Zbl 074.04602
Erdős, Pál
On a high-indices theorem in Borel summability. (In English. RU summary)
Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7, 265-281 (1956). [0001-5954]

Die Reihe (1) $\sum_0^\infty a_k$ mit den Teilsummen s_k sei eine Lückenreihe, d. h. es sei $a_k = 0$ für $k \neq n_j$ $(j = 0, 1, ...)$, wo $\{n_j\}$ eine Folge ganzer Zahlen und $0 \leq n_0 < n_1 < \cdots$ ist. Satz: Ist die Lückenreihe (1) Borel-summierbar (d.h.: $b(x) = e^{-x} \sum_0^\infty \frac{s_k x^k}{k!}$ konvergiert für $x > 0$ und $\lim_{x\to\infty} b(x)$ existiert), gilt (2) $n_{j+1} - n_j > c n_j^{1/2}$ $(j = 0, 1, ...)$ für eine geeignete Konstante $c > 0$ und ist

$$\sum_{j=0}^{\infty} (n_{j+1} - n_j)^{-1} < \infty, \tag{3}$$

so ist (1) konvergent. Das Besondere hier ist, daß die Tauber-Bedingung nur in Voraussetzungen über die Lückenlängen besteht und daß keine Bedingung über die Größenordnung der a_k auftritt (abgesehen von der für die Existenz von $b(x)$ für $x > 0$ erforderlichen Einschränkung). Der Beweis erfordert schwierige Abschätzungen. Es wird benützt, daß der Satz richtig ist, wenn (3) durch die Bedingung ersetzt wird, daß die Potenzreihe $\sum_0^\infty a_k z^k$ einen nichtverschwindenden Konvergenzradius besitzt. Wegen Lückenumkehrsätzen für das Borel- und das verwandte Euler-Knopp-Verfahren und wegen weiterer Literatur vgl. Verf. (Zbl 047.30102), *W.Meyer-König* und *K.Zeller* [Math. Z. 66, 203-224 (1956; Zbl 075.25801)].

W.Meyer-König

Classification:
40G10 Power series methods