Zbl 151.33702

Erdős, Pál; Hajnal, András; Milner, E.C.

On the complete subgraphs of graphs defined by systems of sets (In English)

Acta Math. Acad. Sci. Hung. 17, 159-229 (1966). [0001-5954]

Ein Mengensystem $\mathfrak{F} = (F, M, S)$ (F Abbildung von M in die Potenzmenge von S) heißt (m, α)-System, wenn $|M| = m$ und S wohlgeordnet vom Typ tp$S = \alpha$; $B \subseteq S$ heißt $(\mathfrak{F}, k)$-vollständig), wenn zu jedem $A \subseteq B$ mit $|A| = k$ (bzw. $|A| < k$) ein $\mu \in M$ mit $A \subseteq F_\mu$ existiert; $C \subseteq S$ heißt $(\mathfrak{F}, n)$-frei, wenn $|\{\mu \in M \mid \mathfrak{F}_\mu \cap C = \emptyset\}| \geq n$. Die Verff. untersuchen Relationen von folgender oder ähnlicher Art: (1) $\alpha \to [\beta, \gamma]^k_m$; (2) $\alpha \to [\beta, \gamma]_m$. (1), (2) besagen, daß zu jedem (m, α)-System $\mathfrak{F} = (F, M, S)$ ein $(\mathfrak{F}, m)$-freies $C \subseteq S$ mit tp$C = \gamma$ existiert oder im Fall (1) ein $(\mathfrak{F}, k)$- vollständiges $B \subseteq S$ mit tp$B = \beta$, im Fall (2) ein F_μ mit tp$\mathfrak{F}_\mu \geq \beta$. (1), (2) gehen in Relationen analogen Inhalts über, wenn α, β, γ durch Kardinalzahlen ersetzt werden. $\alpha \to [\beta, \gamma]^{<k}_m$ wird ähnlich wie (1) interpretiert (... oder ein $(\mathfrak{F}, < k)$-vollständiges $B \subseteq S$ mit tp$B = \beta$).
Ein Hauptergebnis [unter Benutzung der G. C. H. (generalized continuum hypothesis)]: $m \to [m, m]^{<\aleph_0}_n$ $(m, n > \aleph_0)$, schärfer $m \Rightarrow [m, m]_n$ falls $m, n > \aleph_0$ und $m' \neq n'$ ($m' = \aleph_{cf(\alpha)}$, wenn $m = \aleph_\alpha$). Weiter wird $\alpha \to [\beta, \gamma]^{<\aleph_0}_{\aleph_0}$ für $\alpha, \beta, \gamma < \omega_1$ vollständig diskutiert. In der Folge werden höhere Fälle von (1) bewiesen, z.B.: $\omega_1^\omega \to [\omega_1^\omega, \omega_1^n]^{<\aleph_0}_{\aleph_1}$ $(n < \omega)$ und $\omega_1^\lambda \to [\omega_1^\lambda, \omega_1^\omega]^2_{\aleph_0}$ $(\omega \leq \lambda < \omega_2)$.
Die Relation (3) von der Form $(a, m, n, c)^k \to s$ beinhaltet, daß zu jedem (m, a)-System $\mathfrak{F} = (F, M, S)$ ein $(\mathfrak{F}, n)$-freies $C \subseteq S$ mit $|C| = c$ oder eine Darstellung $S = A \cup \bigcup_{i \in I} B_i$ mit $|I| < s$, $|A| < a$ und $(\mathfrak{F}, k)$-vollständigen B_i $(i \in I)$ existiert. Für $k, m, n, s < \aleph_0$ wird die Äquivalenz von (3) mit einem endlichen Problem gezeigt und z. B. bewiesen: $(a, m, n, c)^k \to s$, falls $n \geq s$, $m \geq k(n - s + 1) + s - 1$, $a \geq \aleph_0$ und $a \geq c \geq 1$.
Weitere Ergebnisse zu (3): $(\aleph_0, \aleph_0, \aleph_0, \aleph_0)^k \to 3$ $(k < \aleph_0)$ und $(a, m, m, m)^2 \to m$ ($m \geq \aleph_0$, m Nachfolgerzahl oder $m' = \aleph_0$).
In der Arbeit werden außerdem viele negative Resultate, z.B. $m^+ \not\to [m^+, m]^m_{m^+}$ $(m \geq \aleph_0)$ bewiesen, einige Fragen auf den Partitionskalkül zurückgeführt und 15 Probleme explizite formuliert.

H.A.Jung

Classification: