto de la forma:

$$F(x) = B(x - x_0)^\beta, \quad x \geq x_0, \quad \beta > 0 \tag{1.7}$$

La Figura 3 muestra la forma de la función de densidad para este tipo de distribución (en este caso, para $\beta > 1$).

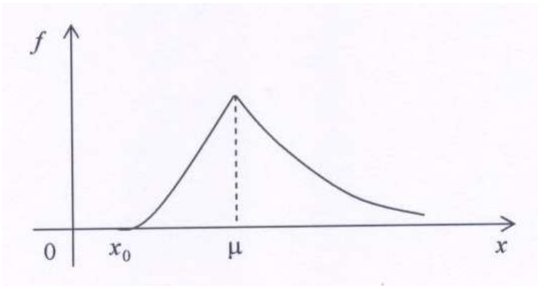

Figura 3

Es esta familia de distribuciones las que nos proponemos estudiar ahora.

2. Las distribuciones "a lo Fréchet"

2.1. Una familia de distribuciones

Sea pues la distribución de mediana μ y definida por:

$$F(x) = B(x - x_0)^\beta, \quad \mu \geq x \geq x_0, \quad \beta > 0$$
$$P(x) = 1 - F(x) = Pr(X > x) = \frac{A}{(x + x_1)^\alpha}, \quad x \geq \mu, \quad \alpha > 0 \tag{2.1}$$

M. Fréchet preconizaba que: $\alpha > 1$, $\beta > 1$. Pero estas condiciones no son para nada necesarias, ya que generalmente las satisfacen las distribuciones empíricas de las rentas.

Será necesario suponer que la función de distribución definida por (1.7) y (2.1) y su densidad $f(x)$ son una y otra continua en $x = \mu$.

De las relaciones anteriores:

$$B(\mu - x_0)^\beta = \frac{1}{2} = \frac{A}{(\mu + x_1)^\alpha}, \quad (= F(\mu)) \tag{2.2}$$

$$B\beta(\mu - x_0)^{\beta-1} = \frac{A\alpha}{(\mu + x_1)^{\alpha+1}}, \quad (= f(\mu)) \tag{2.3}$$

La forma de la función de densidad f se muestra en la Figura 3. En cuanto a la forma de la función de distribución F es la siguiente, ver la Figura 4.

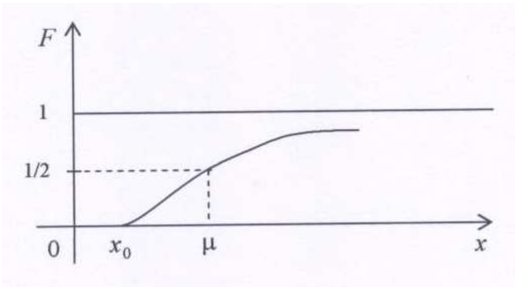

Figura 4

Esta función de distribución tiene un punto de inflexión $(\mu, \frac{1}{2})$. Por fin, cada una de las partes de (1.7) y (2.1) de la distribución tiene una propiedad característica.

Sean $m(x)$ la media de las rentas inferiores a la renta x, y $M(x)$ la de las rentas superiores a x, cuando exista. Entonces, se demuestra fácilmente que, (1.7) es equivalente a:

$$m(x) = \frac{\beta x + x_0}{\beta + 1} \tag{2.4}$$

lo que significa que m es una función lineal de x; incluso es el baricentro entre la renta x y la renta mínima x_0.

De la misma manera, y siempre que $\alpha > 1$ (para que la media exista), (2.1) es equivalente a:

$$M(x) = \frac{\alpha x + x_1}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1 \tag{2.5}$$

La ecuación anterior (2.5) sigue siendo una función lineal de x. Si $0 \leq \alpha < 1$, la media $M(x)$ ya no existe, pero la mediana $\mu(x)$ de las rentas superiores o iguales a x está siempre definida y es la función lineal:

$$\mu(x) = 2^{\frac{1}{\alpha}} x + x_1(2^{\frac{1}{\alpha}} - 1) \tag{2.6}$$

2.2. Un Método de ajuste

De este conjunto de propiedades, se deduce inmediatamente un método de ajuste de la distribución a unas distribuciones empíricas dadas, siempre que las estadísticas disponibles nos proporcionen las medias $m(x)$ y $M(x)$ observadas, o nos permitan su cálculo (alguna vez ocurre que no se dé el caso). He aquí los pasos a seguir:

- Para los datos empíricos correspondientes a $x \leq \mu$, se efectúa un ajuste lineal: $m(x) = ax+b$, de donde se deduce, de (2.4) y siempre que $0 < a < 1$:

$$a = \frac{\beta}{\beta+1}, \quad b = \frac{x_0}{\beta+1}$$

De donde las estimaciones:

$$\widehat{\beta} = \frac{a}{1-a}, \quad \widehat{x}_0 = \frac{b}{1-a} \tag{2.7}$$

- De la misma manera, para los datos empíricos para $x \geq \mu$ y de la ecuación (2.5) dan un ajuste lineal: $M(x) = a'x + b'$. De donde se deduce, según (2.5), y si $a' > 1$:

$$\begin{cases} a' = \frac{\alpha}{\alpha-1} & \text{de donde } \widehat{\alpha} = \frac{a'}{a'-1}; \\ b' = \frac{x_1}{\alpha-1} & \text{de donde } \widehat{x_1} = \frac{b'}{a'-1}; \end{cases} \tag{2.8}$$

Si $0 < a' \leq 1$, se utilizará (2.6) para estimar α y x_1 .

Observación 2.1. *Si los datos no permiten siempre el cálculo de las medias $m(x)$ y $M(x)$, entonces casi siempre permiten los de las medianas $\mu(x)$ y $\overline{\mu}(x)$, denotando por $\overline{\mu}(x)$ la mediana de las rentas inferiores a x.*

Sin embargo se tiene, para x, $x_0 \leq x < \mu$, y de (1.7):

$$\overline{\mu}(x) = 2^{\frac{-1}{\beta}} x + x_0(1 - 2^{\frac{-1}{\beta}}) \tag{2.9}$$

Tanto (2.6) como (2.9) permiten entonces determinar los parámetros α, β, x_0 y x_1 como en un problema de ajuste lineal.

- Una vez obtenidas las estimaciones de estos 4 parámetros α, β, x_0 y x_1, las dos ecuaciones (2.2) dan:

$$\widehat{A} = \frac{1}{2}(\mu + \widehat{x}_1)^{\widehat{\alpha}}, \quad \widehat{B} = \frac{1}{2}(\mu - \widehat{x}_0)^{-\widehat{\beta}} \tag{2.10}$$

- Por fin llevando estas estimaciones en la ecuación (2.3), se llega a :

$$\frac{\beta}{\mu - x_0} = \frac{\alpha}{\mu + x_1}, \tag{2.11}$$

de donde

$$\widehat{\mu} = \frac{\widehat{\beta}\widehat{x}_1 + \widehat{\alpha}\widehat{x}_0}{\widehat{\alpha} - \widehat{\beta}} \tag{2.12}$$

Observación 2.2. *Como vamos a ver con un ejemplo, es quizás más ventajoso, para obtener un mejor ajuste, olvidarse de la estimación (2.12) de la mediana, e igualar μ a la mediana empírica. Esto es lo que parece que hacía M. Fréchet y se entiende fácilmente. Para llegar a (2.11) se han acumulado 4 aproximaciones en los cálculos. De ahí proviene el riesgo de una gran imprecisión.*

2.3. Una aplicación

En la revista *Economie et Statistique* (publicada por el INSEE, que es el l.N.E. francés), n° 103 de septiembre 1978, se encuentra en la página. 61 la Tabla 1 (relativa a las rentas fiscales en Francia del año 1975).

Renta=x	% de hogares que perciben menos que esa renta	Renta media de los hogares	
		menos que esa renta m(x)	más que esa renta M(x)
8850	10	4670 (1.9)	46680 (5.3)
15590	20	8500 (1.8)	50980 (3.3)
18570	25	10190 (1.8)	53240 (2.9)
21340	30	12040 (1.8)	55530 (2.6)
26580	40	14870 (1.8)	60890 (2.3)
32460	50	17710 (1.8)	67240 (2.1)
39340	60	20740 (1.9)	75080 (1.9)
48050	70	23970 (2.0)	85670 (1.8)
53360	75	25770 (2.1)	92600 (1.7)
59550	80	27350 (2.2)	103010 (1.7)
80800	90	32210 (2.5)	134870 (1.7)

Tabla 1. Francia. Rentas fiscales 1975

Con los paréntesis señalamos la proporción entre esa renta media y la renta de la primera columna.

Se ve que la mediana empírica es $\mu = 32460$.

Efectuando el ajuste lineal correspondiente a las relaciones (2.4) y (2.7), y para los 6 primeros valores de x (1ª columna) y los valores correspondientes de $m(x)$ (3ª columna), se obtienen las estimaciones: $a = 0{,}55806$ y $b = -146$, con un coeficiente de correlación lineal $r = 0{,}999$, de donde de (2.7):

$$\widehat{\beta} = 1{,}26275, \quad \widehat{x}_0 = -330 \quad \text{que es tanto como decir } 0$$

De igual manera, para los 6 últimos valores de x (1ª columna) y los 6 valores correspondientes de M (4ª columna), se obtiene (con r = 0,998):

$$a' = 1{,}41116 \quad b' = 19391{,}2$$

de donde de (2.8):

$$\widehat{\alpha} = 3{,}43215 \quad \widehat{x}_1 = 47162$$

Y finalmente, por (2.12):

$$\widehat{\mu} = 27006$$

Se sigue de (2.10), que:

$$\widehat{A} = 1303000 \times 10^{3\alpha} \quad \widehat{B} = (7,7874 \times 10^{-3}) \times 10^{-3\beta}$$

Observación 2.3. *El valor estimado del exponente α de la distribución de Pareto es claramente superior al valor crítico 2; esta distribución tiene por tanto una varianza finita; podremos pues prever que al menos para esta parte (paretiana) de la distribución, el ajuste log-normal será mejor. Veamos que es así.*

El valor estimado de μ es claramente diferente del valor empírico 32460. Se puede por tanto presumir que se tendrá un mejor ajuste tomando este valor observado como estimación de μ. Lo que conduce con toda seguridad a otras estimaciones para A y B, a saber:

$$\widehat{A} = 1663000 \times 10^{3\alpha} \quad \widehat{B} = (6,17326 \times 10^{-3}) \times 10^{-3\beta}$$

Veamos qué ocurre ahora con los resultados. Con $\mu = 27000$ (valor estimado por redondeo) de una parte, y con $\mu = 32460$ (valor observado) de otra parte, se obtiene la Tabla 2 con los datos del ajuste "a lo Fréchet".

Con $\mu = 27000$ estimado	Observaciones		Con $\mu = 32460$ observado	
F(x) calculado	x	F(x) en %	F(x) calculado	Error en %
12.2	8850	10	9.7	3
25	15590	20	19.8	1
31.2	18570	25	24.7	1
37.1	21340	30	29.4	2
49	26580	40	38.8	3
63	32460	50	50	0
70.4	39340	60	62.4	4
78.7	48050	70	73	4.3
82.4	53360	75	77.6	3.5
85.6	59550	80	81.7	2.1
92.4	80800	90	90.3	0.2

Tabla 2. Ajuste “a lo Fréchet”

Como previmos, el ajuste con los datos del μ observado (columnas de la derecha) es claramente mejor que con el μ estimado (columnas de la izquierda). Pero el ajuste sigue siendo mediocre, sobre todo (aunque era de suponer) para la parte paretiana ($x \geq \mu$), salvo para el valor más grande ($x = 80800$); para los tres grandes valores observados es a los que mejor se aplica la ley de Pareto.

A modo de comparación, efectuemos ahora el ajuste de los datos a una distribución log-normal (formulas (1.4), (1.5) y (1.6) anteriores).

Suponiendo *a priori*: $x_0 = 0$, se obtiene como estimación de los parámetros σ y μ:

$$\widehat{\sigma} = 0{,}82586 \quad \widehat{\mu} = 30705$$

Se observa que $\widehat{\mu}$, esta vez, se acerca al valor observado 32460. De donde la tabla comparativa del ajuste log-normal es la siguiente:

x	F(x)	$\widehat{F}(x)$	Error %
8850	10	6.6	-34
15590	20	20.7	3.5
18570	25	24.65	-1.4
21340	30	33	10
26580	40	43	7.5
32460	50	52.5	5
39340	60	61.2	2
48050	70	70.5	0.7
53360	75	74.8	-0.27
59550	80	79	-1.25
80800	90	88	-2.2

Tabla 3. Ajuste log-normal

Era lo esperado una vez más. Este ajuste es claramente mejor que el de “a lo Fréchet” para $x \geq \mu$.

Por contra, es peor para las rentas pequeñas ($x_0 < x < \mu$).

¿El ajuste “a lo Fréchet” sería válido sobre todo para las rentas pequeñas? Nosotros vamos a ver que parece que así lo creía Fréchet.

2.4. Medias

Estudiaremos ahora las medias:

- La Tabla 1 permite un cálculo muy simple de la media empírica de los conjuntos de rentas: es el baricentro entre la media de las rentas inferiores a la mediana μ (esto es 17710) y la media de las rentas superiores a μ (esto es, 67240), cada una de las dos medias están ponderadas por el peso $\frac{1}{2}$. La media empírica $\overline{m}$ es pues:

$$\overline{m} = \frac{1}{2}(17710 + 67240) = 42475$$

- En cuanto a la medida teórica, está bien definida para una distribución “a lo Fréchet” si el exponente α de la parte paretiana es superior a 1; y valdría:

$$F(\mu)\frac{\beta\mu + x_0}{\beta + 1} + P(\mu)\frac{\alpha\mu + x_1}{\alpha - 1} \tag{2.13}$$

Si en (2.13) se llevan los valores *estimados* de los parámetros (incluyendo μ) se obtiene para la media teórica (según la Tabla 2, columna de la izquierda):

$$0{,}63(9486) + 0{,}37(57685) = 30829$$

Este valor dista mucho de la media observada.

- Tomando para μ la mediana observada, y sus estimaciones para los 4 parámetros α, β, x_0 y x_1, se obtiene, de la Tabla 2, columna de la derecha:

$$0{,}472(18104) + 0{,}528(65128) = 42932,$$

es casi el valor observado.

- En cuanto al ajuste log-normal, tiene como media teórica:

$$m = \mu e^{\frac{\sigma^2}{2}}$$

de donde según las estimaciones de la subsección anterior de μ y σ:

$$\widehat{m} = 30705(1{,}40635) = 43182.$$

Esta estimación está próxima a la media empírica 42475.

3. La distribución de Fréchet

3.1. Un caso muy particular

Si en el estudio de la distribución definida por las relaciones (1.7) y (2.1) se ha hablado de distribución "a lo Fréchet", y no de distribución "de Fréchet", es porque en sus textos, publicados o no publicados, que he leído, es sólo un caso muy particular el que está escrito y utilizado.

En los textos inéditos pertenecientes a sus archivos de la Academia de las Ciencias, se encuentra *siempre*, denotando μ la mediana:

$$F(x) = B(x - x_0)^{\beta}, \quad \text{para} \quad x_0 \leq x \leq \mu \tag{3.1}$$

$$P(x) = \frac{A}{(x - x_0)^{\alpha}}, \quad \text{para} \quad x \geq \mu \tag{3.2}$$

O dicho de otra manera, Fréchet considera solamente un caso particular donde, para (2.1) se tiene:

$$x_1 = -x_0$$

En cuanto a sus textos publicados [Fréchet, 1939-1955] tratan el caso aparentemente todavía más particular donde los dos exponentes α y β son iguales. A saber, se puede verificar leyendo en estos textos:

$$F(x) = B(x - x_0)^{\alpha}, \quad \text{para} \quad x_0 \leq x \leq \mu \tag{3.3}$$

$$P(x) = \frac{A}{(x - x_0)^{\alpha}}, \quad \text{para} \quad x \geq \mu \tag{3.4}$$

De hecho, las fórmulas (3.1) y (3.2) implican que $\alpha = \beta$ pero, ¿Fréchet estaba al tanto de ello?.

O sea, retomando las notaciones de (1.7) y (2.1),

$$x_1 = -x_0 \Rightarrow \alpha = \beta \tag{3.5}$$

El razonamiento que prueba la implicación (3.5) es muy elemental.

Habíamos llegado en la sección 2.2. a la expresión de la ecuación (2.11):

$$\frac{\beta}{\mu - x_0} = \frac{\alpha}{\mu + x_1}$$

Si $x_1 = -x_0$, esta expresión se puede escribir como:

$$\frac{\beta}{\mu - x_0} = \frac{\alpha}{\mu - x_0},$$

de donde: $\alpha = \beta$.

El hecho de que, en sus textos publicados, Fréchet haya utilizado las expresiones (3.3) y (3.4) parece indicar que había hecho este razonamiento. Pero entonces, ¿por qué en todos sus manuscritos, y en los numerosos ensayos de ajuste a datos empíricos que guardan sus archivos, utiliza siempre (3.1) y (3.2)?

Y, por supuesto, estos ajustes son siempre muy malos. Por ejemplo, para los datos de la Tabla 1, se ha visto que se tiene, para $x \geq \mu : \ \beta = 1{,}26275, \ x_0 = 0$.

De donde, según la distribución de Fréchet, para $x \geq \mu$: $P(x) = \frac{A}{x^\alpha}$ con $\alpha = 1{,}26275$.

Resultaría que los productos $x^\alpha P(x)$, teóricamente iguales a A, deberían ser casi constantes.

Con los datos de la Tabla 1, vemos que éso no ocurre:

P	0.5	0.4	0.3	0.25	0.2	0.1
$10^{-3\alpha}x^\alpha P(x)$	40.5	41.3	39.9	37.9	34.8	25.6

Tabla 4

Fréchet ha probado el ajuste de la forma (3.1), (3.2) sobre unas estadísticas de las rentas francesas de (1920), polacas de (1929), estadounidenses (1935-36, 1942, 1946 a 1948), alemanas de (1936) e italianas de (1948). A destacar que, en este último caso, él apuesta por un ajuste por medio de la regresión:

$$m(x) = \beta(x - m(x)) + x_0 \tag{3.6}$$

que es equivalente a nuestra fórmula (2.4) anterior.

Solamente que él no efectuaba por sí mismo los cálculos numéricos. Los manda hacer a un técnico que, ya casi en 1950, se llamaba Villaret y ejercía en el Instituto Henri Poincaré.

Quizá sea la razón por la cual Fréchet ha continuado las fórmulas erróneas (3.1), (3.2). Villaret suministraba los valores para los parámetros y se daría cuenta “que la cosa no marchaba”.

Por otra parte, en los textos publicados [Fréchet, 1939] propone (p. 37 y 38) las expresiones (3.3), (3.4) con algunos desarrollos, pero sin aplicaciones prácticas. Y [Fréchet, 1955] sí se da una aplicación, no es a una estadística de rentas, sino a la distribución de ayuntamientos de Francia según su población.

3.2. La distribución de las rentas bajas

Es necesario hacer justicia a Fréchet con la parte de la función de potencia positiva ($x_0 \leq x \leq \mu$) que es donde reside su originalidad por su relación con la distribución de Pareto. Y, de hecho, en sus trabajos inéditos, se interesa sobre todo por la expresión:

$$F(x) = B(x - x_0)^{\beta}, \quad x_0 \leq x \leq \mu$$

para las rentas bajas, inferiores a la renta mediana. Sin embargo, para esta parte de la curva, hemos dejado constancia que "la cosa marcha" bastante bien. He aquí otro ejemplo.

Durante el verano de 1950, éste es uno de los casos raros dónde tenemos el manuscrito fechado, Fréchet se muestra muy interesado en una estadística de las rentas bajas en U.S.A. en 1918. Estos datos se los había proporcionado François Divisia (ver Tabla 5). F. Divisia [1] le ha proporcionado las dos primeras columnas. La tercera columna es la de las estimaciones calculadas por Villaret siguiendo las instrucciones dadas por Fréchet. Aquí es uno de los casos excepcionales donde disponemos, en los archivos de Fréchet, del resultado de un ajuste.

x	Y	$\widehat{y}$
0 a 0,1	62,8	6
0,101 a 0,2	103,7	8,3
0,201 a 0,3	109,1	266
0,301 a 0,4	490	535
0,401 a 0,5	962	904
0,501 a 0,6	1150	1343
0,601 a 0,7	2154,5	1863
0,701 a 0,8	2662,5	2470
0,801 a 0,9	3013	3144
0,901 a 1	3144,7	3894

Tabla 5

He aquí como es probable que Fréchet y Villaret hubieran procedido. Sea

$$n(x) = B(x - x_0)^{\beta}, \quad \beta > 0$$

el número de contribuyentes de renta inferior o igual a x; $n(x)$ se obtiene acumulando las y de la 2^{a} columna. Se tiene:

$$\lg n(x) = \beta \lg(x - x_0) + \lg B \tag{3.7}$$

Por tanteo, o de forma arbitraria, ellos dan $x_0 = 0{,}04$. La regresión (3.7) da entonces las estimaciones:

[1] Economista, profesor en el Conservatorio Nacional de las Artes y Oficios de París

$$\widehat{\beta} = 2{,}8414, \quad \widehat{B} = 16300$$

De donde las $\widehat{n}(x)$; diferenciándolas, se obtienen las $\widehat{y}$ de la 3ª columna.

Rehaciendo yo mismo estos cálculos, he llegado casi a los mismos resultados.

Esto no es para alegrarse, pero cosas peores se han visto.

Observación 3.1. *Salvo en el único caso anteriormente señalado (fórmula (3.6)), es siempre por el método del "paso a logaritmos", al igual que el propio Pareto, que Fréchet realiza sus ajustes. Lo que obliga a estimar el parámetro x_0 a "ojo de buen cubero", esto es, tanteando sobre las representaciones de los datos en coordenadas bi-logarítmicas.*

4. La desigualdad en el sentido de Fréchet

Maurice Fréchet [1925] llama la atención de que, para una ley de Pareto simple ($x_1 = 0$), se tiene, en la notación de (2.5), y para $\alpha > 1$:

$$\frac{M(x)}{x} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \quad (\text{=constante}) \tag{4.1}$$

Cuánto más grande es esta proporción, más fuerte es, tal y como ya lo había escrito Georges Sorel (ver [Barbut, 2007]), el "sentimiento de desigualdad" en el reparto de las rentas.

Fréchet propone entonces tomar el cociente $\frac{M(x)}{x}$ como un medida de desigualdad de un reparto. En el caso general, este cociente varía con x; se trata pues de una medida funcional de la desigualdad, como lo es por otra parte la función de concentración de Lorenz y Gini. Aunque relacionada con ella, la medida de Fréchet no es equivalente.

Por otra parte, se puede mostrar que el conocer esta desigualdad permite calcular la distribución emparentada con ella.

- En el caso de una distribución de Pareto general ($x_1 \neq 0$) , se tiene, según (2.5):

  $$\frac{M(x)}{x} = \frac{1}{\alpha - 1}(\alpha + \frac{x_1}{x}) \tag{4.2}$$

  Es una función homográfica decreciente en x; tiende en límite hacia $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ cuando x aumenta indefinidamente.

- Para una distribución "a lo Fréchet" y para $x \leq \mu$, se tiene de la misma manera, de (2.5):

  $$\frac{M(x)}{x} = \frac{1}{\beta + 1}(\beta + \frac{x_0}{x}) \tag{4.3}$$

En particular, para $x_0 = 0$:

$$\frac{M(x)}{x} = \frac{\beta}{\beta + 1} \qquad (=\text{constante}) \tag{4.4}$$

Volvamos ahora a la Tabla 1. Entre paréntesis se muestra la proporción (4.2) en la última columna, y la inversa de la proporción (4.3) en la tercera.

Comparemos los valores observados (aquí calculados con dos decimales) con los valores teóricos resultantes de las estimaciones obtenidas en la sección 2.3, a saber:

$$\alpha = 3{,}43215, \quad x_1 = 47000, \quad \beta = 1{,}26275, \quad x_0 = 0$$

- Para $x \geq \mu = 32460$, se tiene, en el orden creciente de las x, y utilizando (4.2):

$\frac{M(x)}{x}$	Observado	2.07	1.91	1.78	1.735	1.73	1.66
	Teórico	2	1.90	1.81	1.77	1.77	1.65

Tabla 6

- De la misma manera, para $x \leq \mu$, $\frac{x}{m(x)}$ es constante y vale 1.79 en teoría.

$\frac{x}{m(x)}$	Observado	1.895	1.83	1.82	1.77	1.79	1.83
	Teórico	1.79	1.79	1.79	1.79	1.79	1.79

Tabla 7

es decir, la cercanía entre lo teórico y lo observado es satisfactorio.

Los valores de la primera de nuestras dos proporciones significan que, para las rentas en Francia del año 1975, la renta media de los que tienen una renta superior a mi propia renta x es un poco menos del doble de ésta.

Sin embargo, para las estadísticas de rentas estudiadas por Pareto (segunda mitad del siglo XIX), el valor del exponente α de su ley era del orden de 1,5 ; o sea, para el indicador de Fréchet (en el caso $x_1 = 0$):

$$\frac{M(x)}{x} = \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3.$$

Se concluye que la desigualdad en el sentido de Fréchet ha disminuido fuertemente en un siglo. Por otra parte, se llegaría a la misma conclusión construyendo las curvas de concentración.

Agradecimientos

Agradezco al profesor Gabriel Ruiz Garzon la traducción de mi artículo. Resulta que el texto español es mejor (estilo, claridad) que el original francés. Además de la detección de algunos errores. ¡Bravo Gabriel!

Referencias

[1] Armatte, M. (1995). Robert Gibrat et la loi de l'effet proportionnel. *Mathématiques et Sciences humaines*, **129**, 5-35.

[2] Armatte, M. (2001). Maurice Fréchet statisticien, enquêteur et agitateur public. *Revue d'histoire des mathématiques*, **7**, 57-65.

[3] Barbut, M. (2001). Ideologia, matematicas y ciencias sociales: Vilfredo Pareto, Georges Sorel y la ambigüedad en la comparacion de las desigualdades. *Empiria, revista de metodologia de las ciencias sociales*, **6**, 11-18.

[4] Barbut, M. (2006). Un épisode insolite des relations scientifiques franco-ibériques. Le séjour au Portugal et en Espagne de Maurice Fréchet en janvier et février 1942. En: *A.H.E.P.E., Historia de la Probabilidad y de la Estadistica III*, Delta publicaciones, Madrid (España).

[5] Barbut, M. (2007). *La Mesure des Inégalités. Ambiguïtés et Paradoxes*, Ed. Droz, Genève (Suiza).

[6] Escribano, M.C. y Busto, A.I. (2002). Primeros intentos para la organización de la enseñenza de la estadistica en España: Cursos de estadistica y sus aplicaciones (1950-1952). En: *A.H.E.P.E., Historia de la Probabilidad y de la Estadistica*, Delta publicaciones, Madrid (España).

[7] Fréchet, M. (1925). Une nouvelle représentation analytique de la répartition des revenus. En: *XVIe session de l'Institut international de statistique*, 1-3, Roma (Italia).

[8] Fréchet, M. (1939). Sur les formules de répartition des revenus. *Revue de l'Institut international de statistique*, **3**, 32-38.

[9] Fréchet, M. (1945). Nouveaux essais d'explication de la répartition des revenus. *Revue de l'Institut international de statistique*, **13**, 16-32.

[10] Fréchet, M. (1955). Les mathématiques dans les sciences humaines. En: *Les mathématiques et le concret, chap IV*, 89-117, Presses Universitaires de France, Paris (Francia).

[11] Gibrat, R. (1931). *Les Inégalités Économiques*, Ed. Sirey, Paris (Francia).

[12] Lévy, P. (1937). *La Théorie de l'addition des Variables Aléatoires*, Ed. Gauthier-Villars, Paris (Francia).

[13] Pareto, V. (1896). *Cours d'Économie Politique*, Nueva edición por G. Busino, (1964) Ed. Droz, Genève (Suiza).

[14] Pareto, V. (1965). *Écrits sur la courbe de répartition de la richesse, réunis et présentés par G. Busino*, Ed. Droz, Genève (Suiza).

Sobre el autor

M. Barbut es profesor, co-fundador y antiguo Director del Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales (CAMS), École des Hautes Études en Sciences Sociales de Paris. Impulsor del "Séminaire de Histoire du Calcul des Probabilités et de la Statistique" que se desarrolla bajo el patrocinio del CAMS y de la Société Française de Statistique. Ha publicado numerosos artículos sobre el sociólogo y economista Vilfredo Pareto. Su famosa distribución le conduce hacia el tratamiento matemático de la desigualdad, tema sobre el que ha escrito numerosos trabajos y del que es un prestigioso especialista.