Zbl 085.03104
Erdős, Pál; Lorentz, G.G.
On the probability that n and $g(n)$ are relatively prime. (In English)
Acta Arith. 5, 35-44 (1959). [0065-1036]

Das von Mertens herrührende Resultat

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \sim \frac{3}{\pi} n^2$$

läßt sich in der Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung so formulieren, daß die Wahrscheinlichkeit für die Relation $(nm) = 1$ gleich $6/\pi^2$ ist; hier bedeuten n und m zwei zufällig und unabhängig gewählte natürliche Zahlen. Die Verff. behandeln die entsprechende Frage, wenn n und m nicht unabhängig sind, sondern etwa m von n abhängt, d. h. $m = g(n)$ ist. Das Hauptergebnis der Arbeit lautet folgendermaßen:
Satz 2. Es sei $f(x)$ eine differenzierbare, (mod 1) "homogen gleichverteilte" Funktion, d. h. die Folge $f(dx)/d(x = 1, 2, \ldots)$ sei für jedes natürliche d (mod 1) gleichverteilt. Ferner sei vorausgesetzt, daß die folgenden Beziehungen gelten: (A) $f(x) = o\left(\frac{x}{\log\log x}\right)$; (B) $xf'(x)/\log\log\log x \to \infty$ für $x \to \infty$ (c) Es ist $f'(y) \le Mf'(x)$ für $y \ge x$, wobei M eine numerische Konstante ist. Man setze $g(x) = [f(x)]$. Dann ist die "Wahrscheinlichkeit" für $(n, g(n)) = 1$ gleich $6/\pi^2$. Unter "Wahrscheinlichkeit" wird der Grenzwert der relativen Häufigkeit der Zahlen n mit $(n, g(n)) = 1$ unter N für $N \to \infty$ verstanden. Es wird gezeigt, daß sich die Beschränkung (B) nicht durch eine mildere ersetzen läßt. Die Verff. behandeln auch den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{S(x)}{x}$, wobei $S(x)$, die Summe der Teileranzahlen von $(n, g(n))$ mit $n \le x$ bedeutet. In dieser Richtung wird folgender Satz bewiesen:
Satz 3. Ist $f(x) = O(x/\log x)$ und $xf'(x)/\log\log x \to \infty$ für $x \to \infty$, bezeichnet ferner wieder $g(x) = [f(x)]$, so gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{\pi^2}{6}.$$

P.Szüsz

Classification:
11K99 Probabilistic theory