Zbl 088.25302
Erdős, Pál; Herzog, F.; Piranian, C.
Metric properties of polynomials. (In English)
J. Anal. Math. 6, 125-148 (1958). [0021-7670]

Les AA. considèrent un polynôme $f(z) = \prod_{\nu=1}^{n}(z-z_\nu)$, désignent par $E = E(f)$ l'ensemble des z complexes tels que $|f(z)| < 1$, et étudient les relations entre des conditions de position pour les z_ν (en général une limitation commune de leur module, et dans certains cas l'hypothèse additionnelle que les z_ν sont réels), et certaines propriétés topologiques ou métriques de E. Par exemple, si les z_ν sont réels et tels que $|z_\nu| \leq r$ pour tout r, ils déterminent la borne supérieure exacte (en fonction de r) du diamètre de $E \cap R$ (R axe réel); généralisant un résultant de G. MacLane, ils prouvent que lorsque les $|z_1|$ sont supposés ≤ 1, la mesure de E peut être arbitrairement petite. Le nombre des composantes connexes de $\bar{E}$, pour $|z_\nu| \leq 1$, est au plus $n-1$ et peut atteindre cette valeur. Si $|z_\nu| \leq r_0 = \sin\frac{1}{8}\pi/(1+\sin\frac{1}{8}\pi)$, E est convexe. Enfin, si $|z_\nu| \leq 1$, et si, pour un $c > 0$ donné, on considère les polynômes du type envisagé tels que $|f(z)| \geq (1+c)^n$ pour $|z| = 1$, il existe deux constantes $c_1 < 1$, $c_2 > 0$ ne dépendant que de c, et telles que, pour ces polynômes, l'ensemble des z tels que $|z| \leq 1$ et $|f(z)| \leq c_1^n$ soit de mesure $\geq c_2$. Les AA. indiquent en outre un grand nombre de problèmes non résolus liés aux question précédentes.

The authors consider a polynomial $f(z) = \prod_{\nu=1}^{n}(z-z_\nu)$, denote by $E = E(f)$ the set of complex z so that $|f(z)| < 1$, investigate the relations between the conditions for the position of the z_ν (in general a common limit for their modul, and in certain cases the additional hypothesis that the z_ν are reals), and certain topological or metric properties of E. For exemple, if the z_ν are reals et that $|z_\nu| \leq r$ for all r, they determine the exact upper bound (for variable r) of the diameter of $E \cap R$ (R real axis); Generalizing a result of G. MacLane, they prove that the measure E can be arbitrarily small because the numbers $|z_1|$ are supposed to be ≤ 1. The number of connected composits of $\bar{E}$, for $|z_\nu| \leq 1$, is at most $n-1$ and can take this value. If $|z_\nu| \leq r_0 = \sin\frac{1}{8}\pi/(1+\sin\frac{1}{8}\pi)$, E is convex. Finally, if $|z_\nu| \leq 1$, and if for certain given $c > 0$, the authors consider the polynomials of this type so that $|f(z)| \geq (1+c)^n$ for $|z| = 1$, there exist two constants $c_1 < 1$, $c_2 > 0$ only dependent of c, and so that for these polynomials, the set of all z so that $|z| \leq 1$ and $|f(z)| \leq c_1^n$ are of measure $\geq c_2$. The authors further state a great nomber of unsolved problems related to the preceding questions.

J.Dieudonné

Classification:
30C10 Polynomials (one complex variable)