Zbl 123.32001
Erdős, Pál
On some properties of Hamel bases (In English)
Colloq. Math. 10, 267-269 (1963). [0010-1354]

Es existiert [vgl. *W. Sierpiński*, Fundam. Math. 1, 105-111 (1920)] eine Hamelsche Basis H der reellen Zahlen $\alpha, \beta, ...$, die nicht-meßbar ist, und es existiert auch eine solche, die das Maß Null hat. Verf. geht in dieser Richtung weiter und beweist die folgenden Sätze: H^* bzw. H^+ bezeichne die Menge aller reellen Zahlen des Typus $\sum_\alpha n_\alpha a_\alpha$ bzw. $\sum_\alpha r_\alpha^+ (a_\alpha \in H$; n_α ganz; r_α^+ nichtnegativ rational: $\sum_\alpha$ endlich).
(I) H^* ist immer nicht-meßbar, sogar ist das innere Maß von H^* gleich 0 und für jedes Intervall (a, b) ist das äußeren Maß von $H^* \cap (a, b)$ gleich $b - a$.
(II) Vorausgesetzt, daß die Mächtigkeit des Kontinuums $\mathfrak{c} = \aleph_1$ ist, existiert eine Hamelsche Basis H, für die H^+ das Maß Null hat.
In dieser Arbeit wird auch ein Problem von *M.Kuczma* (vgl. vorstehendes Referat, Zbl 123.31904) in negativem Sinne beantwortet: Es sei $f(X + Y) = f(x) + f(Y)$; setzt man $f(Z) < c$ für alle $Z \in P$ voraus, wobei P eine Menge ist, so daß alle reellen Zahlen in der Form $Z_1 - Z_2$, $Z_1, Z_2 \in P$ darstellbar sind, existiert trotzdem $f(X)$ mit der Eigenschaft $f(X) \neq cX$ (vgl. *S. Kurepa*, Zbl 072.05301).

E. Vincze

Classification:
28A99 Classical measure theory