Description explicite d'une famille de groupes de Kac-Moody affines

Philippe Masson *

Abstract

For each standard affine data satisfying some condition on the coroots, we define a group functor on the category of all rings which is a subgroup of some group functor $R \mapsto \mathcal{G}(R[t,t^{-1}]) \rtimes \mathcal{T}(R)$, where $\mathcal{G}$ is a Chevalley scheme and $\mathcal{T}$ is a torus. This functor is then shown to satisfy the conditions of the five axioms required by [Ti4] to be a 'minimal' Kac-Moody group.

1 Introduction

"A l'origine, les algèbres de Lie (de dimension finie) n'étaient qu'un outil commode pour l'étude de ce que Lie, Killing et Cartan appelaient les 'groupes continus finis' " (cité d'après [Ti5]). Vers 1968, V.Kac et R.V.Moody ont introduit les algèbres de Lie de dimension infinie qui portent leur nom et qui ont fait l'objet de nombreux travaux depuis. Il est donc "naturel de se demander si l'on peut obtenir des groupes intéressants par 'intégration' de ces algèbres" ([Ti5]).

Ce problème a été étudié par différentes personnes avec différentes méthodes. Cependant, nous ne nous intéressons dans cet article qu'à l'approche axiomatique de J.Tits et nous renvoyons le lecteur à [Ti5] pour une exposition historique et mathématique des autres points de vue possibles. Le but de J.Tits est d'éviter l'emploi d'une représentation linéaire de l'algèbre et de s'affranchir de toute restriction de caractéristique. Dans son article de 1987, [Ti4], il donne cinq axiomes naturels qu'un foncteur en groupes sur les anneaux doit vérifier pour pouvoir s'appeler groupe de

*Aspirant au Fonds National de la Recherche Scientifique

Received by the editors July 1994
Communicated by J. Tits
AMS Mathematics Subject Classification : 22E65, 17B67
Keywords : Kac-Moody groups, Kac-Moody algebras, Chevalley schemes.

Kac-Moody minimal. On l'appelle minimal par opposition aux diverses complétions possibles, voir [Ti3] et [Ti5]. J.Tits montre ensuite que tous les foncteurs qui vérifient ces axiomes prennent la même valeur sur les corps, même s'ils peuvent différer sur des anneaux plus généraux. Il donne aussi une construction de ces groupes par générateurs et relations.

Cependant, dans le cas d'une matrice de Cartan complétée, c'est-à-dire le cas affine standard, pour un choix très simple des racines, voir appendice 2 de [Ti3], le foncteur "concret" $R \mapsto \mathcal{G}(R[t,t^{-1}])$, où $\mathcal{G}$ est un schéma de Chevalley simplement connexe, satisfait aux cinq axiomes de [Ti4] mais diffère, sur certains anneaux, du groupe construit par générateurs et relations. D'après [Ti5], le foncteur "concret" serait le plus naturel des deux.

Le but de cet article est de généraliser cette construction "concrète" à une famille de données affines standard, précisée à la section 5. Les foncteurs que nous définissons envoient tout anneau R sur le produit semi-direct d'un sous-groupe de $\mathcal{G}(R[t,t^{-1}])$ par un tore, où $\mathcal{G}$ est un schéma de Chevalley semi-simple pas forcément simplement connexe. Par exemple, un de nos foncteurs envoie tout anneau R sur $SL_2(R[t,t^{-1}])$, comme dans l'appendice 2 de [Ti3]; un autre envoie R sur $PSL_2(R[t,t^{-1}])$, sous-groupe de $PGL_2(R[t,t^{-1}])$. Ensuite, dans la section 6, nous montrons que tous ces foncteurs vérifient les conditions des cinq axiomes de [Ti4]. Ils fournissent donc, pour une famille de cas particuliers, une solution au problème, posé ci-dessus, d'associer des groupes aux algèbre de Kac-Moody, pour tout anneau.

J'ai le plaisir de remercier ici Jacques Tits pour ses conseils nombreux et avisés sans lesquels cette démonstration n'aurait pu être menée à bien.

Conventions et notations Tous les anneaux, corps et algèbres sont supposés commutatifs, avec une unité. Les ensembles des nombres entiers, rationnels et complexes sont respectivement notés **Z,Q,C**.

2 Les groupes de Kac-Moody

Dans cette section, nous rappelons la définition axiomatique des groupes de Kac-Moody, due à J.Tits, voir [Ti4]. Par groupe de Kac-Moody, nous entendons toujours groupe de Kac-Moody minimal, par opposition aux complétions possibles, voir [Ti3] et [Ti5]. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que ces groupes de Kac-Moody sont en réalité des foncteurs en groupes.

Soit un système $D = (I, \Lambda, (\alpha_i)_{i\in I}, (\check{\alpha}_i)_{i\in I})$ qui consiste en un ensemble fini I, un groupe abélien libre Λ finiment engendré, et deux applications $i \mapsto \alpha_i$ et $i \mapsto \check{\alpha}_i$ de I dans Λ et son **Z**-dual $\check{\Lambda}$, respectivement. On pose $A_{ij} = \alpha_j(\check{\alpha}_i)$, et l'on impose que A soit une matrice de Cartan généralisée.

Dans ce qui suit, les foncteurs sont toujours des foncteurs sur la catégorie des anneaux et R désigne toujours un anneau. Soit $\mathcal{T}$ le foncteur en groupes $\mathrm{Hom}(\Lambda, Mult)$ défini par $\mathcal{T}(R) = \mathrm{Hom}(\Lambda, R^\times)$.

Soit SL_2 le foncteur en groupes sur les anneaux commutatifs défini par

$$SL_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R; ad - bc = 1 \right\}.$$

Soit F un foncteur en groupes sur la catégorie des anneaux commutatifs. Le foncteur F est un **groupe de Kac-Moody minimal**, associé à la donnée D, s'il existe des homorphismes $\varphi_i : SL_2 \to F$, indexés par I, et un homomorphisme $\eta : \mathcal{T} \to F$ tels que les cinq axiomes suivants sont vérifiés:

Axiome 1 Si R est un corps, $F(R)$ est engendré par les images des $\varphi_i(R)$ et de $\eta(R)$.

(N.B. Cet axiome doit être vérifié car nous traitons la version minimale des groupes de Kac-Moody.)

Axiome 2 Pour tout R, l'homomorphisme $\eta(R) : \mathcal{T}(R) \to F(R)$ est injectif.

Axiome 3 Pour $i \in I$ et $r \in R$, on a $\varphi_i \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} = \eta(r^{\check{\alpha}_i})$, où $r^{\check{\alpha}_i}$ désigne l'élément $\lambda \mapsto r^{\check{\alpha}_i(\lambda)}$ de $\mathcal{T}(R)$.

Axiome 4 Si ι est une injection d'un anneau R dans un corps K , alors $F(\iota) : F(R) \to F(K)$ est injective.

Axiome 5 Soit B une matrice de Cartan généralisée, indexée par un ensemble I. On définit une algèbre de Lie $L(B)$ qui est l'algèbre de Lie complexe de générateurs e_i, f_i, h_i, pour $i \in I$, avec les relations

$$\begin{aligned} [h_i, h_j] &= 0 \\ [h_i, e_j] &= A_{ij} e_j \\ [h_i, f_j] &= -A_{ij} f_j \\ [e_i, f_j] &= -h_i \\ [e_i, f_j] &= (\text{ad } e_i)^{-A_{ij}+1} e_j = (\text{ad} f_i)^{-A_{ij}+1} f_j = 0, \text{si } i \neq j. \end{aligned}$$

Le cinquième axiome demande qu'il existe un homomorphisme $\text{Ad} : F(\mathbf{C}) \to \text{Aut} L(A)$, dont le noyau est contenu dans $\eta(\mathcal{T}(\mathbf{C}))$, tel que, pour tout $c \in \mathbf{C}$ et tout $y \in \mathcal{T}(\mathbf{C})$,

$$\text{Ad}\left(\varphi_i \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \exp \text{ad } c e_i \tag{1}$$

$$\text{Ad}\left(\varphi_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}\right) = \exp \text{ad } (-c f_i) \tag{2}$$

$$\text{Ad}(\eta(y))(e_i) = y(\alpha_i).e_i \tag{3}$$

$$\text{Ad}(\eta(y))(f_i) = y(-\alpha_i).f_i. \tag{4}$$

Remarque Si B est une matrice de Cartan l'algèbre obtenue est de dimension finie et semi-simple. Dans tous les cas, on dit que $L(B)$ est une algèbre de Kac-Moody, dont les e_i, f_i, h_i sont les générateurs de Chevalley.

3 L'axiome 5'

Nous donnons ici une autre version de l'axiome 5, qui s'applique dans le cas de la matrice complétée d'une matrice de Cartan et qui est plus simple à vérifier.

Tout d'abord, donnons une série de définitions nécessaires pour établir le lien entre les algèbres de Kac-Moody affines et les algèbres de Lie semi-simples complexes. Soit B une matrice de Cartan. On définit $L'(B) = \mathbf{C}[t, t^{-1}] \times_{\mathbf{C}} L(B)$ et l'on note $[,]_o$ le crochet de cette algèbre. Soit Φ le système de racines associé à B. Soit $(e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ une base de Chevalley de l'algèbre $L(B)$. Dans $L'(B)$, on pose

$$\begin{aligned} e_i &= e_{\alpha_i} \otimes 1, f_i = f_{\alpha_i} \otimes 1, i = 1, \ldots, l, \\ e_0 &= e_{\alpha_0} \otimes t, f_0 = f_{\alpha_0} \otimes t^{-1}. \end{aligned}$$

On définit l'algèbre de Lie $\hat{L}(B) = L'(B) + \mathbf{C}K$, avec le crochet $[x + aK, y + bK] = [x, y]_o + \psi(x, y)K$, où ψ est le 2-cocycle donné dans [Kac] 7. On pose $c = \mathbf{C}K$. On note ι l'injection de $L'(B)$ dans $\hat{L}(B)$ et Π la projection de $\hat{L}(B)$ sur $L'(B)$ qui envoie $\iota(x)+d$ sur x, pour tout $x \in L'(B), d \in c$. On pose $\tilde{e}_i = \iota(e_i), \tilde{f}_i = \iota(f_i), \tilde{h}_i = -[\tilde{e}_i, \tilde{f}_i]$, pour $i = 0, \ldots, l$.

Proposition 1 *Soient B une matrice de Cartan, et $\tilde{B}$ sa matrice complétée. L'algèbre de Lie $\hat{L}(B)$ est l'algèbre de Kac-Moody affine associée à la matrice $\tilde{B}$, c'est-à-dire $L(\tilde{B})$, et elle admet les éléments $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i, \tilde{h}_i$ comme générateurs de Chevalley. De plus,*

$$0 \to c \to \hat{L}(B) \xrightarrow{\Pi} L'(B) \to 0$$

est l'extension centrale universelle de $L'(B)$.

Démonstration: voir [Ti2] 1.4., ou [Kac] 7.4.□

Comme $L(\tilde{B})$ est l'extension centrale universelle de $L'(B)$, tout automorphisme β de $L'(B)$ induit un automorphisme de $L(\tilde{B})$, noté $\overline{\beta}$, univoquement déterminé par la condition $\Pi \circ \overline{\beta} = \beta \circ \Pi$.

Proposition 2 *Soit ρ un automorphisme de $L(\tilde{B})$ tel que $\rho(c) \subset c$ et tel que $\Pi \circ \rho \circ \iota$ soit un automorphisme de $L'(B)$. Alors, $\rho = \overline{\Pi \circ \rho \circ \iota}$.*

Démonstration: Par hypothèse, $\Pi \circ \rho \circ \iota$ est un automorphisme de $L'(B)$. Il suffit de montrer $\Pi \circ \rho = \Pi \circ \rho \circ \iota \circ \Pi$. Prenons $a \in L'(B)$, et $d \in c$. On a $\iota(a) + d \in L(\tilde{B})$ et $\Pi \circ \rho(\iota(a) + d) = \Pi(\rho(\iota(a)))$, car ρ fixe c. D'autre part, $\Pi(\rho(\iota(\Pi(\iota(a) + d))) = \Pi(\rho(\iota(a)))$, d'où l'égalité recherchée. □

Proposition 3 *Dans $L(\tilde{B})$, on a $\overline{\exp \operatorname{ad} de_i} = \exp \operatorname{ad} d\tilde{e}_i$, pour $i = 0, \ldots, l$ et $d \in \mathbf{C}$, et, il en va de même si on remplace e_i par f_i.*

Démonstration: On pose $\rho = \exp \operatorname{ad} d\tilde{e}_i$. Il est clair que ρ est un automorphisme de l'algèbre de Lie $L(\tilde{B})$, qui fixe c, puisque c est le centre de $L(\tilde{B})$. Pour pouvoir utiliser la proposition 2, nous allons montrer que $\Pi \circ \rho \circ \iota = \exp \operatorname{ad} e_i$.

Soit x un élément de $L'(B)$. Nous avons alors,

$$\begin{aligned}
\Pi \circ \rho \circ \iota(x) &= \Pi(\iota(x) + d[\tilde{e}_i, \iota(x)] + \frac{d^2}{2}[\tilde{e}_i, [\tilde{e}_i, \iota(x)]] + \ldots) \\
&= x + d[e_i, x]_o + \frac{d^2}{2}[e_i, [e_i, x]]_o + \ldots \\
&= \exp \operatorname{ad} e_i(x).
\end{aligned}$$

De plus, nous savons que $\exp \operatorname{ad} e_i$ est un automorphisme de $L'(B)$. Les hypothèses de la proposition 2 sont donc remplies, ce qui nous permet de déduire que $\exp \operatorname{ad} d\tilde{e}_i = \overline{\Pi \circ \rho \circ \iota} = \overline{\exp \operatorname{ad} e_i}$. $\square$

Axiome 5' Si A est la matrice complétée d'une matrice de Cartan B, il existe un homomorphisme $\mathrm{Ad}' : F(\mathbf{C}) \to \mathrm{Aut} L'(B)$ tel que $\ker \mathrm{Ad}' \subset \eta(\mathcal{T}(\mathbf{C}))$ et tel que, pour $i \in I, d \in \mathbf{C}$ et $y \in \mathcal{T}(\mathbf{C})$, on ait

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}'\left(\varphi_i\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \exp \operatorname{ad} de_i \\
\mathrm{Ad}'\left(\varphi_i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}\right) &= \exp \operatorname{ad} (-df_i) \\
\mathrm{Ad}'(\eta(y))(e_i) &= y(\alpha_i).e_i \\
\mathrm{Ad}'(\eta(y))(f_i) &= y(-\alpha_i).f_i.
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition qui motive tout ce qui précède.

Proposition 4 *Si A est une matrice de Cartan complétée, alors l'axiome 5' implique l'axiome 5.*

Démonstration: Supposons que nous ayons un homomorphisme Ad' qui vérifie les conditions de l'axiome 5'. Nous allons construire un homomorphisme Ad qui vérifie les conditions de l'axiome 5. Soit $g \in F(\mathbf{C})$. On pose $\mathrm{Ad}\ g = \overline{\mathrm{Ad'}\ g}$. Puisque $\overline{\beta \circ \gamma} = \overline{\beta} \circ \overline{\gamma}$, l'application Ad est bien un homomorphisme. Supposons que $\mathrm{Ad} g$ soit l'identité sur $L(A)$, c'est-à-dire $\overline{\mathrm{Ad}' g} = \overline{1_{L'(B)}}$. Puisque l'extension est universelle, nous avons alors $\mathrm{Ad}' g = 1$. Ainsi, par hypothèse, g appartient $\eta(\mathcal{T}(\mathbf{C}))$.

Soit $d \in \mathbf{C}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}\left(\varphi_i\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \overline{\mathrm{Ad}'\left(\varphi_i\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)} \\
&= \overline{\exp \operatorname{ad} de_i} \\
&= \exp \operatorname{ad} d\tilde{e}_i, \qquad \text{par la proposition 3.}
\end{aligned}$$

Il en va de même pour f_i.

Soit $y \in \mathcal{T}(\mathbf{C})$. Soit ρ l'automorphisme de $L(A)$ défini par $\rho(e_i) = y(\alpha_i)e_i, \rho(f_i) = y(-\alpha_i)f_i, \rho(h_i) = h_i$, pour tout $i \in I$. Nous avons alors $\Pi \circ \rho = \mathrm{Ad}(\eta(y)) \circ \Pi$, et, ainsi, $\rho = \overline{\mathrm{Ad}(\eta(y))}$. Nous avons donc les égalités 3 et 4 requises par l'axiome 5. $\square$

4 Les groupes de Chevalley

Soit G un groupe algébrique réductif défini et déployé sur $\mathbf{Q}$. Soit S un tore défini sur $\mathbf{Q}$ et déployé maximal de G. Soit Φ le système de racines de G par rapport à ce tore. Pour tout $\alpha \in \Phi$, on note U_α le sous-groupe radiciel correspondant. Soit $\mathcal{D}$ le schéma en modules, qui est la droite sur $\mathbf{Q}$. On appelle épinglage de U_α un $\mathbf{Q}$-isomorphisme $\mathcal{D} \to \mathcal{U}_\alpha$. Pour tout épinglage x_α de U_α, il existe un épinglage et un seul de $U_{-\alpha}$, dit associé à x_α, tel qu'il existe un $\mathbf{Q}$-homomorphisme ζ_α de SL_2 dans G pour lequel $x_\alpha(u) = \zeta_\alpha \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $x_{-\alpha}(u) = \zeta_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix}$. On pose $m_\alpha = \zeta_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Un système de Chevalley dans G (relativement à S) est une famille $(x_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ d'épinglages des U_α possédant les deux propriétés suivantes:

- pour tout $\alpha \in \Phi$, les épinglages x_α et $x_{-\alpha}$ sont associés;
- pour $a, b \in \Phi$, de sorte que $r_a(b) \in \Phi$, il existe $\epsilon = \pm 1$ tel que $x_{r_a b}(u) = m_a x_b(\epsilon u) m_a^{-1}$, pour tout $u \in \mathcal{D}$.

On sait qu'un tel système existe, voir [BrT] 3.2.

Dans la suite de [BrT] 3.2, est construit un $\mathbf{Z}$-schéma en groupes $\mathcal{G}$, dit de Chevalley, qui a G comme fibre générique. Notons $\mathcal{S}$ et $\mathcal{U}_\alpha$ les sous-schémas fermés de $\mathcal{G}$ qui prolongent S et U_α, au sens de [BrT] 1.2.

5 Construction des groupes de Kac-Moody affines

Dans cette section, nous construisons un groupe de Kac-Moody pour une famille de données affines standard que nous définissons ci-dessous.

Soit B une matrice de Cartan. Dans le système de racines associé à B, on choisit des racines simples $\beta_1, \ldots, \beta_l$ et l'on note β_0 l'opposée de la plus longue racine et $\check{\beta}_i$ la coracine associée à β_i, pour $i = 0, \ldots, l$. Pour certains nombres entiers négatifs $c_1, \ldots, c_l$, on a donc la relation

$$\check{\beta}_0 = \sum_{i=1}^{l} c_i \check{\beta}_i. \tag{5}$$

Soient A la matrice de Cartan complétée de B, I l'ensemble $\{0, \ldots, l\}$, Λ un réseau, $\check{\Lambda}$ son dual, $(\alpha_i)_{i\in I}$ et $(\check{\alpha}_i)_{i\in I}$ des éléments respectivement de Λ et de $\check{\Lambda}$ tels que

$$\begin{aligned} A &= (\check{\alpha}_i(\alpha_j)), \\ \check{\alpha}_0 &= \sum_{i=1}^{l} c_i \check{\alpha}_i, \\ \Lambda &= \Lambda_r \oplus \Lambda_c, \end{aligned}$$

où les nombres c_i sont ceux de la relation 5, $\Lambda_r = \Lambda \cap \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbf{Q}\alpha_i$ et $\Lambda_c = \bigcap_{i\in I} \ker \alpha_i$. On note D la donnée $(I, \Lambda, \check{\Lambda}, (\alpha)_{i\in I}, (\check{\alpha})_{i\in I})$ et α'_0 (resp.α''_0) la projection de α_0 sur Λ_c (resp. Λ_r) parallèlement à Λ_r (resp. Λ_c).

Soit $\mathcal{G}$ le schéma de Chevalley semi-simple dont Λ_r est le réseau des caractères rationnels d'un tore maximal déployé et les $(\alpha_i)_{i=1,\ldots,l}$ sont les racines simples. Soit $\mathcal{G}'$ le sous-foncteur en groupes image canonique dans $\mathcal{G}$ du schéma de Chevalley semi-simple simplement connexe associé à Φ, voir [Dem] 3.6.

Soient $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{T}_c$) le foncteur tore qui envoie un anneau X sur le groupe $\mathrm{Hom}(\Lambda, X^\times)$ (resp. $\mathrm{Hom}(\Lambda_c, X^\times)$). Le groupe de Kac-Moody que nous allons construire sera un produit semi-direct de $\mathcal{G}'(R[t,t^{-1}])$ par $\mathcal{T}_c(R)$. Nous déterminons ci-dessous l'action de $\mathcal{T}_c(R)$. Soient R un anneau et $r \in R^\times$. On définit

$$\begin{aligned} \delta_r : R[t,t^{-1}] &\to R[t,t^{-1}] \\ \sum_{i=m}^{n} a_i t^i &\mapsto \sum_{i=m}^{n} a_i r^i t^i. \end{aligned}$$

Pour tous $r, r' \in R^\times$, on a $\delta_{rr'} = \delta_r \circ \delta_{r'}$. On définit une action de $\mathcal{T}_c(R)$ sur $\mathcal{G}'(R)$ par

$$\rho(y) = \mathcal{G}'(\delta_{y(\alpha'_0)}), \quad \text{pour tout } y \in \mathcal{T}_c(R).$$

On définit alors $F(R)$ comme le produit semi-direct $\mathcal{G}'(R[t,t^{-1}]) \rtimes \mathcal{T}_c(R)$, où $\mathcal{T}_c$ agit sur $\mathcal{G}'(R)$ par ρ.

Théorème 1 *Le foncteur F défini ci-dessus est un groupe de Kac-Moody minimal associé à la donnée D.*

Exemples Soient B une matrice de Cartan, A sa matrice complétée.

- Soit $\mathcal{H}_{sc}$ le schéma de Chevalley quasi-simple, *simplement connexe*, associé à B. Soient Λ le groupe des caractères d'un tore déployé maximal, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ une base du système de racines relatif à ce tore, α_0 l'opposé de la plus grande racine, I l'ensemble $\{0, \ldots, l\}$, $\check{\alpha}_i \in \check{\Lambda}$ la coracine de $\mathcal{H}_{sc}$ correspondant à α_i, pour $i \in I$, et $D = (I, \Lambda, (\alpha_i)_{i\in I}, (\check{\alpha}_i)_{i\in I})$. Pour la donnée D et pour tout anneau R, le groupe $F(R)$ construit ci-dessus n'est autre que $\mathcal{H}_{sc}(R[t,t^{-1}])$.

- Soit $\mathcal{H}_{ad}$ le schéma de Chevalley quasi-simple,*adjoint*, associé à B. En reprenant les définitions de l'exemple précédent, on obtient une donnée D'. Pour la donnée D' et pour tout anneau R, le groupe construit est l'image de $\mathcal{H}_{sc}(R[t,t^{-1}])$ dans $\mathcal{H}_{ad}(R[t,t^{-1}])$ par l'homomorphisme canonique.

6 Démonstration du théorème

Afin de vérifier les axiomes 1 à 5' des sections 2 et 3, nous commençons par définir les homomorphismes η et φ_i. Dans la démonstration, nous identifions $\mathcal{G}'(R[t,t^{-1}])$ et $\mathcal{T}_c(R)$ avec leurs images canoniques dans $F(R)$.

Définition de η Soit $\mathcal{T}_r$ le foncteur qui envoie un anneau X sur le groupe $\mathrm{Hom}(\Lambda_r, X^\times)$. Soit $\nu(X)$ l'isomorphisme de $\mathcal{T}_r(X)$ sur $\mathcal{S}(X) \subset \mathcal{G}'(X)$. Soit R un anneau. On peut voir les homomorphismes de Λ_r dans $R^\times$ comme des homomorphismes de Λ_r dans $R[t,t^{-1}]^\times$, ce qui nous permet de considérer $\mathcal{T}_r(R)$ comme sous-groupe de $\mathcal{T}_r(R[t,t^{-1}])$. Nous pouvons donc définir

$$\begin{array}{rcl}\eta(R) : \mathcal{T}(R) & \rightarrow & F(R) \\ y & \mapsto & \nu(y_r) \rtimes y_c,\end{array}$$

où y_r (resp. y_c) est la restriction de y à Λ_r (resp. Λ_c).

Définition des φ_i On sait que, pour tout $\alpha \in \Phi$ et pour tout anneau X, il existe un morphisme $\zeta_\alpha(X) : SL_2(X) \to \mathcal{G}'(X)$ tel que $\zeta_\alpha \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_\alpha(u)$, pour tout $u \in X$, et $\zeta_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix} = x_{-\alpha}(u)$, pour tout $u \in X$.

Soit R un anneau. On définit

$$\varphi_i(R) \ : \ SL_2(R) \to F(R) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \zeta_{\alpha_i} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rtimes 1, \quad \text{pour } i = 1, \dots, l$$

$$\varphi_0(R) \ : \ SL_2(R) \to F(R) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \zeta_{\alpha_0} \begin{pmatrix} a & bt \\ ct^{-1} & d \end{pmatrix} \rtimes 1.$$

Axiome 1 Soit R un corps. Nous savons, par le corollaire 3 du lemme 49 de [St], que $\mathcal{G}'(E)$ est engendré par les $(\mathcal{U}_\alpha(E))_{\alpha\in\Phi}$, pour tout anneau euclidien E et donc, en particulier, pour $R[t,t^{-1}]$. Soit Y le sous-groupe de $F(R)$ engendré par les images des $\varphi_i(R)$,$i \in I$. Pour montrer que $\mathcal{G}'(R[t,t^{-1}]) \subset Y$, il suffit donc de montrer pour tout $\alpha \in \Phi$, que $\mathcal{U}_\alpha(R[t,t^{-1}])$ est bien dans Y.

Le groupe de Weyl affine Supposons que le système de racines Φ soit vu comme un ensemble de fonctions linéaires sur un espace vectoriel réel V. Pour tout $\alpha \in \Phi$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, on définit une fonction affine linéaire sur V par $a_{\alpha,n} = \alpha - n$. Nous appelons ces fonctions des racines affines. Leur ensemble sera noté $\tilde{\Phi}$.

Pour toute racine affine a, nous appelons H_a l'hyperplan de V qui annule a. Nous notons ρ_a la réflexion fixant l'axe H_a. Le **groupe de Weyl** affine associé au système de racines Φ est, par définition, le groupe de transformations de V engendré par les $\rho_a, a \in \tilde{\Phi}$.

Pour toute racine affine a, nous définissons une permutation r_a de $\tilde{\Phi}$ qui envoie b sur l'unique élément c de $\tilde{\Phi}$ tel que $H_c = \rho_a(H_b)$.

En partant de la base $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ de Φ, nous allons construire une base affine de $\tilde{\Phi}$. Pour $i = 1, \dots, l$, on pose $\tilde{\alpha}_i = a_{\alpha_i,0}$. Pour compléter la base, on pose aussi $\tilde{\alpha}_0 = a_{\alpha_0,1}$.

Donnons deux propriétés de ce groupe de Weyl affine, voir [Hum],

- Si r'_α désigne la réflexion associée à α dans le groupe de Weyl de Φ, alors

$$\begin{aligned} r_{\alpha,0}a_{\beta,n} &= a_{r'_\alpha\beta,n} \\ r_{\alpha,1}a_{\beta,n} &= a_{r'_\alpha\beta,n+\check{\alpha}(\beta)} \end{aligned}$$

- Toute racine affine est l'image d'un élément de la base affine par un élément du groupe affine, pour l'action définie plus haut.

Les sous-groupes $U_{\alpha,n}$ Soit $a_{\alpha,n}$ une racine affine. Nous lui associons le sous-groupe additif de $\mathcal{G}'(R[t,t^{-1}])$ défini comme suit:

$$U_{a_{\alpha,n}} = U_{\alpha,n} = \{x_\alpha(ut^n) \mid u \in R\}.$$

Pour tout $a \in \Phi$, on définit une permutation des $U_{\alpha,n}$, que nous appelons aussi r_a, par $r_a(U_b) = U_{r_a b}$.

Proposition 5 *L'élément* $\varphi_i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *agit sur* $\{U_{\alpha,n}\}$*, par conjugaison, de la même manière que* $r_{\tilde{\alpha}_i}$*.*

Démonstration: Soit $i \in \{0,\ldots,l\}$. Posons $x = \varphi_i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Il suffit de montrer que xU_ax^{-1} est contenu dans $r_{\tilde{\alpha}_i}U_a$, pour tout racine affine a. En effet, comme x^4 est l'élément neutre, on a $r_{\tilde{\alpha}_i}U_a = x^4 r_{\tilde{\alpha}_i}U_a x^{-4} \subset x(r_{\tilde{\alpha}_i})^4 U_a x^{-1} = xU_ax^{-1}$. Soit a une racine affine et $y \in xU_ax^{-1}$.

Supposons, pour commencer, $i \neq 0$.

Alors, on sait que $x = \varphi_i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \zeta_{\alpha_i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = m_{\alpha_i}$. D'autre part, par définition des $U_{\alpha,n}$, tout élément de $U_{\alpha,n}$ peut s'écrire sous la forme $x_\alpha(ut^n)$, pour un certain $u \in R$. Or, les x_α forment un système de Chevalley et, donc, il existe $\epsilon = \pm 1$ tel que l'on ait $m_{\alpha_i}x_\alpha(ut^n)m_{\alpha_i}^{-1} = x_{r'_{\alpha_i}\alpha}(\epsilon ut^n)$. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} y &= \zeta_{\alpha_i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x_\alpha(ut^n)\zeta_{\alpha_i}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= m_{\alpha_i}x_\alpha(ut^n)m_{\alpha_i}^{-1} \\ &= x_{r'_{\alpha_i}\alpha}(\epsilon ut^n) \end{aligned}$$

Donc, l'élément y appartient à $U_{r'_{\alpha_i}\alpha,n}$ qui est égal à $r_{\tilde{\alpha}_i}U_{\alpha,n}$, par une propriété de la section précédente.

Supposons $i = 0$. Par définition, $x = \varphi_0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \zeta_{\alpha_0}\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, qui vaut $\zeta_{\alpha_0}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\zeta_{\alpha_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, car ζ_{α_0} est un morphisme. Soit y un élément du conjugué $U_{\alpha,n}$ par x. Pour un certain $u \in R$, on a donc

$$y = \varphi_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x_\alpha(ut^n)\varphi_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} y &= \zeta_{\alpha_0}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \zeta_{\alpha_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x_\alpha(ut^n)\zeta_{\alpha_0}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\zeta_{\alpha_0}\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \\ &= \zeta_{\alpha_0}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} x_{r_{\alpha_0}\alpha}(\epsilon u t^n)\zeta_{\alpha_0}\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Or, $\zeta_{\alpha_0}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} = \eta(t^{\check{\alpha}_0})$. Et, donc, par définition des U_α, $y = x_{r_{\alpha_0}\alpha}(\epsilon u t^{n+\check{\alpha}_0(\alpha)})$. Donc, $y \in U_{r_{\alpha_0}\alpha, n+\check{\alpha}_0(\alpha)}$, par définition des $U_{\alpha,n}$. Or, par une propriété de la section précédente, $r_{\tilde{\alpha}_0} a_{\alpha,n} = a_{r_{\alpha_0}\alpha, n+\check{\alpha}_0(\alpha)}$. Nous avons donc $y \in U_{r_{\tilde{\alpha}_0} a_{\alpha,n}} = r_{\tilde{\alpha}_0} U_{\alpha,n}$, ce qui termine la démonstration de la proposition. □

Le sous-groupe $\mathcal{G}'(R[t,t^{-1}])$ est contenu dans Y Nous savons que, pour tout $i = 0,\ldots,l$, $U_{\tilde{\alpha}_i} \subset Y$. De plus, on a, aussi pour tout $i = 0,\ldots,l$, que $\varphi_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in Y$. Dès lors, puisque toute racine est l'image d'un élément de la base par un élément du groupe de Weyl affine, nous avons que $U_{\alpha,n} \subset Y$, pour tout $\alpha \in \Phi, n \in \mathbf{Z}$.

Or, $\mathcal{U}_\alpha(R[t,t^{-1}]) = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} U_{\alpha,n}$. Et, par suite, $\mathcal{U}_\alpha(R[t,t^{-1}]) \subset Y$, pour tout $\alpha \in \Phi$, ce qui achève de montrer l'inclusion $\mathcal{G}'(R[t,t^{-1}]) \subset Y$, grâce à ce qui a été dit tout au début de la démonstration de l'axiome 1. D'autre part, $\mathcal{T}_c(R)$ est inclus dans $\eta(\mathcal{T}(R))$. Comme, par définition, $F(R)$ est le produit semi-direct de $\mathcal{G}'(R[t,t^{-1}])$ par $\mathcal{T}_c$, l'axiome 1 est vérifié.

Axiome 2 Soit R un anneau. Soient $y, z \in \mathcal{T}(R)$ tels que l'on ait $\eta(y) = \eta(z)$. Alors $\nu(y_r) = \nu(z_r)$, et donc $y_r = z_r$ car $\nu(R[t,t^{-1}])$ est injective. D'autre part, $y_c = z_c$. Comme $\Lambda = \Lambda_r \bigoplus \Lambda_c$, on a $y = z$, et donc $\eta(R)$ est injectif.

Axiome 3 Il faut montrer que, pour tout $i = 0,\ldots,l$, et, pour tout $r \in R$, on a $\eta(r^{\check{\alpha}_i}) = \varphi_i \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}$. Or, par définition de η et de φ_i, ceci revient à vérifier que $\nu(r^{\check{\alpha}_i}) = \zeta_{\alpha_i}\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}$. Mais cette dernière égalité est vraie, par [BrT] 3.2.1. L'axiome 3 est donc bien vérifié.

Axiome 4 Soient $\iota : R \to S$ un morphisme injectif d'un anneau dans un corps et $\iota[t,t^{-1}] : R[t,t^{-1}] \to S[t,t^{-1}]$ la prolongation canonique de ι, qui est aussi injective. L'homomorphisme $F(\iota)$ est le produit d'une restriction de $\mathcal{G}'(\iota[t,t^{-1}])$ et de $\mathcal{T}_c(\iota)$, toutes deux injectives, et, ainsi, $F(\iota)$ est bien injectif.

Axiome 5' Afin de vérifier l'axiome 5', nous construisons une action Ad de $F(\mathbf{C})$ sur $L'(B)$. Soient E l'algèbre de Lie $Lie\,\mathcal{G}$ de $\mathbf{C}[t,t^{-1}]$ et $\mathcal{D}E$ son algèbre dérivée. On a alors $\mathcal{D}E = \mathbf{C}[t,t^{-1}]\otimes L(B) = L'(B)$. Pour tout $g \in \mathcal{G}(\mathbf{C}[t,t^{-1}])$, l'automorphisme adjoint Adg stabilise $\mathcal{D}E$. Pour tout $r \in \mathbf{C}^{\times}$, on définit σ_r comme l'automorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres induit par δ_r sur $L'(A)$. Pour tout $g \rtimes y \in F(\mathbf{C})$, on définit

$$\text{Ad'}(g \rtimes y) = \text{Ad'}\ g \circ \sigma_{y(\alpha_0')}.$$

Ad' est un homomorphisme Soient $a = g \rtimes y, b = g' \rtimes y'$ deux éléments de $F(\mathbf{C})$. On veut vérifier que $\mathrm{Ad}'(ab) = \mathrm{Ad}'a \circ \mathrm{Ad}'b$. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}'(ab) &= \mathrm{Ad}'(g\delta_{y(\alpha_0')}g' \rtimes yy')\\ &= \mathrm{Ad}(g\delta_{y(\alpha_0')}g') \circ \sigma_{y(\alpha_0')y'(\alpha_0')}\\ &= \mathrm{Ad}g \circ \mathrm{Ad}(\delta_{y(\alpha_0')}g') \circ \sigma_{y(\alpha_0')} \circ \sigma_{y'(\alpha_0')}.\end{aligned}$$

Or, nous savons que $\sigma_{y(\alpha_0')} \circ \mathrm{Ad}g' \circ \sigma^{-1}_{y(\alpha_0')} = \mathrm{Ad}(\delta_{y(\alpha_0')}g')$. Dès lors, nous pouvons écrire $\mathrm{Ad}'(ab) = \mathrm{Ad}g \circ \sigma_{y(\alpha_0')} \circ \mathrm{Ad}g' \circ \sigma_{y'(\alpha_0')} = \mathrm{Ad}'a \circ \mathrm{Ad}'(b)$. L'application Ad' est donc bien un homomorphisme.

Les deux premières égalités de l'axiome 5' Par définition, pour $i = 1, \ldots, l$, nous avons $\mathrm{Ad}'\left(\varphi_i\begin{pmatrix}1 & c\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Ad}'\left(\zeta_{\alpha_i}\begin{pmatrix}1 & c\\ 0 & 1\end{pmatrix} \rtimes 1\right) = \exp \mathrm{ad}ce_i$, par [BrT] 3.2.4. Si $i = 0$, on a $\mathrm{Ad}'\left(\varphi_0\begin{pmatrix}1 & c\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Ad}'\left(\zeta_{\alpha_0}\begin{pmatrix}1 & ct\\ 0 & 1\end{pmatrix} \rtimes 1\right) = \exp \mathrm{ad}cte_{\alpha_0} = \exp \mathrm{ad}ce_0$, par construction de e_0.

Les deux dernières égalités de l'axiome 5' Soit $y \in \mathcal{T}(\mathbf{C})$. Supposons $i \neq 0$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}'(\eta(y))e_i &= ((\mathrm{Ad}y_r) \circ \sigma_{y(\alpha_0')})e_i, && \text{par définition de } \eta \text{ et de Ad'}\\ &= (\mathrm{Ad}y_r)e_i,\\ &= (y_r(\alpha_i))e_i, && \text{par [BrT] 3.2.4.}\end{aligned}$$

Supposons, maintenant, $i = 0$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}'(\eta(y))e_0 &= ((\mathrm{Ad}y_r) \circ \sigma_{y(\alpha_0')})e_0, \text{par définition de } \eta \text{ et de Ad'}\\ &= (\mathrm{Ad}y_r)y(\alpha_0')e_0,\\ &= y_r(\alpha_0'')y(\alpha_0')e_0, \quad \text{par [BrT] 3.2.4}\\ &= y(\alpha_0)e_0.\end{aligned}$$

Le noyau de Ad' est contenu dans $\eta(\mathcal{T}(\mathbf{C}))$ Soit $x = g \rtimes y^{-1}$ un élément tel que Ad'x soit l'identité sur $L'(B)$. Nous pouvons dès lors écrire $\mathrm{Ad}g = \sigma_{y(\alpha_0')}$. Nous appliquons les deux membres de cette égalité à l'élément te de $L'(B)$, où e, élément de B, n'est pas nul. Nous avons donc

$$\begin{aligned} (\mathrm{Ad}g)(te) &= \sigma_{y(\alpha_0')}(te), \quad \text{ce qui implique} \\ t\mathrm{Ad}g(e) &= y(\alpha_0')t\sigma_r e. \end{aligned}$$

Donc, $y(\alpha_0') = 1$ et, par suite, $\mathrm{Ad}g = 1$.

Il reste à montrer que $\ker \mathrm{Ad} \subset \eta(\mathcal{T}_r(\mathbf{C}))$. Soit $g \in \ker \mathrm{Ad}$. Nous savons alors, par [St] (corollaire 1 b, page 39), que $g \in \mathcal{S}(\mathbf{C}[t, t^{-1}])$, qui est isomorphe à $\mathcal{T}_r(\mathbf{C}[t, t^{-1}])$. Soit b un élément de Λ_r. Par définition de Λ_r, nous pouvons trouver des nombres entiers $n, d_1, \ldots, d_l$, tels que $n \neq 0$ et $nb = \sum_{j=1}^{l} d_j\alpha_j$. Or, par les égalité 3 et 4 de l'axiome 5', nous avons $g(\alpha_i) = 1$. Dès lors, $g(nb) = 1$. Or, $g(b) = rt^m$, pour certains $r \in \mathbf{C}$ et $m \in \mathbf{Z}$, car $g(b)$ est inversible. Ainsi, $r^n t^{nm} = g(nb) = 1$, ce qui force $m = 0$. On a donc, $g(b) \in \mathbf{C}^\times$, c'est-à-dire $g \in \mathcal{T}_r(\mathbf{C})$, et, ainsi, g appartient à $\eta(\mathcal{T}(\mathbf{C}))$. Ceci achève la démonstration du dernier axiome, et, par là-même, celle du théorème.$\square$

References

[BrT] F.Bruhat et J.Tits, Groupes réductifs sur un corps local, II, Publ. Math. I.H.E.S. 60 (1984), 5-184.

[Dem] M.Demazure, Schémas en groupes réductifs, Bull. Soc. Math. Fr., Nr 93 (1965), 369-413.

[Hum] J.Humphreys, Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge studies in advanced mathematics Nr 29, Cambridge University Press, 1990.

[Kac] V.Kac, Infinite dimensional Lie algebra, Cambridge University Press, 1990.

[PhM] Ph.Masson, Introduction aux groupes de Kac-Moody, mémoire de fin d'études, Université Libre de Bruxelles, 1993.

[St] R.Steinberg, Lectures on Chevalley groups, Yale University lecture notes, 1967.

[Ti1] J.Tits, Résumé de cours, Annuaire du Collège de France, 81e année (1980-1981), 75-86.

[Ti2] J.Tits, Résumé de cours, Annuaire du Collège de France, 82e année (1981-1982), 91-105.

[Ti3] J.Tits,Groups and group functors attached to Kac-Moody data, in Arbeitsagung, Bonn 1984, Springer Lecture Notes Nr. 1111, 1985, 193-223.

[Ti4] J.Tits, Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields, Journal of algebra, 105 (1987), 542-573.

[Ti5] J.Tits, Groupes associés aux algèbres de Kac-Moody, Séminaire Bourbaki, 41e année (1988-1989), No 700, 7-31.

Philippe Masson
Université Libre de Bruxelles
Département de Mathématiques
C.P. 216, Boulevard du Triomphe
1050 Bruxelles
Belgique
e-mail : phmasson@ulb.ac.be