Zbl 066.29801

Erdős, Paul; Oxtoby, John C.

Partitions of the plane into sets having positive measure in every non- null measurable product set. (In English)

Trans. Am. Math. Soc. 79, 91-102 (1955). [0002-9947]

Die Verff. entwickeln ein Prinzip zur Konstruktion von (M)- Zerlegungen, d. h. Zerlegungen einer Teilmenge U eines Produktes von Maßräumen in Mengen, deren Durchschnitt mit jeder in U enthaltenen Produktmenge positiven Maßes ebenfalls ein positives Maß hat. Alle vorkommenden Mengen seien meßbar. Im Fall der Ebene, also des Produktes zweier Geraden, wird als Grundlage der folgende Satz bewiesen, und zwar mit Hilfe der Stetigkeit einer Art Faltungsintegral: D sei eine metrisch dichte Menge der Geraden, d. h. schneide jede nicht leere offene Menge in einer Menge positiven Maßes. In einer offenen Menge U der Ebene sei eine stetig differenzierbare Funktion u mit fast überall von Null verschiedenen partiellen Ableitungen erklärt. Hat dann eine Produktmenge mit U einen Durchschnitt positiven Maßes, so auch mit $\{(x,y) : u(x,y) \in D\}$. Als Nebenergebnis erhält man die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Steinhaus: Sind U und u von der beschriebenen Art und A und B Mengen positiven Maßes auf der Zahlengeraden, deren Produkt U in einer Menge positiven Maßes schneidet, so enthält $\{u(x,y) : x \in A, y \in B\}$ ein Intervall. Mittels irgendeiner Zerlegung der Geraden in metrisch dichte Mengen und passender Wahl von u ergeben sich verschiedenartige (M)-Zerlegungen der Ebene, insbesondere solche, die durch gewisse Transformationen wieder in (M)- Zerlegungen überführt werden, etwa durch alle zweimal differenzierbaren eineindeutigen nirgends singulären Transformationen mit offenem Definitionsbereich. Anderseits existiert keine (M)-Zerlegung, die gegenüber allen maßtreuen topologischen Abbildungen der ganzen Ebene auf sich invariant wäre. Die Menge aller Mengen im Einheitsquadrat Q, die nicht Komponente einer (M)-Zerlegung von Q sein können, ist von erster Kategorie in dem mit der üblichen Nikodýmschen Metrik versehenen Raum aller meßbaren Teilmengen von Q. Aus einem Darstellungssatz von Dorothy Maharam folgt schließlich, daß das Produkt zweier beliebiger Maßräume (mit total sigma-endlichen Maßen) dann und nur dann eine (M)-Zerlegung zuläßt, wenn die beiden zugehörigen Maßalgebren atomfrei sind.

K.Krickeberg

Classification:
28A05 Classes of sets