
Zbl 102.28401

Erdős, Pál; Hajnal, András

On the structure of set-mappings (In English)

Acta Math. Acad. Sci. Hung. 9, 111-131 (1958). [0001-5954]

Sei S eine Menge und I eine Menge ihrer Teilmengen. Für $X \in I$ sei $f(X) \subseteq S$ eine Funktion mit der Eigenschaft $X \cap f(X) = \emptyset$. Dann heiße $f(X)$ eine Mengenabbildung (abgekürzt: MA) von S vom Typus I. Eine Teilmenge S' von S heiße frei bezüglich $f(X)$, wenn für alle $X \subseteq S', X \in I$ gilt: $S' \cap f(X) = \emptyset$. Der Verf. untersucht solche MA, bei denen I entweder aus allen Teilmengen von S mit vorgeschriebener Mächtigkeit t besteht oder aus allen Teilmengen von S mit Mächtigkeiten $< t$. Diese MA sollen dann vom Typus t bzw. $< t$ heißen. Wenn $\overline{\overline{f(X)}} < n$ für $X \in I$, so heiße $f(X)$ von der Ordnung n. Mit dem Symbol $(m, n, t) \to p$ bzw. $(m, n < t) \to p$ wird die Aussage bezeichnet, daß es von einer Menge S der Mächtigkeit m eine Teilmenge S' der Mächtigkeit p gibt, die frei bezüglich einer MA $f(X)$ der Ordnung n vom Typus t bzw. $< t$ ist. Die Verneinung dieser Aussage wird durch $(m, n, t) \nrightarrow p$ bzw. $(m, n, < t) \nrightarrow p$ symbolisiert.

Einige der nachstehend aufgeführten Resultate werden vom Verf. durch Voranstellen des Zeichens (*) bzw. (**) markiert. Das soll bedeuten, daß sie auf Grund der Hypothese (*) bzw. (**) bewiesen sind, wobei (*) die allgemeine Kontinuumhypothese bedeutet und (**) die folgende Annahme: In der Menge aller Teilmengen einer Menge S, die eine streng unerreichbare Kardinalzahl $\overline{\overline{S}} = m$ besitzt, läßt sich ein zweiwertiges Maß $\mu(X)$ so erklären, daß $\mu(S) = 1$, $\mu(\{x\}) = 0$ für $x \in S$ gilt und μ für weniger als m Summanden additiv ist.

Resultate: Bei MA des Typus $t \geq \aleph_0$ gibt es keine nicht-trivialen freien Mengen, d.h. es gilt $(m, 2, t) \nrightarrow t$ für $t \geq \aleph_0$. Folgerung: $(m, 2 < t) \nrightarrow \aleph_0$ für $\aleph_0$.

Somit lassen sich Bejahungen nur noch erwarten für $(m, n, k) \to p$ mit $k < \aleph_0$ und für $(m, n < \aleph_0) \to p$. Das letzte Pfeilsymbol wird vom Verf. durch das kürzere $(m, n, \omega) \to p$ ersetzt. Dann ergibt sich $(m, 2, \omega) \nrightarrow \aleph_0$ für $m < \aleph_\omega$. Folgerung: $(\aleph_\omega, 2, \omega) \nrightarrow \aleph_1$. Problem: $(\aleph_\omega, 2, \omega) \to \aleph_0$?

Dagegen das überraschende positive Ergebnis: (**) $(m, n, \omega) \to$ für $n < m$ und streng unerreichbares m.

Die MA vom Typus ω hängen zusammen mit folgendem Problem (*P.Erdős* und *R.Rado*, Zbl 048.28203): Kann man für jedes k, $1 \leq k < \aleph_0$ die k-elementigen Teilmengen einer unendlichen Menge S so in zwei Klassen verteilen, daß zu jeder unendlichen Teilmenge S_1 von S stets ein k existiert, zu dem es in beiden Klassen k-elementige Teilmengen von S_1 gibt? In der jetzigen Abhandlung wird bewiesen: Eine solche Verteilung ist möglich, wenn $\overline{\overline{S}} = m$ unterhalb der kleinsten streng unerreichbaren Kardinalzahl $> \aleph_0$ liegt. (**) Wenn $m > \aleph_0$ und m streng unerreichbar ist, so gibt es ein $\bar{S}_1 \subseteq S$ mit $\overline{\overline{S_1}} = m$, so daß für jedes k alle k-elementigen Teilmengen von S_1 in derselben Klasse liegen.

Ergebnisse bezüglich MA von endlichem Typ k : (*)$(m, n, 1) \to m$ für $n < m$ und $m \geq \aleph_0$ (vermutet von *Ruziewicz*, bewiesen von *P. Erdős*, Zbl 039.04902). $(m, n, k) \to m$ für $n < m$ m streng unerreichbar; folgt aus (**) $(m, n, \omega) \to m$, s.o.

(*) $(m, n, k) \to m$ für $n < m = \aleph_\alpha$ α Limeszahl, $\aleph_\alpha$ nicht unerreichbar.
$(\aleph_{\alpha+k-1}, \aleph_\alpha, k) \nrightarrow k+1$ ($k = 1, 2, ..., \alpha$ beliebig); hingegen $(\aleph_{\alpha+k}, \aleph_\alpha, k) \to \aleph_{\alpha+1}$; jedoch $(\aleph_{\alpha+k}, \aleph_\alpha k) \nrightarrow \aleph_{\alpha+k}$ für $k \geq 2$. Offen bleibt die Frage nach dem größten p, für welches bei festem $k \geq 3$ gilt: $(\aleph_{\alpha+k}, \aleph_\alpha, k) \to p$.
Ergebnisse für MA mit unendlichem m und endlicher Ordnung $l+1$ ($l = 1, 2, ...$) : $(m, l+1, k) \to \aleph_0$; (*) $(\aleph_{\alpha+k-1}, l+1, k) \to \aleph_\alpha$ ($k = 1, 2, ...$); (*) $(\aleph_{\alpha+1}, 2, 2) \not\to \aleph_{\alpha+1}$
Bei endlichem m wird für maximales, von m, l, k abhängiges p mit $(m, l+1, k) \to p$ die Abschätzung $c_1 m^{1/(k+1)} < p < c_2 (m \log m)^{1/k}$ gegeben, wobei c_1 und c_2 positive reelle Zahlen sind, die von k und l abhängen.

W.Neumer

Classification:
05D10 Ramsey theory
03E55 Large cardinals
04A20 Combinatorial set theory
03E05 Combinatorial set theory (logic)