
Zbl 116.15002

Erdős, Pál; Sachs, Horst

Reguläre Graphen gegebener Taillenweite mit minimaler Knotenzahl.

Regular graphs with given girth and minimal number of knots. (In German)

Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Naturwiss. Reihe 12, 251-258 (1963). [0138-1504]

Teil I dieser Arbeit geht wesentlich auf *Erdős*, Teil II auf *Sachs* zurück. Es handelt sich um reguläre Graphen G ohne Schlingen und mehrfache Kanten (Ordnung n, Grad k). Unter der "Taillenweite" von G verstehen die Verff. die Länge eines kürzesten Kreises in G, unter $f(k,l)$ die kleinste Ordnung n, für welche es einen solchen Graph der Taillenweite $\geq l$ gibt. Es ist $f(2,l) = l$ und $f(k,3) = k+1$. Die Bestimmung von $f(k,l)$ für $k > 2$, $l > 3$ wird als schwieriges Problem bezeichnet, das bisher nur für spezielle Werte von k, l gelöst ist. *H. Sachs* [J. London Math. Soc. 38, 423-429 (1963; Zbl 117.17302)] hat eine obere Abschätzung für $f(k,l)$ gegeben. Erdős beweist in I für $k \geq 2$, $l \geq 3$, $m = [\frac{1}{2}(l-3)]$

$$1 + k\sum_{t=0}^{m}(k-1)^t \leq f(k,l) \leq 4\sum_{t=1}^{l-2}(k-1)^t \tag{1}$$

und verbessert damit die obere Schranke. Er zeigt ferner, daß die untere Schranke für gerades $l = 2q$ durch den größeren Wert

$$2[(k-1)^q - 1]/(k-2) \tag{2}$$

ersetzt werden kann, und gibt unter Heranziehung der Ergebnisse von *A.J.Hoffman* und *R.R.Singleton* (Zbl 096.38102), *F.Karteszi* (Zbl 099.15301; Zbl 104.39906), *W.F.McGee* (Zbl 091.37504), *W.T.Tutte* (Zbl 029.42401) einen Überblick über bereits bekannte Teilergebnisse. Dabei zeigt sich, daß überall (ausgenommen $k = 3$, $l = 7$) $f(k,l)$ gleich der unteren Schranke (1) bzw. (2) ist, und daß dann die Graphen mit $n = f(k,l)$ bei geradem l paare Graphen sind.

In II werden zunächst folgende Eigenschaften der "Minimalgraphen" $G^{(n)}(k,l)$ mit $n = f(k,l)$ hergeleitet: Der Abstand zweier beliebiger Punkte ist $\leq l$; für gerades $k = 2h$ ist die Anzahl derjenigen Kanten, deren Endpunkte von einem beliebigen Punkt den Abstand l haben, $< h$, und die Anzahl derjenigen Punkte, die von einem beliebigen Punkt den Abstand l haben, $\leq (k-1)^{l-1}$; durch jede Kante gehen mindestens $[\frac{1}{2}(k+1)]$ Kreise mit Länge $\leq l+1$; es gibt keine Brücke und keine Artikulation; durch einen Punkt gehen mindestens $\left[\frac{1}{2}\left(k\left[\frac{k+1}{2}\right]+1\right)\right]$ Kreise mit Länge $\leq l+1$ (eine Aussage, die für gerades und für ungerades k noch präzisiert wird); jeder $G^{(n)}(k,l)$ hat die Taillenweite l. Es folgt: Zu zwei beliebigen natürlichen Zahlen $k \geq 2$ und $l \geq 3$ gibt es stets reguläre Graphen k-ten Grades mit Taillenweite l.

Zum Schluß stellt Sachs noch die Ungleichung $f(k, 2q+2) \leq 2f(k, 2q+1)$ auf, gelangt damit bei geradem l zu einer besseren oberen Schranke und verwendet dieselbe mit (1) und (2) zu folgender Zusammenstellung, in der $g(k,e) = [(k-$

$1)^e-1)/(k-2)]$ ist: $1+kg(k,q) \leq f(k,2q+1) \leq 4[g(k,2q)-1]$, $2g(k,q+1) \leq f(k,2q+2) \leq 8[g(k,2q)-1]$.

E.Schönhardt

Classification:
05C35 Extremal problems (graph theory)