Zbl 158.05003
Erdős, Pál; Rogers, C.A.; Taylor, S.J.
Scales of functions (In English)
J. Aust. Math. Soc. 1, 396-418 (1960).

Sei $\mathcal{G}$ die Menge der positiven für $x \geq 0$ erklärten, reellwertigen, stetigen Funktionen f mit $f(0) = 1$. Zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{G}$ heißen vergleichbar, falls $f \prec g$ [d.h. $f(x) = o(g(x))$ für $x \to \infty$] oder $g \prec f$ oder $f \sim g$ [d. h. $f(x)/g(x)$ konvergiert für $x \to \infty$ gegen einen positiven Grenzwert] gilt. Eine Menge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}$ wird eine Funktionskala genannt, falls 1. je zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{S}$ vergleichbar sind, 2. die Funktionen $k(x) = 1$ und $i(x) = \sup(1, x)$ zu $\mathcal{S}$ gehören und 3. aus $f, g \in \mathcal{S}$ für reelles α, β stets $f^\alpha g^\beta \in \mathcal{S}$ folgt. Ein ähnlicher, aber speziellerer Begriff ist von *G.H.Hardy*, Orders of Infinity (Cambridge 1910) untersucht worden, der an Untersuchungen von du Bois- Reymond aus dem vorigen Jahrhundert anschloß.
Die Verff. beweisen eine Reihe von Existenzsätzen über Funktionenskalen mit einzelnen zusätzlichen Eigenschaften. Eine Hauptrolle spielt dabei die Maximalität solcher Funktionenskalen, d.h. die Eigenschaft, daß es zu jeder Funktion $f \in \mathcal{G}$, die mit allen $g \in S$ vergleichbar ist, wenigstens ein $g_0 \in \mathcal{S}$ mit $f \sim g_0$ gibt. So wird z. B. unter Annahme der Kontinuumhypothese bewiesen (Satz 5), daß es eine Funktionenskala gibt, die maximal irreduzibel [d.h. aus $f, g \in \mathcal{S}$, $f \sim g$, folgt $f = g$], dicht (d.h. a) zu jedem $g \in \mathcal{G}$ gibt es ein $f \in \mathcal{S}$ mit $g \prec f$ und b) zu jedem $g \in \mathcal{G}$ mit $k \prec g$ gibt es ein $f \in \mathcal{S}$ mit $k \prec f \prec g$) und monoton [d.h. jeder Quotient $f(x)/g(x)$ mit $f, g \in \mathcal{S}$ ist für hinreichend große x monoton] ist. Anderseits wird auch die Existenz einer maximalen, irreduziblen, monotonen Funktionenskala bewiesen, die weder a) noch b) erfüllt, also nicht dicht ist. Besonders eingehend werden Funktionenskalen $\mathcal{S}$ mit abzählbarer "Basis" (d. h. jede Funktion $f \in \mathcal{S}$ ist als endliches Produkt von reellen Potenzen von Basiselementen darstellbar) behandelt (Abschnitt 4).
B.Volkmann

Classification:
26A99 Functions of one real variable