Zbl 133.16701
Erdős, Pál; Pósa, L.
On the maximal number of disjoint circuits of a graph (In English)
Publ. Math. 9, 3-12 (1962). [0033-3883]

Les AA. notent par $G_k^{(n)}$ le graph avec n sommets et k arêtes dans lequel le circuit d'une seule arête n'est pas admis, et par $\bar{G}_k^{(n)}$ le graph qui l'admet. Un ensemble d'arêtes (resp. de circuits) est dit indépendant, s'il n'y en a pas deux d'entre elles (esp. deux d'entre eux) avec un sommet commun. Ces ensembles sont dits faiblement indépendants, s'ils n'ont pas deux de leurs éléments avec une arête commune. *P.Erdős* et *T.Gallai* (Zbl 090.39401) ont prouvé que le graph $G_{l+1}^{(n)}$ où l est le plus grand des entiers $\binom{2k-1}{2}$ et $(k-1)n-(k-1)^2+\binom{k-1}{2}$, contient k arêtes indépendantes. Dans le présent mémoire les AA. étudient la question: Combien d'arêtes sont nécessaires à un graph pour contenir k circuits indépendants ou faiblement indépendants? En posant $f(n,k)=(2k-1)n-2k^2+k$ leur principal résultat est: pour $n\geq n_0(k)$, $k>1$, le graph $G_{f(n,k)}^{(n)}$ contient k circuits indépendants, excepté s'il contient $2k-1$ sommets de valence $n-1$ (dans ce cas sa structure est univoquement déterminée). Si trivialement $k=1$, chaque $G_n^{(n)}$ contient un circuit, mais il y a naturellement des graphs $G_{n-1}^{(n)}$, dont aucun sommet n'a la valence $n-1$ et néanmoins le graph ne contenant aucun circuit. Ainsi la restriction $k>1$ est nécessaire. Evidemment $n_0(k)\geq 3k$, puisque un circuit normal contient au moins trois arêtes. Pour $k=2$ et $k=3$, $n_0(k)=3k$, mains en général $n_0(k)>3k$. Ils prouvent $n_0(k)\leq 24k$. Ils pensent valable le fait suivant, analogue à celui cidessus: le graph $G_{l+1}^{(n)}$, où l est le plus grand des entiers $\binom{3k-1}{2}+n-3k+2$ et $(2k-1)n-2k^2+k$, contient k circuits indépendants. Ils notent $g(k)$ le plus petit entier tel que chaque $\bar{G}_{n+g(k)}^{(n)}$ contienne k circuits faiblement indépendants et prouvent $g(2)=4$ et pour chaque k : $c_1k\log k<g(k)<c_2k\log k$, où c_1 et c_2 sont deux constantes absolues appropriées. Ils donnent la valeur de $g(3)$; par contre l'exacte détermination de $g(k)$ leur parait un problème difficile. Ils terminent par la constatation que certains de leurs résultats étaient connus de G. Dirac, mais qui n'a rien publié à leur sujet.

S.Bays

Classification:
05C35 Extremal problems (graph theory)