
Zbl 089.04903

Erdős, Paul; Rényi, Alfréd

On singular radii of power series. (In English. RU summary)

Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 3, 159-169 (1959).

Ist $f(z) = \sum a_n z^n$ in $|z| < 1$ regulär und unbeschränkt, so heißt nach *Meyer-König* und dem Ref. (Zbl 071.28603) $R_\varphi = \{re^{i\varphi}; 0 \leq r < 1\}$ singulärer Radius, wenn $f(z)$ in jedem Sektor $|\arg z - \varphi| < \varepsilon$, $|z| < 1$ unbeschränkt ist; andernfalls heißt R_φ regulärer Radius. Die Frage ist, bei welchen Lückenreihen (1) $f(z) = \sum c_k z^{n_k}$ reguläre Radien auftreten können. Alle Radien sind singulär, wenn $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$ ist. Dies gilt nicht bei Fabry-Lücken $n_k/k \to \infty$, wie aus dem Beispiel der Verff.

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{j=0}^{k^2-1} z^{N_{k+j}}, \qquad N_{k+1} \geq N_k + k^2$$

sofort folgt, denn hier ist R_0 einziger singulärer Radius. Früher (Zbl 078.26105) hatte Erdős gezeigt, daß sogar bei $n_{k+1} - n_k \to \infty R_0$ einziger singulärer Radius sein kann. Dies ist enthalten in folgendem allgemeinen Satz. Es seien m_k, w_k natürliche Zahlen mit $m_k \nearrow \infty, w_k \nearrow \infty$ und es gelte $\liminf_{(k-j)\to\infty} (m_k - m_j)^{1/(k-j)} = 1$. Dann gibt es eine Folge natürlicher Zahlen n_k mit $0 \leq n_k - m_k \leq w_k$ und eine Funktion (1), regulär und unbeschränkt in $|z| < 1$, die R_0 als einzigen singulären Radius hat. Bei beschränkten w_k wird der Satz falsch. Der mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden arbeitende Beweis ist nicht konstruktiv.

D.Gaier

Classification:
30B10 Power series (one complex variable)