ve similar opinions. To me, this is a fine way to do statistics, and I have been a proponent of such an approach for a long time. The rise of MCMC has made such an arrangement the standard way of doing business. In its construction MCMC, especially if implemented through a Gibbs sampler, is a Bayesian solution to a problem. To assess the solution we monitor the MCMC output which, of course, is the monitoring of many repeated trials, and hence is frequentist. This is the perfect example of how the two approaches complement each other. The extremely flexible Bayesian models can help us get solutions to many complex problems, and the frequentist evaluation tools help us evaluate and calibrate our inferences.

Thus, we should be neither Bayesians nor frequentists. We should, perhaps, be "calibrated Bayesians" according to Little, but we really should be more. When faced with a problem, we should use all the tools available (Bayes, frequentist, likelihood), and use each in their best possible way, to arrive at the best solution that we can give for a particular problem. Then, when we truly use all of our tools we are neither frequentist nor Bayesians, we are statisticians!

Referencias

[1] Casella, G. and Berger, R. L. (2001). *Statistical Inference, Second Edition*. Monterey: Duxbury.

[2] Little, R. J. (2006). Calibrated Bayes: A Bayes/Frequentist Roadmap. *American Statistician*, **60**, 213-223.

CONJUNTOS ALEATORIOS: ESPERANZAS DE AUMANN Y HERER

Pedro Terán
Grupo Decisión Multicriterio Zaragoza
Unidad Docente de Métodos Estadísticos
Universidad de Zaragoza

Resumen

En este artículo presentamos una síntesis del trabajo *Relaciones entre las esperanzas de Aumann y Herer de un conjunto aleatorio* (Premio Ramiro Melendreras 2006).

1. Introducción

Por así decirlo, los conjuntos aleatorios "siempre han estado ahí"; ya Kolmogorov, en su libro frecuentemente citado como el origen de la teoría moderna de la probabilidad [12], discute la idea de *una región cuya forma depende del azar*.

La aguja que se lanza al azar en el problema de Buffon es un ejemplo de conjunto aleatorio. Un proceso de Poisson, o en general cualquier proceso de puntos como los ceros de un movimiento browniano, los instantes en que un proceso continuo rebasa una barrera o un proceso de records, es un conjunto aleatorio. Los puntos óptimos en un problema de optimización estocástica no convexa (es decir, con solución en general no única) forman un conjunto aleatorio. Un intervalo o una región de confianza, así como el resultado de un algoritmo de análisis *cluster*, son conjuntos aleatorios.

Pero, pese a esta abundancia de ejemplos estadísticos, el desarrollo de la teoría de conjuntos aleatorios ha venido motivado sobre todo por aplicaciones en áreas como la estereología (en Geología), la teoría económica, la geometría estocástica, el análisis de imágenes y otras.

Uno de los conceptos fundamentales que se han afrontado desde el punto de vista particular de varias de esas áreas es el de **esperanza** de un conjunto aleatorio. En el caso de variables aleatorias, la esperanza se calcula usando la integral de Lebesgue. Es un leve defecto, que solemos considerar anecdótico, el que el valor esperado de la tirada de un dado sea 3,5 –un valor que de hecho nadie espera. Pero este mismo fenómeno constituye una dificultad enorme para encontrar una buena definición de esperanza de un conjunto aleatorio: está claro que la media de dos círculos debe ser un círculo de posición y tamaño intermedios, pero ¿está claro cuál "debería" ser la media de un círculo y un triángulo, de un pentágono y un hexágono o, peor aún, de un conjunto discreto y otro continuo?

No sorprende, por tanto, que las nociones de esperanza desarrolladas para tratar problemas en áreas distintas sean frecuentemente soluciones *ad hoc* difíciles de trasladar a otros campos o que carecen de las propiedades matemáticas de la esperanza de variables aleatorias. Existen, sin embargo, dos conceptos de esperanza con buenas propiedades matemáticas (p.ej. la Ley Fuerte de los Grandes Números y el Teorema de Convergencia de Martingalas) cuyas definiciones son muy distintas: la esperanza de Aumann [3], de tipo analítico, y la de Herer [10], de tipo geométrico.

En este trabajo estudiamos sistemáticamente las relaciones entre ambas esperanzas. Para simplificar la exposición nos restringiremos al caso finito-dimensional mientras sea posible, y también evitaremos todas las cuestiones de medibilidad concernientes a los conjuntos aleatorios.

Por simplicidad, tampoco distinguiremos entre variable aleatoria y vector aleatorio, utilizando la primera denominación independientemente de la dimensión del espacio. En espacios más generales hablaremos de elementos aleatorios, como es habitual.

2. Visión histórica del problema

La historia de este problema comienza con el intento de Maurice Fréchet (1948) de extender la definición de esperanza a espacios donde no es posible calcular integrales. Por ejemplo, la integral de Lebesgue no es adecuada para obtener la esperanza de un elemento aleatorio definido sobre la superficie de la esfera, ya que proporciona valores que están en el interior de ésta (fuera del espacio considerado).

La estrategia de Fréchet consiste en buscar caracterizaciones *métricas* de la esperanza. Así, adopta como definición la siguiente propiedad: *Si ξ es un elemento aleatorio de un espacio métrico, llamamos esperanzas [de Fréchet] de ξ a aquellos puntos que minimizan la distancia cuadrática esperada a ξ. Ese mínimo, si es finito, se llama varianza de ξ* [7].

En general, la esperanza de Fréchet no tiene por qué existir o ser única. Para variables aleatorias con varianza finita, es bien sabido que la propiedad de ser esperanza de Fréchet identifica a la esperanza de la variable aleatoria, y por tanto también la varianza de Fréchet coincide con la varianza habitual. Pero la definición no sirve si la varianza es infinita, pues entonces la distancia cuadrática esperada se hace infinita para cualquier punto.

En 1949, Shafik Doss, un estudiante egipcio de Fréchet, propone una definición alternativa que no utiliza momentos de segundo orden y por tanto sí es una generalización genuina del concepto de esperanza a un espacio métrico [6]. La propiedad que se utiliza en esta definición es muy interesante: *La esperanza de una variable aleatoria ξ es el único punto de $\mathbf{R}^n$ cuya distancia a cualquier otro punto es menor o igual que la distancia esperada de ξ a ese punto.*

Por tanto, podemos definir formalmente la esperanza de Doss en un espacio métrico $(\mathbf{E}, d)$ como sigue:

$$E_D[\xi] = \{x \in \mathbf{E} \mid \forall a \in \mathbf{E},\ d(x,a) \leq E[d(\xi,a)]\}.$$

Nótese, a modo de curiosidad, que en un contexto estadístico podemos usar la esperanza de Doss siempre que la naturaleza de los datos nos lleve a la posición de que la métrica euclídea es inapropiada. Por ejemplo, en el caso de datos composicionales, suele utilizarse la métrica de Aitchison; puede probarse que la noción de esperanza desarrollada en ese contexto es un caso particular de la esperanza de Doss.

Durante los años sesenta, Robert Aumann y Gerard Debreu (quienes posteriormente recibirían el premio Nobel de Economía en los años 2005 y 1983) vieron que sus investigaciones en la teoría económica les llevaban a la necesidad de definir integrales de correspondencias cualesquiera que no necesariamente son funciones [3, 5]. Las definiciones que propusieron resultan ser equivalentes, y por tanto sólo nos ocuparemos de la primera, más general.

Aumann razonó del siguiente modo: si cada punto tiene un conjunto de imágenes, es lógico que la esperanza también esté formada por un conjunto de valores. Podemos considerar todas las funciones que asignan a cada punto una de sus imágenes (selecciones) y tomar el conjunto de todas sus esperanzas. En general, para un conjunto aleatorio X definimos su *esperanza de Aumann* como

$$E_A[X] = \{E[\xi] \mid \xi \in X \text{ casi seguro}, \exists E[\xi]\}.$$

En honor a la exactitud histórica hay que mencionar que el japonés Hirokichi Kudō, en un trabajo de Estadística publicado en la revista de su universidad en 1954, ya había dado la misma definición.

Identificando así una correspondencia con una función cuyos valores son conjuntos, Aumann y Debreu podrían haber aplicado los conceptos de Fréchet y Doss sin más que dotar a sus espacios de conjuntos con una métrica. Hoy sabemos, de hecho, que existe una métrica sobre los subconjuntos compactos convexos de $\mathbf{R}^n$ de forma que la esperanza de Aumann es justamente la única esperanza de Fréchet respecto a esa métrica.

La esperanza de Aumann es la noción más popular de esperanza para conjuntos aleatorios, en parte por reproducir bien (al menos en el caso de valores convexos) las propiedades matemáticas habituales. Por ejemplo, Artstein y Vitale [1] demostraron la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Pero, a finales de los ochenta, el polaco Wojciech Herer [10] observa que la definición de Doss puede extenderse fácilmente a conjuntos aleatorios:

$$E_H[X] = \{x \in \mathbf{E} \mid \forall a \in \mathbf{E},\ d(x,a) \leq E[D(X,a)]\},$$

donde $D(X,a)$ es la máxima distancia de algún punto de X a a. Es habitual también escribir $\|X\| = D(X,0)$.

A pesar de que esta esperanza es válida en espacios métricos (la de Aumann requiere que el espacio subyacente sea vectorial) y de que Herer probó resultados importantes como la ley fuerte o la convergencia de martingalas, el mundo fue capaz de dormir perfectamente aun sabiendo que esos resultados admitían dos versiones con límites aparentemente distintos, las dos nociones de esperanza. Herer dejó este tema tras publicar sus resultados en la revista de la Academia de Ciencias de París y en una revista de Probabilidad y Estadística de su país, y quizá podría haber sido ése el fin de la esperanza de Herer de no ser por una coincidencia.

Christian Hess, de la Universidad Paris Dauphine, que lleva más de veinticinco años estudiando los resultados de tipo asintótico para conjuntos aleatorios, me relató cómo, en una conversación casual con dos compañeros de pasillo surgió fugazmente el trabajo de Herer, a lo que uno de ellos exclamó: “¡Pero si ésa es la definición dada por mi padre!”. Esto despertó el interés de los tres por discernir si habría alguna relación entre la “esperanza del padre de Halim Doss” y la esperanza de Aumann utilizada en los trabajos de Hess.

Hess (2000) probó el siguiente resultado, que apareció en [2, 11].

Teorema 2.1. *Sea* $\mathbf{E}$ *un espacio de Hilbert y* X *un conjunto aleatorio cerrado convexo tal que* $E[\|X\|^2]$ *es finita. Entonces,* $E_H[X] = E_A[X]$.

Se trata de un resultado muy prometedor pero sin embargo limitado. Por una parte, la demostración usa la identidad del paralelogramo, por lo que no podemos prescindir ni de la hipótesis de espacio de Hilbert ni de la de integrabilidad cuadrática. Fijando la atención en el caso bidimensional, es bien sabido que la única norma que convierte a $\mathbf{R}^2$ en un espacio de Hilbert es la $\|\cdot\|_2$, por lo que el resultado no aclara qué ocurre para todas las demás normas. De hecho, Hess mostró también que en $\mathbf{R}^2$, con la norma $\|\cdot\|_\infty$, la igualdad no se cumple. Por otra parte, la hipótesis de integrabilidad cuadrática implica que tampoco sabemos qué ocurre en el caso de “varianza infinita”.

En vista de este resultado y de la inclusión $E_A[X] \subset E_H[X]$, que se tiene en general, Ilya Molchanov (2005) incluye entre los problemas abiertos planteados en su libro [15] el obtener condiciones minimales sobre un espacio de Banach para que ambas esperanzas sean iguales. Los resultados obtenidos en nuestro trabajo permiten resolver completamente este problema (ver [16]).

3. Relaciones entre ambas esperanzas

Las técnicas desarrolladas para resolver el problema permiten tratar el caso en el que $E[\|X\|]$ es finita, que es el más amplio en el que preguntar si ambas esperanzas son iguales tiene sentido. Como una variable aleatoria integrable es casi seguro finita, bajo la condición anterior $\|X\|$ lo es y por tanto X es acotado casi seguro. Si pedimos adicionalmente que X sea compacto en lugar de cerrado acotado, podemos obtener resultados más potentes y de enunciado más sencillo. Por ello nos centraremos primero en el caso finito-dimensional.

Será esencial considerar el espacio dual al espacio donde están definidos los conjuntos aleatorios. En el caso de $\mathbf{R}^n$, el dual es de nuevo isomorfo a $\mathbf{R}^n$ (con el que desde ahora lo identificaremos) pero la norma dual, en general, no coincide con la original. Por ejemplo, la norma dual a la $\|\cdot\|_p$ es su conjugada $\|\cdot\|_q$ con $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Denotaremos la dualidad entre los dos espacios por $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Para fijar ideas, puede ser útil recordar que la norma $\|\cdot\|_2$ es autodual y en ese caso $\langle x, y\rangle$ es simplemente el producto escalar ordinario de x e y. La *función soporte* de un conjunto A viene dada por

$$s(y, A) = \sup\{\langle x, y\rangle \mid x \in A\}.$$

Introducimos ahora dos variantes de la envolvente convexa que nos serán de utilidad. La *envolvente por bolas* de un conjunto cerrado A es la intersección de todas las bolas (cerradas) que recubren A. Por su parte, si $\mathcal{H}$ es un conjunto de vectores en la esfera de la norma dual, la *$\mathcal{H}$-envolvente* de A es la intersección de todos los semiespacios que contienen A y están definidos por un vector que está en $\mathcal{H}$. Así,

$$\text{blh } A = \bigcap \{B \supset A \mid B \text{ es una bola}\},$$

$$\mathcal{H}\text{−hull } A = \bigcap_{y \in \mathcal{H}} \{x \in \mathbf{E} \mid s(y, A) \leq \langle x, y\rangle\}.$$

Tenemos el siguiente resultado, en el que $\mathcal{E}^*$ denota el conjunto de puntos extremos de la esfera dual.

Teorema 3.1. *Sea X un conjunto aleatorio compacto convexo tal que $E[\|X\|]$ es finita. Entonces,*

$$E_H[X] = \text{blh } E_A[X] = \mathcal{E}^*\text{−hull } E_A[X].$$

Por tanto, podemos expresar la esperanza de Herer tanto en forma de intersección de bolas como de intersección de semiespacios que recubren la esperanza de Aumann. Como el cálculo de la esperanza de Herer, aun en casos sencillos, es muy engorroso al involucrar la distancia entre cada par de puntos del espacio, esto simplifica considerablemente su estudio.

Como consecuencia, tenemos la solución al problema planteado en la sección anterior.

Corolario 3.1. *Son equivalentes:*

(i) Las esperanzas de Aumann y Herer son idénticas.

(ii) El espacio subyacente tiene la Propiedad de la Intersección de Mazur.

La Propiedad de la Intersección de Mazur (MIP) significa que cada conjunto cerrado acotado convexo es la intersección de una familia de bolas. Mazur (1933) observó que la métrica euclídea tiene esa propiedad, equivalente a la igualdad entre la envolvente por bolas y la envolvente convexa. Remitimos al lector interesado en la MIP y su relevancia en cuestiones de Análisis Funcional Geométrico a la revisión [8].

Es conocido que la MIP es equivalente (en el caso finito-dimensional) a que el conjunto $\mathcal{E}^*$ sea denso en la esfera dual. Por poner un ejemplo, en el caso de $\mathbf{R}^2$ eso corresponde a las normas cuya bola unidad no tiene "puntas".

Como los espacios de Hilbert tienen la MIP y las bolas del espacio $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ son cuadrados, los resultados obtenidos por Hess quedan clarificados.

Algunas otras consecuencias interesantes son las siguientes:

Corolario 3.2. *La esperanza de Aumann de un conjunto aleatorio compacto convexo está formada exactamente por aquellos puntos que pertenecen a la esperanza de Herer para todas las normas equivalentes.*

Corolario 3.3. *La esperanza de un elemento aleatorio es el único punto cuya distancia a cualquier otro punto (medida en una norma cualquiera) es menor o igual que la distancia esperada del elemento aleatorio a ese punto.*

Demostración. Cuando tomamos un conjunto aleatorio unipuntual, la esperanza de Aumann se reduce, por definición, a la esperanza habitual; mientras que la esperanza de Herer se reduce a la de Doss. Así, el Teorema 3.1 nos dice que las esperanzas de Doss son los puntos que están en todas las bolas que contienen a la esperanza. Obviamente, el único punto que cumple esa condición es la propia esperanza. □

Todos los resultados anteriores son válidos en un espacio de Banach separable, sin más que reemplazar la integral de Lebesgue por la de Bochner, más general. El Corolario 3.3 fue demostrado por Doss en el caso de variables aleatorias, y por Bru, Heinich y Lootgieter (1993) en el caso general [4].

Finalmente consideramos una acotación de la esperanza de Herer válida con la máxima generalidad (conjuntos aleatorios cerrados acotados convexos en un espacio de Banach separable).

Teorema 3.2. *Sea X un conjunto aleatorio cerrado convexo tal que $E[\|X\|]$ es finita. Entonces,*

$$\text{blh } E_A[X] \subset E_H[X] \subset \mathcal{P}^*\text{−hull blh } E_A[X].$$

En este enunciado, $\mathcal{P}^*$ denota el conjunto de *funcionales de Mazur*, es decir, aquellos elementos de la esfera dual que cumplen la siguiente propiedad:

$$s(y, \text{blh } A) = \text{ínf}\{s(y, B) \mid B \supset A, B \text{ es una bola}\}$$

para cualquier A. Esta es una noción dual a la de conjunto de Mazur introducida en [9].

De acuerdo con el Teorema 3.2 y otros resultados obtenidos en el trabajo, se tiene la igualdad $E_H = \text{blh } E_A$ siempre que el conjunto $\mathcal{P}^*$ determine la norma, esto es, $\|x\| = \sup_{y \in \mathcal{P}^*} |\langle x, y\rangle|$ para todo punto x. Esto nos permite dar condiciones suficientes sobre el espacio $\mathbf{E}$ para que se cumpla la igualdad anterior.

Proposición 3.1. *La igualdad $E_H = \text{blh } E_A$ se cumple bajo cualquiera de las siguientes condiciones:*

(a) El espacio dual $\mathbf{E}^*$ es separable (p.ej. si $\mathbf{E}$ es reflexivo).

(b) El espacio $\mathbf{E}$ es de Mazur (es decir, todo conjunto cerrado acotado que no corta a un hiperplano está cubierto por una bola que tampoco lo corta).

(c) La norma de $\mathbf{E}$ es poliédrica (es decir, alguna sección finito-dimensional de la bola unidad es un politopo).

En los casos (a) y (c), se cumple además la igualdad $E_H = \mathcal{H}-\text{hull } E_A$ cuando se toma como $\mathcal{H}$ el conjunto de los puntos débil fuertemente expuestos de la esfera dual.*

Los puntos débil* fuertemente expuestos son una de las múltiples generalizaciones de los puntos extremos al caso de un espacio dual infinito-dimensional.

4. Comentarios finales

Los resultados que presentamos contienen por tanto una acotación de la esperanza de Herer entre dos funciones de la esperanza de Aumann, válida generalmente; condiciones suficientes sobre $\mathbf{E}$ o sobre X que garantizan que $E_H[X]$ es una envolvente de $E_A[X]$; y se han caracterizado los espacios en los cuales las dos esperanzas son idénticas. Remitimos al lector interesado en conocer más detalles a los trabajos [16, 17, 18] (véase también [19, Example 2]).

Para concluir, debo agradecer a aquellas personas de cuyos comentarios me he beneficiado desde que tuve resultados “enseñables”: Yukio Ogura, Christian Hess, José Pedro Moreno e Ilya Molchanov; muy particularmente al profesor Ogura por invitarme a la Universidad de Saga (Japón) en enero-febrero de 2004.

También deseo dejar constancia escrita de mi satisfacción y agradecimiento por el respaldo recibido de la Fundación Ramiro Melendreras a través de su premio, que constituye un apoyo moral de gran importancia a la labor de los jóvenes investigadores.

Referencias

[1] Artstein, Z., Vitale, R. A. (1975). A strong law of large numbers for random compact sets. *Ann. Probab.* **3**, 879–882.

[2] Aubin, J.-P. (1999). *Mutational and Morphological Analysis.* Birkhäuser, Boston.

[3] Aumann, R. J. (1965). Integrals of set-valued functions. *J. Math. Anal. Appl.* **12**, 1–12.

[4] Bru, B., Heinich, H., Lootgieter, J. C. (1993). Distances de Lévy et extensions des théorèmes de la limite centrale et de Glivenko-Cantelli. *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris* **37**, 29–42.

[5] Debreu, G. (1967). Integration of correspondences. *Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probab.*, 351–372.

[6] Doss, S. (1949). Sur la moyenne d'un élément aléatoire dans un espace distancié. *Bull. Sci. Math.* **73**, 1–26.

[7] Fréchet, M. (1948). Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié. *Ann. Inst. H. Poincaré* **10**, 215–310.

[8] Granero, A. S., Jiménez-Sevilla, M., Moreno, J. P. (2004). Intersection of closed balls and geometry of Banach spaces. *Extracta Math.* **19**, 55–92. Disponible en `http://www.unex.es/extracta/Vol-19-1/19a1More.pdf`

[9] Granero, A. S., Moreno, J. P., Phelps, R. R. (2004). Convex sets which are intersections of closed balls. *Adv. Math.* **183**, 183–208.

[10] Herer, W. (1987). Martingales à valeurs fermées bornées d'un espace métrique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **305**, 275–278.

[11] Hess, C. (2000). The Doss integral for random sets. Comparison with the Aumann integral. *Proc. 8th Int. Conf. on Information Processing and the Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, 515–520.

[12] Kolmogorov, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer, Berlin.

[13] Kudō, H. (1954). Dependent experiments and sufficient statistics. *Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.* **4**, 151–163.

[14] Mazur, S. (1933). Über schwache Konvergenz in den Räumen L^p. *Studia Math.* **4**, 128–133.

[15] Molchanov, I. (2005). *Theory of Random Sets*. Springer, Londres.

[16] Terán, P. (2007). On the equivalence of Aumann and Herer expectations of random sets. *Test*, en prensa.

[17] Terán, P. Intersections of balls and the ball hull mapping. *Enviado para su publicación.*

[18] Terán, P. Herer and Aumann expectations of random sets. *En preparación.*

[19] Terán, P., Molchanov, I. (2007). The law of large numbers in a metric space with a convex combination operation. *J. Theoret. Probab.*, en prensa.