**Zbl 122.05904**

**Davenport, H.; Erdős, Pál**

*A theorem on uniform distribution* (In English)

**Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., Ser. A 8, 3-11 (1963).**

Es sei $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ eine Folge von paarweise elementfremden Intervallen $I_j = (x_j, y_j)$ derart, daß $0 \leq x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots$ und $\lim_{j\to\infty} x_j = \infty$ gilt. Für $Z > 0$ sei $I(Z)$ das Lebesguesche Maß der Punktmenge $\cup_{j=1}^{\infty} I_j \cap (0, Z)$. Für $\alpha > 0$ und für jede natürliche Zahl $N$ sei $F_\alpha(N)$ die Anzahl der Punkte $n\alpha \in \cup_{j=1}^{\infty} I_j$ mit $1 \leq n \leq N$. Die Verff. beweisen folgenden Satz: Es sei $Z/(I(Z)$ beschränkt für $Z \to \infty$, und die Anzahl der $x_j \leq N$ sei $O(N^{2-\delta})$ für $N \to \infty (\delta > 0)$. Dann gilt für fast jede reelle Zahl $\alpha > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\alpha F_\alpha(N)}{I(N\alpha)} = 1.$$

Wird $y_j = x_j + \lambda(x_{j+1} - x_j)$ $(0 < \lambda < 1)$ gesetzt, dann folgt insbesondere: Unter den angegebenen Voraussetzungen für die Folge $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ ist die Folge $\{n\alpha\}_{n=1}^{\infty}$ für fast jede reelle Zahl $\alpha > 0$ gleichverteilt modulo der Folge $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ im Sinne von *LeVeque* (Zbl 051.28503). Das Hauptresultat folgt aus der Abschätzung

$$(*) \qquad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (F_\alpha(N) - \alpha^{-1} I(N\alpha))^2 d\alpha = O(N^{2-\delta}) \quad (0 < \alpha_1 < \alpha_2).$$

Um diese zu erhalten, wird der Ausdruck $F_\alpha(N) - \alpha^{-1} I(N\alpha)$ durch einen etwas einfacheren ersetzt und dieser (als Funktion von $x_j\alpha^{-1}$ bzw. $y_j(\alpha^{-1})$ in Fourierreihen entwickelt. Geeignete Zerlegungen dieser Reihen und sorgfältige Abschätzungen der Produkte der einzelnen Summanden führen schließlich auf (*).

*G.Helmberg*

Classification:
11K06 General theory of distribution modulo 1