Zbl 087.04502
Erdős, Paul; Piranian, George
Sequences of linear fractional transformations. (In English)
Mich. Math. J. 6, 205-209 (1959). [0026-2285]

Diese Arbeit ist die unmittelbare Fortsetzung einer Abhandlung von *Piranian* und *Thron* (Zbl 080.28202, im folgenden zitiert: [P.T.]). Im ersten Abschnitt wird gezeigt, daß eine Punktmenge auf einer Geraden dann und nur dann ein DB ist, wenn sie (in Hausdorffs Bezeichnung) ein $G_{\delta\sigma}$ ist, d.h. eine Summe von Durchschnitten von Folgen offener Mengen. Der zweite Abschnitt beantwortet die dritte und die zweite der in [P.T.] aufgezählten ungelösten Fragen. (Korrektur zum Referat von [P.T.]: Frage 2. lautet: Ist jede Teilmenge eines abzählbaren DB ein DB?)
Die Diskussion basiert auf der folgenden Definition: Sei E eine Menge in der Ebene; ein Punkt z gehört zur Menge $\mathrm{gd}(E)$ dann und nur dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, derart daß es für alle t mit $|t-z| < \delta$ in E einen Punkt w gibt, welcher die Ungleichung $|w-t| < \varepsilon|t-z|$ erfüllt. Ist zum Beispiel $E = (z, |z| \leq 1)$, so ist $\mathrm{gd}(E) = (z, |z| < 1)$. Ferner sei $E^1 = E \cap \mathrm{gd}(E)$ und für jede Ordnungszahl α erster Art:

$$E^\alpha = E^{\alpha-1} \cap \mathrm{gd}(E^{\alpha-1}),$$

für jede Ordnungszahl α zweiter Art:

$$E^\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} E^\beta.$$

Es wird bewiesen, daß eine abzählbare Menge dann und nur dann ein DB ist, wenn es ein α derart gibt, daß E^α die leere Menge ist. Wie nach den Ergebnissen von [P.T.] zu erwarten war, konnte die vollständige Charakterisierung der als DB in Frage kommenden Mengen nicht rein topologisch ausfallen. Die Frage 2. wird positiv entschieden.

H.Schwerdtfeger

Classification:
04A15 Descriptive set theory