
Zbl 439.10037

Elliott, P.D.T.A.; Erdős, Paul

Additive arithmetic functions bounded by monotone functions on thin sets. (In English)

Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eötvös, Sect. Math. 22-23, 97-111 (1980). [0524-9007]

Die Verff. befassen sich mit folgender Problemstellung: Aus der Beschränktheit einer additiven Funktion f sollen Ergebnisse über die Werte $f(p)$ der additiven Funktion im Mittel hergeleitet werden. Man setze

$$|y| = \begin{cases} 1 \text{ für} |y| > 1, \\ y \text{für} |y| \leq 1. \end{cases}$$

Ist eine positive, monoton nicht-abnehmbare Funktion g gegeben, so zeigen die Verff.: Gilt

$$(*) \qquad 0 < C_1 \leq \frac{|f(a_j)|}{g(a_j)} \leq C_2$$

auf einer Folge $a_1 < a_2 < \dots$ natürlicher Zahlen mit natürlicher unterer Dichte $\alpha > 1/2$, so gilt (mit geeigneten Konstanten B und C)

$$(1) \qquad g(x^2) \leq B \cdot g(x),$$

$$(2) \qquad \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \cdot \left| \frac{f(p)}{g(x)} \right|^2 \leq C \text{ für alle } x \geq 2.$$

Wird an Stelle von (*) nur $|f(a_j)| \leq g(a_j)$ vorausgesetzt, so gilt statt (1) und (2) nur

$$(2') \qquad \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \left| \frac{f(p)}{g(x^\beta)} \right|^2 \leq C \text{ für ein geeignetes } \beta > 1.$$

Als Folgerung ergibt sich folgendes schönes Ergebnis: Es gibt eine positive Konstante A, so daß für jede additive Funktion die Ungleichung

$$\sum_{p \leq x} \frac{|f(p)|^2}{p} \leq A \cdot \max_{n \leq x} |f(n)|^2$$

gilt. Wählt man g als konstante Funktion, so enthalten die Ergebnisse der Verff. bekannte Ergebnisse [man vgl. etwa *P.D.T.A.Elliott*'s Buch über Probabilistic number theory. I, II (1979 und 1980; Zbl 431.10029 und 431.10030)]. Ein Beispiel zeigt, daß das Ergebnis (1) falsch wird, wenn nicht mehr vorausgesetzt wird, daß die untere Dichte $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ist. Der Beweis der Ergebnisse verwendet Techniken aus der Theorie der zahlentheoretischen Funktionen und der Wahrscheinlichkeitstheorie.

W.Schwarz

Classification:
11K65 Arithmetic functions (probabilistic number theory)
11N99 Multiplicative number theory

Keywords:
additive functions; bounded additive functions; boundedness of arithmetic functions on thin sets