Zbl 097.03502

Erdős, Pál

Some results on diophantine approximation. (In English)

Acta Arith. 5, 359-369 (1959). [0065-1036]

Es sei $\varphi(n, \varepsilon, C)$ die Menge der α $(0 < \alpha < 1)$, für welche $|\alpha - p/q| < \varepsilon/q^2$, $n < q < Cn$, $(p, q) = 1$ nicht lösbar ist, und μ ihr Maß. In Richtung auf die Vermutung der Existenz von $\lim_{n\to\infty} \mu(\varphi)$ zeigt nun der Verf. (vgl. *P.Erdős. P.Szüsz* und *P.Turán*, Zbl 087.04305): Es gibt zu jedem ε, η ein $C = C(\varepsilon, \eta)$, so daß $\mu(\varphi(n, \varepsilon, C)) < \eta$. Der (lange) Beweis zeigt mehr: Es sei $f_q(\alpha) = 1$, wenn für ein p die Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varepsilon}{q^2}$$

lösbar ist, 0 sonst,

$$E_c = \sum_{n<q<C_n} \int_0^1 f_q(\alpha) d\alpha \sim \frac{12\varepsilon}{\pi^2} \log C.$$

Dann ist für jedes η und großes C $\int_0^1 \left(\sum_{n<q<C_n} f_q(\alpha) - E_C\right)^2 d\alpha < \eta E_C^2$. Weiter wird gezeigt [im Detail für $l(n) = n$]: Ist $l(n) > 0$ nicht abnehmend, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l(n)} = \infty$, $N(l, \alpha, n)$ die Anzahl der Lösungen von $m\alpha - [m\alpha] < \frac{1}{l(m)}$, $1 \leq m \leq n$, dann ist für alle α $\lim_{n\to\infty} N(l, \alpha, n) \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{l(m)}\right)^{-1} = 1$.

E.Hlawka

Classification:
11J25 Diophantine inequalities