Zbl 151.33701
Erdős, Pál; Hajnal, András
On chromatic number of graphs and setsystems (In English)
Acta Math. Acad. Sci. Hung. 17, 61-99 (1966). [0001-5954]

Für Mengensysteme $\mathcal{H} = (h, H)$ $(A \in H \Rightarrow A \subseteq h)$ bezeichnet $\mathrm{Col}(\mathcal{H})$ die kleinste Kardinalzahl α, zu der eine Wohlordnung $\prec$ von h mit $|\bigcup A \in H$, $x = \mathrm{Max}_{\prec} A$, $A - \{x\}| < \alpha$ für alle $x \in h$ existiert. Die chromatische Zahl $\mathrm{Chr}(\mathcal{H})$ ist die kleinste Kardinalzahl α, zu der eine Darstellung $h = \bigcup_{i \in I} h_i$ mit $|I| = \alpha$ und $A \not\subseteq h_i$, $(A \in H, i \in I)$ existiert. Für $\mathcal{H} = (h, H)$ mit $2 \leq |A| < \omega_0$ $(A \in H)$ wird zunächst $\mathrm{Chr}(\mathcal{H} \leq \mathrm{Col}(\mathcal{H})$ gezeigt. Die Autoren beweisen, daß Graphen $\mathcal{G}$ mit $\mathrm{Col}(\mathcal{G}) > \omega_0$ große vollständige paare Graphen enthalten. Hieraus folgt speziell, daß ein Graph $\mathcal{G}$ mit $\mathrm{Col}(\mathcal{G}) > \omega_0$ gerade Kreise jeder Länge enthält. Sie zeigen weiter, daß $\mathrm{Chr}(\mathcal{G}) \leq 2j < \omega_0$ gilt, falls $\mathcal{G}$ keine Kreise der Länge $2i + 1$ $(i \geq j)$ enthält; für $\beta \geq \omega_0$ und $j \geq 1$ konstruieren sie anderseits Graphen $\mathcal{G}_{\beta,j}$ mit $\mathrm{Chr}(\mathcal{G}_{\beta,j}) = \beta$, die keine Kreise der Länge $2i + 1$ $(1 \leq i \leq j)$ enthalten.
Ein Problem von *R. Rado*, ob das Analogon zum Satz von *N.G.de Bruijn* und dem ersten Verf. bzgl. $\mathrm{Col}(\mathcal{G})$ richtig ist (Zbl 044.38203), wird negativ beantwortet: Aus $\mathrm{Col}(\mathcal{G}') \leq \beta$ für jeden endlichen Teilgraph $\mathcal{G}'$ von $\mathcal{G}$ folgt $\mathrm{Col}(\mathcal{G}) \leq 2\beta - 2$ $(\leq 2\beta - 3$ ist im allgemeinen falsch). Ähnliche Fragestellungen werden teils beantwortet, teils als Probleme formuliert. Schließlich werden für $2 \leq k < \omega_0$ Mengensysteme $\mathcal{H} = (h, H)$ mit $|A| = k$ $(A \in H)$ behandelt; für diese wird der Begriff s- kreisfrei $(I \leq s < \omega_0)$ eingeführt. Das Hauptergebnis hierüber liefert als Korallar: Zu $k, r, s, < \omega_0$ existieren s-kreisfreie $\mathcal{H} = (h, H)$ mit $\mathrm{Chr}(\mathcal{H}) \geq r$ und $|A| = k$ $(A \in H)$. Dies verallgemeinert ein Ergebnis des ersten Verf. (Zbl 084.39602). In der Einleitung wird ein Abriß der Geschichte der behandelten Probleme gegeben.

H.A.Jung

Classification:
05C15 Chromatic theory of graphs and maps