Multiplicateurs compacts

Gilbert Muraz

Résumé

Une caractérisation des sous-ensembles (invariant par translation) relativement compacts dans les $L^1(G)$-modules permet de montrer que les multiplicateurs compacts entre $L^1(G)$-modules sont presque-périodiques. Une condition nécessaire et suffisante est donnée pour que la réciproque soit vraie. Un théorème de décomposition est obtenu, en particulier pour les opérateurs subordinatifs compacts.

Abstract

A characterization of the relatively compact subsets (translation invariant) in the $L^1(G)$-modules allows to prove that the compact multipliers of $L^1(G)$-modules are almost-periodic. A necessary and sufficient condition is given in order that the converse is true. A decomposition theorem is obtained, in particular for the subordinative compact operators.

Introduction

Une étude complète des multiplicateurs compacts entre les espaces $L^p(G)$, $1 \leq p \leq +\infty$, où G est un groupe localement compact, est donnée dans divers articles de G. Crombez [C3], G. Crombez et W. Govaerts [C/G3] en particulier l'opérateur H_θ associé à $\theta \in L^p(G)$ définie par $H_\theta f = f * \theta$ est un opérateur compact de $L^1(G)$ dans $L^p(G)$ si et seulement si θ est presque-périodique.

De nombreux auteurs ont étudié les multiplicateurs compacts dans des cas particuliers entre ensembles de fonctions ou de distributions définies sur le groupe G, par exemple : [A], [Ba/G], [Ba/Pi], [C1,C2,C3], [C/G1,C/G2,C/G3], [Dun/Ra], [Fe], [Fr], [Ka], [Kr], [P/Te2] et [S].

Received by the editors June 1996.
Communicated by J. Schmets.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 43A22, 43A60.

Les résultats obtenus pour les algèbres de Segal dans [P/Te1], [Te1,Te2] se généralisent aux algèbres de Banach commutatives semi-simples régulières [Da/Mu1].

L'étude présente, placée dans le cadre abstrait des $L^1(G)$-modules (G localement compact abélien), permet de préciser la connexion entre multiplicateurs compacts et multiplicateurs presque-périodiques ainsi que leur existence.

La théorie générale des $L^1(G)$-modules, en particulier des éléments presque-périodiques, s'applique à l'ensemble des multiplicateurs qui a naturellement cette structure.

Des rappels de cette théorie donnée dans [Da/Mu2] font l'objet d'une première partie.

La propriété d'approximation (p.a.) pour les espaces de Banach étudiée dans [L/Tz] nécessite une bonne connaissance de ses sous-ensembles compacts. Le cas des $L^1(G)$-modules est traité dans une deuxième partie.

Enfin, la troisième et quatrième partie donnent les résultats obtenus pour les multiplicateurs et les opérateurs subordinatifs compacts.

1 Définitions et notations

La terminologie et les notations de [Da/Mu2] sont reprises ici.

1.1 Généralités

Soit G un groupe abélien localement compact et $L^p(G)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$les espaces de Banach habituels définis avec la mesure de Haar dx de G. Un espace de Banach E est appelé :

– *G-module* s'il existe une représentation de groupe L de G dans le groupe des isométries de E vérifiant $L_0 = I$ (identité) et $L_{x+y} = L_x L_y$.

– *$L^1(G)$-module* s'il existe une représentation d'algèbre T (continue) de $L^1(G)$ dans l'ensemble $\mathcal{L}(E, E)$ des applications linéaires bornées de E dans E vérifiant

• $\|Tf\| \leq \|f\|_1$,

• $T_{f*g} = T_f T_g$ où $*$ représente le produit de convolution dans $L^1(G)$. Pour e dans E, $T_f(e)$ est aussi noté $f * e$.

Un $L^1(G)$-module E est dit à *translation compatible* si E est aussi un G-module avec $L_x T_f = T_f L_x = T_{f_x}$ où $f_x(y) = f(y - x)$.

Le sous-espace de Banach $\{e \in E,\ \|L_x e - e\| \to 0,\ x \to 0\}$ des éléments continus d'un G-module possède une structure de $L^1(G)$-module compatible donnée par $(f, e) \mapsto f * e = \int_{x \in G} L_x e f(x) dx$. De même le sous-espace de Banach $L^1(G) * E$, appelé partie essentielle du $L^1(G)$-module E a une structure de $L^1(G)$-module compatible ; la “translation” est donnée par, si $e = f * e_1$, $L_x e = f_x * e_1$. Dans un $L^1(G)$-module avec translation compatible les sous-espaces de Banach suivants coïncident :

$$E_{\text{ess}} = \{f * e,\ f \in L^1(G),\ e \in E\} = \{e \in E,\ \lim_\alpha \mu_\alpha * e = e\}$$

où $\{\mu_\alpha\}_\alpha$ est une unité approchée bornée de $L^1(G)$ (u.a.b.),

$$= E_a = \{e \in E, \lim_{x \to 0} L_x e = e\}.$$

Dans la suite, tous les $L^1(G)$-modules considérés seront à translation compatible.

1.2 Spectre d'un élément

Le *spectre (de Beurling)* d'un élément e d'un $L^1(G)$-module est le sous-ensemble fermé de $\Gamma = \widehat{G}$, groupe dual de G, définit par $\mathrm{Sp}(e) = \{\gamma \in \Gamma,\ \hat{f}(\gamma) = 0$ pour tout $f \in I_e\}$ où I_e est l'idéal de $L^1(G)$, $I_e = \{f \in L^1(G),\ f * e = 0\}$ et $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f.

E est dit *non-dégénéré* si pour tout e, $\mathrm{Sp}(e) \neq \Gamma$. L'existence d'u.a.b dans $L^1(G)$ implique que le sous-espace E_c des éléments de E à spectre compact est dense dans E_{ess} si E est non-dégénéré.

Le sous-$L^1(G)$-module E_γ des éléments (non-dégénérés) admettant un spectre contenu dans $\{\gamma\}$, appelé *sous-module propre* associé à γ, vérifie :

$$E_\gamma = \{e \in E, \mathrm{Sp}(e) \subset \{\gamma\}\} = \\ \{e \in E,\ f * e = \hat{f}(\gamma)e,\ \forall f \in L^1(G)\} = \{e \in E,\ L_x e = \overline{(\gamma, x)}e,\ \forall x \in G\}.$$

Le sous-espace des éléments à spectre fini (ou vide) engendré par les E_γ, $\gamma \in \Gamma$, est noté $E_{\mathrm{fin}} = \bigcup_{\mathcal{F}_i \in \mathcal{F}} \oplus_{\gamma_i \in \mathcal{F}_i} E_{\gamma_i}$ où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des parties finies de Γ.

Cet ensemble joue un rôle important dans l'étude des éléments presque-périodiques.

1.3 Éléments presque-périodiques

La définition de la presque-périodicité peut-être donnée par le résultat suivant :

Théorème fondamental (C. Datry, G. Muraz ([Da/Mu2], II)) . — *Un élément e d'un $L^1(G)$-module est dit presque-périodique s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

i) $\{L_x e,\ x \in G\}$ *est relativement compact.*

ii) $\{f * e,\ f \in L^1(G),\ \|f\|_1 \leq 1\}$ *est relativement compact (l'application de $L^1(G)$ dans E, $f \mapsto f * e$ est compacte).*

iii) L'application de G dans E : $x \mapsto L_x e$, est continue pour la topologie du compactifié de Bohr $\overline{G}$, restreint à G.

iv) e appartient à l'adhérence de E_{fin}.

La propriété *iii)* implique que le sous-espace de Banach $AP(E)$ des éléments presque-périodiques de E est aussi un $L^1(\overline{G})$-module essentiel avec translation compatible ; la translation pour $\overline{x} \in \overline{G}$ est encore notée $L_{\overline{x}}$ et l'action de $L^1(\overline{G})$ sur $AP(E)$ $\overline{*}$; par exemple si $\{\mu_\beta\}_\beta$ est une u.a.b. dans $L^1(\overline{G})$ à support compact dans Γ_d (donc fini), e presque-périodique vérifie $\lim_\beta \mu_\beta \overline{*} e = e$, ce qui implique *iv)*, c'est-à-dire $AP(E) = \overline{E}_{\mathrm{fin}}$.

L'ensemble E_{fin} conditionne l'existence d'éléments presque-périodiques ; par exemple dans le cas $L^\infty(G)$, E_{fin} correspond à l'espace des polynômes trigonométriques ; si G n'est pas compact $L^p(G)$, $1 \leq p < +\infty$ n'a pas d'élément presque-périodique non nul.

1.4 Transformation de Fourier ergodique et développement de Fourier-Bohr

Soit $\{\sigma_\alpha\}_\alpha$ un "*filet de Reiter*" [R], c'est-à-dire un filtre d'éléments de $L^1(G)$ vérifiant :

- $\|\sigma_\alpha\|_1 = \int_{x\in G} \sigma_\alpha(x)dx = \hat{\sigma}_\alpha(0)$.
- $\lim_\alpha \|\sigma_\alpha * \mu - \hat{\mu}(0)\sigma_\alpha\|_1 = 0$ pour tout $\mu \in M(G) \quad (\mu \in L^1(G))$.

Par exemple pour $G = \mathbb{R}$ $\sigma_\alpha = \frac{1}{\alpha} X_{[0,\alpha]}(x)$ ou pour $G = \mathbb{Z}$ $\sigma_\alpha = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\alpha} \delta_k$.

Un élément e de E admet un *transformé de Fourier ergodique* en $\gamma \in \Gamma$ si le filtre $M_\gamma \sigma_\alpha * e$ admet une limite, notée $e^\triangle(\gamma)$ dans E, où $(M_\gamma\sigma_\alpha)(x) = \langle \gamma, x\rangle \sigma_\alpha(x)$.

D'après la définition de $\{\sigma_\alpha\}$, si $e^\triangle(\gamma)$ existe, pour tout f dans $L^1(G)$, $(f*e)^\triangle(\gamma)$ existe aussi avec $(f*e)^\triangle(\gamma) = \hat{f}(\gamma)e^\triangle(\gamma)$, c'est-à-dire $e^\triangle(\gamma)$ est dans E_γ.

Le sous-espace de Banach de ces éléments est noté $E_{\mathrm{erg}\,\gamma}$ et les éléments de $E_{\mathrm{erg}} = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ sont appelés *totalement ergodiques*. Cet espace contient $AP(E)$ et pour les éléments presque-périodiques la transformation de Fourier ergodique et le *développement de Fourier-Bohr* coïncident c'est-à-dire

$$e^\triangle(\gamma) = \int_{\overline{x}\in\overline{G}} \langle \gamma, \overline{x}\rangle L_{\overline{x}} e d\overline{x} = e^{\bar{\wedge}}(\gamma).$$

2 Sous-ensembles compacts et propriété d'approximation

2.1 Une propriété de régularité

La propriété de régularité à l'infini sur Γ, vérifiée par les ensembles relativement compacts est à rapprocher de la condition de Prokhorov [V-M] vérifiée par les ensembles de mesures compacts pour la topologie étroite.

Théorème . — *Un ensemble K relativement compact, contenu dans la partie essentielle d'un $L^1(G)$-module E vérifie les conditions suivantes :*

i) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact C de Γ tel que pour tout $e \in K$, il existe e_C vérifiant

$$\mathrm{Sp}(e_C) \subset C$$
$$\|e - e_C\| < \varepsilon.$$

ii) Pour tout unité approchée bornée $\{\mu_\alpha\}_\alpha \in L^1(G)$

$$\lim_\alpha \sup_{e\in K} \|\mu_\alpha * e - e\| = 0.$$

Démonstration. — Pour des ensembles bornés ces deux conditions de régularité sont évidemment équivalentes ; il suffit de considérer une u.a.b. $\{\mu_\alpha\}_\alpha$ où les $\hat{\mu}_\alpha$ sont à support compact C_α dans Γ. Les éléments $\mu_\alpha * e$ ont des spectres contenus dans C_α ce qui montre que *ii)* implique *i)*.

Pour un ensemble borné ne contenant que des éléments ayant des spectres contenus dans un même compact, la condition *ii)* est réalisée ce qui prouve la réciproque.

La propriété des réverbères pour les ensembles relativement compacts assure l'existence, pour $\varepsilon > 0$ fixé, d'un nombre fini d'éléments $\{e_i\}$ $i = 1, \ldots, n$ de K tel que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{e,\ \|e - e_i\| < \varepsilon/2\}.$$

Pour tout i, e_i étant un élément de E_{ess}, il existe un compact C_i de Γ et un élément e_{C_i} avec $\text{Sp}(e_{C_i}) \subset C_i$ et $\|e_i - e_{C_i}\| < \varepsilon/2$ ce qui implique

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{e,\ \|e - e_{C_i}\| < \varepsilon\} \text{ et } \text{Sp}(e_{C_i}) \subset C_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i = C.$$

La traduction de cette "équicontinuité à l'infini" n'est évidemment valable que si K est contenu dans la partie essentielle, ensemble des éléments "continus".

En utilisant les propriétés des éléments presque-périodiques rappelées ci-dessus, comme $AP(E)$ est aussi un $L^1(\overline{G})$-module et comme le groupe dual de $\overline{G}$ est Γ_d, les compacts de Γ_d sont les ensembles finis ; le résultat peut s'écrire :

Corollaire . — *Soit K un ensemble relativement compact d'éléments presque-périodiques ; pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tels que pour tout $e \in K$ il existe $e_\varepsilon \in \oplus_{i=1}^{n} E_{\gamma_i}$ avec $\|e - e_\varepsilon\| < \varepsilon$.*

Remarque. — Comme précédemment cette condition peut s'énoncer : pour toute u.a.b. $\{\mu_\beta\}_\beta$ de $L^1(\overline{G})$, $\lim_\beta \sup_{e \in K} \|u_\beta \overline{*} e - e\| = 0$.

2.2 Propriété d'approximation (p.a.)

Dans la théorie générale des espaces de Banach la propriété d'approximation suivante est importante, notamment pour l'étude des opérateurs compacts [L/Tz] : un espace de Banach X a la *propriété d'approximation* (p.a.) si pour tout compact $K \subset X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un opérateur de rang fini de X dans X tel que $\|Tx - x\| < \varepsilon$ pour tout x dans K.

Dans un $L^1(G)$-module, si le sous-$L^1(G)$-module formé des éléments dont le spectre est contenu dans un compact C est noté $E(C) = \{e \in E, \text{Sp}(e) \subset C\}$, l'application des résultats précédents donne :

Corollaire . — *E_{ess} vérifie p.a. si et seulement si pour tout compact C de Γ, $E(C)$ vérifie p.a.*

Corollaire. — *$AP(E)$ vérifie p.a. si et seulement si pour tout $\gamma \in \Gamma$, E_γ vérifie p.a.*

Dans ce dernier résultat, il est à remarquer que si pour tout γ, $\dim E_\gamma < +\infty$, $AP(E)$ vérifie p.a.

2.3 Compact invariant par translation

Un ensemble compact invariant par translation contenant l'orbite de tous ses éléments, est contenu dans $AP(E)$. La caractérisation suivante découle des résultats précédents :

THÉORÈME . — *Soit K une partie invariante par translation de la boule unité d'un $L^1(G)$-module. Une condition nécessaire pour que K soit relativement compacte est : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tels que pour tout $e \in K$, il existe*

$$e_\varepsilon \in \oplus_{i=1}^n E_{\gamma_i}, \quad \|e_\varepsilon\| \leq 1 \quad et \quad \|e - e_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Cette condition est suffisante si $\dim E_\gamma < +\infty$*, pour tout $\gamma \in \Gamma$.*

Il est à remarquer que cette dernière condition est encore suffisante si l'hypothèse invariante par translation est remplacée par contenue dans $AP(E)$.

Une conséquence immédiate est ([P/Te1], [Da/Mu1]) :

COROLLAIRE. — *Tout sous-$L^1(G)$-module (ou sous G-module) de dimension finie est contenu dans un espace de la forme $\oplus_{i\in\mathcal{F}} E_{\gamma_i}$, $\mathcal{F}$ fini.*

Une application directe est le résultat classique suivant [C3], [Da/Mu1], [P/Te2] et [Te1] :

Les espaces $L^p(G)$, $1 \leq p < +\infty$, les algèbres de Segal définis sur un groupe G localement compact abélien, non compact, ne contiennent pas de sous-espace invariant par translation de dimension finie autre que $\{0\}$.

L'existence de tel sous-espace dans E est ramené au même problème dans E_γ.

3 Multiplicateurs compacts

Dans l'espace des opérateurs bornés $\mathcal{L}(E, F)$, les sous-espaces $\mathcal{H}_G(E, F)$ de G-homomorphismes et $\mathcal{H}_{L^1(G)}(E, F)$ des $L^1(G)$-homomorphismes ne sont pas les mêmes et l'équivalence de ces deux notions fait partie du folklore du sujet.

Pour éviter toute ambiguïté, un opérateur borné de E dans F est appelé *multiplicateur* s'il est à la fois un $L^1(G)$-homomorphisme et un G-homomorphisme ; leur ensemble noté $\mathcal{M}(E, F) = \mathcal{H}_{L^1(G)}(E, F) \cap \mathcal{H}_G(E, F)$ est un $L^1(G)$-module avec G-action compatible.

Pour cette étude, le résultat suivant donné dans [Da/Mu2] permet de préciser cet ensemble : soient E et F des $L^1(G)$-modules avec translation compatible, E essentiel ; $\mathcal{H}_{L^1(G)}(E, F)$ est contenue dans $\mathcal{H}_G(E, F)$, avec égalité si F est non dégénéré.

Si l'ensemble des multiplicateurs compacts est noté $\mathcal{K}(\mathcal{M}(E, F))$, le résultat annoncé s'écrit :

THÉORÈME. — *Soit E et F deux $L^1(G)$-modules avec translation compatible ; tout multiplicateur compact est presque-périodique :*

$$\mathcal{K}(\mathcal{M}(E, F)) \subset AP(\mathcal{M}(E, F)).$$

Si pour tout $\gamma \in \Gamma$, les sous-espaces F_γ sont de dimension finie

$$\mathcal{K}(\mathcal{M}(E, F)) = AP(\mathcal{M}(E, F)).$$

Comme les espaces $\mathcal{M}(E,E)_\gamma$ peuvent s'identifier à $\mathcal{L}(E,E_\gamma)$, le développement de Fourier-Bohr s'écrit :

Corollaire. — *Soit T un multiplicateur compact d'un $L^1(G)$-module E avec translation compatible ; pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe $T^{\bar{\wedge}}(\gamma) \in \mathcal{K}(\mathcal{M}(E,E_\gamma))$ telle que*

$$T = \lim_{\mathcal{F}_i \in \mathcal{F}} \sum_{\mathcal{F}_i} T^{\bar{\wedge}}(\gamma_i)$$

où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des parties finies de Γ.

Démonstration du théorème. — Soit $T \in \mathcal{K}(\mathcal{M}(E,F))$; pour tout $e \in E$, l'orbite $\{L_x Te,\ x \in G\}$ de son image est relativement compact ; pour tout $\nu \in L^1(\overline{G})$, l'opérateur noté $\nu \bar{*} T$ défini par $e \mapsto \nu \bar{*} T(e)$ est un multiplicateur compact de E dans $AP(F) \subset F$; en particulier si $\{\mu_\beta\}_\beta \in L^1(\overline{G})$ est une u.a.b. dans $L^1(\overline{G})$ à support compact (donc fini) dans Γ_d, les multiplicateurs $\mu_\beta \bar{*} T$ sont à spectre fini. La compacité de T implique, en utilisant les résultats sur les ensembles relativement compacts :

$$\lim_\beta \sup_{e \in E \smallsetminus \|e\| \leq 1} \|\mu_\beta \bar{*} T(e) - Te\| = \lim_\beta \|\mu_\beta \bar{*} T - T\| = 0$$

c'est-à-dire $T \in \overline{\mathcal{M}(E,F)_{\text{fin}}} = AP(\mathcal{M}(E,F))$. Si pour tout $\gamma \in \Gamma$, les sous-espaces F_γ sont de dimension finie, tout multiplicateur admettant un spectre fini est compact c'est-à-dire

$$\mathcal{M}(E,F)_{\text{fin}} \subset \mathcal{K}(\mathcal{M}(E,F)) \subset AP(\mathcal{M}(E,F))$$

et par densité $\overline{\mathcal{M}(E,F)_{\text{fin}}} = \mathcal{K}(\mathcal{M}(E,F)) = AP(\mathcal{M}(E,F))$.

Remarque. — L'hypothèse sur la dimension de F_γ n'est pas nécessaire pour avoir l'égalité. Par contre une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{K}(\mathcal{M}(E,F)) = AP(\mathcal{M}(E,F))$ est pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{M}(E,F_\gamma) \subset \mathcal{K}(\mathcal{M}(E,F_\gamma))$ ou encore :

$$\text{Pour tout } \gamma \in \Gamma \text{ tel que } \mathcal{M}(E,F_\gamma) \neq \{0\}, \dim F_\gamma < +\infty.$$

C'est le cas général des exemples classiques de fonctions mesures ou distributions (à valeurs complexes) définies sur G.

Pour $F = B(G)$, espace des fonctions bornées muni de la norme de la borne uniforme, G. Crombez montre ce résultat, G pas forcément commutatif [C3].

Remarque. — Dans le même sens, un multiplicateur compact est limite d'opérateurs de rang fini si et seulement si la propriété est vraie pour les éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{M}(E,F_\gamma))$ ou encore pour tout γ tel que $\mathcal{M}(E,F_\gamma) \neq \{0\}$, F_γ à la propriété d'approximation.

Pour des algèbres de Segal définies sur un groupe abélien compact ce résultat est obtenu dans [P/Te2].

L'équivalence entre $\mathcal{K}(\mathcal{M}(E,F))$ et $\mathcal{K}(\mathcal{M}(E,AP(F)))$ montre que l'existence de multiplicateurs compacts dépend de $AP(F)$.

Le cas $E = L^1(G)$ correspond en fait à la définition des éléments presque-périodiques donnée dans les rappels :

$$\mathcal{K}(\mathcal{M}(L^1(G), E))) = \mathcal{K}(\mathcal{M}(L^1(G), AP(E))) = AP(E).$$

En particulier $\mathcal{M}(L^1(G), AP(E)) \neq AP(E)$ et d'une façon générale, comme le montre la démonstration du théorème précédent $\mathcal{M}(E, AP(F))$ est l'adhérence pour la topologie forte d'opérateurs de $\mathcal{M}(E, AP(F))_{\text{fin}}$. L'application identité de $AP(E)$ dans $AP(E)$ peut être limite pour la topologie forte d'opérateurs, de multiplicateurs compacts sans être compacte ($\dim AP(E)$ infinie).

4 Opérateurs subordinatifs

Parmi les multiplicateurs dans les $L^1(G)$-modules les opérateurs subordinatifs ([Be], [Be/Mu], [Ma], [Mu 1,2,3]) représentent une classe d'opérateurs intéressante.

Dans un $L^1(G)$-module un opérateur T est dit *subordinatif* si pour tout $e \in E$, l'image Te appartient au sous-espace fermé engendré par $L^1(G)*e$. Pour les éléments de la partie essentielle de E cette définition correspond à la définition plus classique c'est-à-dire $Te \in V_e = \overline{\{\sum\limits_i \lambda_i L_{x_i} e\}}$ puisque les deux sous-espaces $\overline{\{\sum\limits_i \lambda_i L_{x_i} e\}}$ et $\overline{\{L^1(G) * e\}}$ coïncident. Ces opérateurs sont des $L^1(G)$-homomorphismes ([Be], [Be/Mu], [Mu 1,2]) c'est-à-dire si E est essentiel et non dégénéré, des multiplicateurs. Ces opérateurs vérifient le théorème de représentation :

Théorème. — *Soit T un opérateur subordinatif de E dans E ; il existe une fonction bornée $\varphi_T(\gamma)$ de Γ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout $e \in E_{\text{erg}}$, φ_T vérifie*

$$(Te)^{\triangle}(\gamma) = \varphi_T(\gamma) e^{\triangle}(\gamma).$$

Démonstration. — L'image (Te) d'un élément totalement ergodique e par un opérateur subordinatif est encore totalement ergodique puisque E_{erg} est un $L^1(G)$-module $(\overline{L^1(G) * E_{\text{erg}}} \subset E_{\text{erg}})$.

Pour un élément e de E_γ le sous-espace $\overline{L^1(G) * e}$ s'identifie avec $(\mathbb{C} \cdot e)$; $T(e)$ est un multiple de e.

Soit e_1 et e_2 (non nuls) dans E_γ ; il existe λ_1, λ_2 et λ_3 vérifiant

$$T(e_1) = \lambda_1 e_1, \quad T(e_2) = \lambda_2 e_2, \quad T(e_1 + e_2) = \lambda_3(e_1 + e_2) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2,$$

c'est-à-dire $(\lambda_3 - \lambda_1)e_1 = (\lambda_2 - \lambda_3)e$.

Si $e_2 = \mu e_1 (\mu \neq 0)$, $\lambda_1 = \dfrac{\lambda_2 \mu}{\mu} = \lambda_3 \Big(\dfrac{1+\mu}{1+\mu}\Big)$.

Si $e_2 \notin \mathbb{C} \cdot e_1$, $\quad \lambda_3 - \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_3 = 0$ c'est-à-dire $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

En restriction à E_γ, il existe $\lambda_\gamma \in \mathbb{C}$ avec $Te = \lambda_\gamma e$ pour tout $e \in E_\gamma$ et $|\lambda_\gamma| \leq \|T\|$.

En posant $\varphi_T(\gamma) = \lambda_\gamma$ il suffit pour démontrer le théorème de vérifier, pour $e \in E_{\text{erg}}$, l'égalité

$$(Te)^{\triangle}(\gamma) = \varphi_T(\gamma) e^{\triangle}(\gamma).$$

Soit $e \in E_{\text{erg}}$ et $\{\sigma_\alpha\}_\alpha$ un filet de Reiter ; le calcul de $(Te)^\triangle(\gamma)$ est donné par :

$$(Te)^\triangle(\gamma) = \lim_\alpha (M_\alpha \sigma_\alpha * Te) = T \lim_\alpha (M_\gamma \sigma_\alpha * e) = T(e^\triangle(\gamma)) = \lambda_\gamma e^\triangle(\gamma).$$

En fait, le raisonnement précédent montre que si T est subordinatif et si $e \in E_{\text{erg}\,\gamma}$ alors $(Te)^\triangle(\gamma)$ existe avec $(Te)^\triangle(\gamma) = \varphi_T(\gamma)e^\triangle(\gamma)$. La réciproque est vraie.

THÉORÈME. — *Soit T subordinatif et $e \in E$; si $(Te)^\triangle(\gamma)$ existe non nul, $e^\triangle(\gamma)$ existe aussi, non nul, avec $(Te)^\triangle(\gamma) = \varphi_T(\gamma)e^\triangle(\gamma)$.*

Démonstration. — Soit $e \in E$, $\{f_n\}_n \in L^1(G)$ avec $\lim_n f_n * e = Te$ et $\{\sigma_\alpha\}_\alpha$ un filet de Reiter. Par hypothèse $(Te)^\triangle(\gamma)$ est obtenu par :

$$(Te)^\triangle(\gamma) = \lim_\alpha (M_\gamma \sigma_\alpha) * Te = \lim_\alpha \lim_n (f_n * M_\gamma \sigma_\alpha * e).$$

Les inégalités suivantes sont immédiates :

$$\|M_\gamma\sigma_\alpha * Te - \hat{f}_n(\gamma) M_\gamma \sigma_\alpha * e\| \leq \|Te - f_n * e\| \, \|M_\gamma \sigma_\alpha\| + \|M_\gamma\sigma_\alpha * f_n - \hat{f}_n(\gamma) M_\gamma \sigma_\alpha\| \, \|e\|,$$

$$\|M_\gamma \sigma_\alpha * e\| \leq \frac{\|M_\gamma \sigma_\alpha * Te\|}{|\hat{f}_n(\gamma)|} + \frac{\|Te - f_n * e\|}{|\hat{f}_n(\gamma)|} + \frac{\|e\| \, \|M_\gamma \sigma_\alpha * f_n - \hat{f}_n(\gamma) M_\gamma \sigma_\alpha\|}{|\hat{f}_n(\gamma)|}.$$

Les propriétés générales d'un filet de Reiter impliquent :

– Si $\{f_n\}_n$ admet une sous-suite convergente vers λ :

$$(Te)^\triangle(\gamma) = \lim_\alpha (M_\gamma \sigma_\alpha * Te) = \lambda \lim_\alpha M_\gamma \sigma_\alpha * e = \lambda e^\triangle(\gamma).$$

– Si $\{f_n\}_n$ n'admet pas de sous-suite convergente, $|\hat{f}_n(\gamma)|$ tend vers $+\infty$:

$$\lim_\alpha \|M_\gamma \sigma_\alpha * e\| \leq \frac{\|(Te)^\triangle(\gamma)\| + \|Te - f_n * e\|}{|\hat{f}_n(\gamma)|}$$

c'est-à-dire $\lim_\alpha \|M_\gamma \sigma_\alpha * e\| = 0$ ou encore $e^\triangle(\gamma) = 0$ ce qui entraîne $(Te)^\triangle(\gamma) = 0$ d'après le résultat précédent.

En restriction aux espaces E_γ les opérateurs subordinatifs sont des multiples de l'identité ce qui donne le théorème de décomposition spectrale :

THÉORÈME. — *Soit T un multiplicateur subordinatif compact du $L^1(G)$-module E avec translation compatible ; il existe une fonction bornée φ_T bornée par $\|T\|$ de Γ dans $\mathbb{C}$ telle que*

$$T = \lim_{\mathcal{F}} \sum_{\mathcal{F}_i} \varphi_T(\gamma_i) I_{\gamma_i}$$

où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des parties finies de Γ et I_{γ_i} un multiplicateur projection de E sur E_{γ_i} si $\varphi_T(\gamma_i) \neq 0 (\dim E_{\gamma_i} < +\infty)$.

Les sous-espaces E_{γ_i} étant de dimension finie si $\varphi_T(\gamma_i) \neq 0$, les I_{γ_i} sont de rang fini.

COROLLAIRE. — *Tout multiplicateur subordinatif compact est limite de multiplicateur de rang fini.*

Démonstration du théorème. — Un multiplicateur subordinatif compact étant presque périodique il est totalement ergodique et pour tout $\gamma \in \Gamma$, $T^{\triangle}(\gamma)$ existe avec $T^{\triangle}(\gamma)(e) = (Te)^{\triangle}(\gamma)$. D'après le théorème de représentation, il existe φ_T bornée $\|\varphi_T\|_\infty \leq \|T\|$ avec

$$(Te)^{\triangle}(\gamma) = \varphi_T(\gamma) e^{\triangle}(\gamma) \quad \text{si} \quad \varphi_T(\gamma) \neq 0.$$

De plus si $T^{\triangle}(\gamma)$ n'est pas nul, c'est-à-dire $\varphi_T(\gamma) \neq 0$, $I_\gamma = \frac{1}{\varphi_T(\gamma)} T^{\triangle}(\gamma)$ est une projection compacte sur E_γ ; E_γ est de dimension finie.

Suivant les topologies considérées sur F et sur $\mathcal{L}(E, F)$ il existe plusieurs notions de compacité ou de presque-périodicité.

Les méthodes ergodiques utilisées ne s'appliquent pas aux éléments faiblement presque-périodiques. Un élément faiblement presque-périodique (pour la topologie $\sigma(E, E')$) est encore totalement ergodique et se décompose en une partie presque-périodique et une partie dégénérée admettant une transformation de Fourier ergodique nulle ([E], [Da/Mu2], II).

Le cas $E = F = L^2(G)$ montre que les théorèmes précédents ne se généralisent pas aux multiplicateurs faiblement compacts et aux multiplicateurs faiblement presque-périodiques ; $\mathcal{M}(L^2(G), L^2(G))$ s'identifiant à $L^\infty(\Gamma)$, tout multiplicateur est faiblement compact et si $\varphi(\gamma) \in L^\infty(\Gamma)$ l'ensemble $\{\langle \gamma, x\rangle \varphi(\gamma), x \in G\}$ n'est pas relativement compact pour la topologie de dualité avec le dual $(L^\infty(\Gamma))'$.

Références

[A] Akeman c.a. — *Some mapping properties of the group algebras of a compact group*, Pac. J. Math. **22** (1967), 1–8.

[Ba/G] Bachelis g.f., Gilbert j.e. — *Banach spaces of compact multipliers and their dual spaces*, Math. Z. **125** (1972), 285–297.

[Ba/Pi] Bachelis g.f., Pigno l. — *A characterization of compact multipliers*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 319–322.

[Be] Bertrandias j.p. — *Opérateurs subordinatifs sur des fonctions bornées en moyenne quadratique*, J. Math. Pures Appl. **52** (1973), 27–63.

[Be/Mu] Bertrandias j.p., Muraz g. — *Opérateurs subordinatifs dans les espaces à accouplements*, C.R.Acad.Sci.Paris Série A Math. **275**, 1972.

[C1] Crombez g. — *Almost periodicity in groups and compactness of operators*, Bull. Soc. Math. de Belgique **31, (2)B** (1979), 197–201.

[C2] Crombez g. — *Almost periodic pseudo-measures and compact multiplications operators*, Simon Stevin, **55 n° 1-2**, 1981.

[C3] Crombez g. — *Compactness and almost periodicity of multipliers*, Canad. Math. Bull. **26(1)** (1983), 58–62.

[C/G1] Crombez g, Govaerts w. — *Compact convolution operators between $L^p(G)$-spaces*, Colloq. Math. **39** (1978), 325–329.

[C/G2] Crombez g, Govaerts w. — *Weakly compact convolution in $L^1(G)$*, Simon Stevin **52** (1978), 65–72.

[C/G3] CROMBEZ G, GOVAERTS W. — *Completely continuous multipliers from $L^1(G)$ into $L^\infty(G)$*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **32(2)** (1984), 137–154.

[Da/Mu1] DATRY C., MURAZ G. — *Multiplicateurs d'une algèbre de Banach commutative semi-simple régulière*, Groupe de travail d'analyse harmonique, Grenoble **fasc. I, II** (1982), 1–15.

[Da/Mu2] DATRY C., MURAZ G. — *Analyse harmonique dans les modules de Banach,*

Part. I : Propriétés générales, Bull. des Sci. Maths. **119(4)** (1995), *Part. II : Presque-périodicité et ergodicité*, Bull. des Sci. Maths. **120(4)**(1996).

[Dun/Ra] DUNKL C.F., RAMIREZ D.E. — *Multipliers on compact groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **28** (1971), 456–460.

[Du/Te] DUTTA M., TEWARI U.B. — *On multipliers of Segal algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 121–124.

[E1] EBERLEIN W.F. — *Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **67** (1949), 217–240.

[E2] EBERLEIN W.F. — *The point spectrum of weakly almost periodic functions*, Michigan M.J. **3** (1955), 137–139.

[Fe] FEICHTINGER H.G. — *Compactness in translation invariant Banach spaces of distributions and compact multipliers*, J. Math. Anal. Appl. **102** (1984), 289–327.

[Fr] FREIDBERG S.H. — *Compact multipliers on Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **77** (1979), 210.

[Ka] KAMAWITZ H. — *On compact multipliers of Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 79–80.

[Kr] KROGSTAD H.E. — *Multipliers of Segal algebras*, Math. Scand. **38** (1976), 285–303.

[L/Tz] LINDENSTRAUSS J., TZAFIRI L. — *Classical Banach spaces I, sequences spaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1977.

[Ma] MASANI P. — *The normality of time invariant subordinative operators in a Hilbert space*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 546–550.

[Mu1] MURAZ G. — *Multiplicateurs de $L^p(G)$ dans $L^{p'}(G)$*, C. R. Acad. Sci. Paris Série A Math. **285** (1977), 845–847.

[Mu2] MURAZ G. — *Opérateurs subordonnés à une mesure spectrale*, C. R. Acad. Sci. Paris Série A Math. **289** (1979), 271–273.

[Mu3] MURAZ G. — *Multiplicateurs sur les $L^1(G)$-modules*, Groupe de travail d'analyse harmonique, Grenoble **fasc. I(V)** (1982), 1–12.

[P/Te1] PARTHASARATHY K., TEWARI U.B. — *Isometric multipliers of Segal algebras*, Bull. Austral. Math. Soc. **20** (1979), 105–114.

[P/Te2] PARTHASARATHY K., TEWARI U.B. — *Compact multipliers of Segal algebras*, Indian J. Pure Appl. Math. **14(2)** (1983), 194–201.

[R] REITER H. — *Classical Fourier analysis on locally compact groups*, Oxford Univ. Press, 1968.

[S] SAKAI S. — *Weakly compact operator on operator algebras*, Pac. J. Math. **14** (1964), 659–664.

[Te1] TEWARI U.B. — *Multipliers of Segal algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **54** (1976), 157–161.

[Te2] TEWARI U.B. — *Compactness and almost periodicity of multipliers*, (manuscrit).

[V-M] VOLPATTI-MURAZ D. — *Critères de compacité étroite sur un groupe abélien localement compact*, Bull. Soc. Math. France 2e série **96** (1972), 263–271.

Université de Grenoble
Institut Fourier
UMR 5582 du CNRS et de l'UJF
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
e-mail : muraz@fourier.ujf-grenoble.fr