Zbl 065.02305
Erdős, Pál; Gillman, L.; Henriksen, M.
An isomorphism theorem for real-closed fields. (In English)
Ann. of Math., II. Ser. 61, 542-554 (1955).

Einem klassischen Satz von Steinitz zufolge ist ein algebraisch- abgeschlossener Körper vollständig durch seine Charakteristik und seinen Transzendenzgrad bestimmt. Dagegen ist für reell-abgeschlossene Körper der Ordnungstypus des Körpers auch eine Invariante. Zuerst beweisen die Verff., daß zwei reell-abgeschlossene Körper, die eine Menge η_α sind, isomorph sein müssen. (Eine geordnete Menge T heißt eine η_α- Menge, wenn keine Untermenge von der Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$ koinitial oder kofinal ist, und wenn es für $A, B \subset T$, $\overline{\overline{A}} < \aleph_\alpha$, $\overline{\overline{B}} < \aleph_\alpha$ und $A < B$ ein $y \in T$ gibt mit $A < y < B$.) Es entsteht natürlich die Frage, ob zwei nicht archimedische reell-abgeschlossene Körper mit demselben Ordnungstypus und Transzendenzgrad über dem reellem Körper notwendig isomorph sind. A. Robinson hat jüngst dieses Problem mittels eines Gegenbeispiels gelöst. Zu einem besonderen Zweck wird das folgende mengentheoretische Lemma bewiesen. Es sei X eine unendliche Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$. dann gibt es eine Menge $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von Untermengen von X, so daß (a) $\overline{\overline{X}}_\lambda = \mathfrak{m}$ für alle λ, (b) $\overline{\overline{\lambda}} > \mathfrak{m}$, (c) $\overline{\overline{X_\lambda \cap X'_\lambda}} < \mathfrak{m}$ für alle $\lambda \neq \lambda'$. [Dieses Lemma ist schon von Sierpiński bewiesen worden (Zbl 015.39705, p. 118, Corrolaire 7)]. Sei nun X ein topologischer Raum, $C(X)$ der Ring aller reellen stetigen Funktionen auf X, und M ein maximales Ideal in $C(X)$. Dann ist bekanntlich $C(X)/M$ ein reell- abgeschlossener Körper, der sehr wohl nicht-archimedisch sein kann [*M.Henriksen* und *J.R.Isbell*, Proc. Am. Math. Soc. 4, 431-434 (1953; Zbl 051.34001)]. Solche nicht-archimedischen $C(X)/M$ heißen hyper-reell. Die oben gestellten körpertheoretischen Resultate werden auf das Klassifikationsproblem dieser Körper angewendet. Satz: Sei $C(X)/M$ hyper-reell. Dann ist $C(X)/M$ eine η_1-Menge. Satz: Unter Voraussetzung der Kontinuumshypothese sind alle hyper-reellen Körper $C(X)/M$ von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ isomomorph. Satz: Sei D_0 ein Raum von der Mächtigkeit $\aleph_0$, in welchem jeder Punkt isoliert ist (diskreter Raum). Unter Vorraussetzung der Kontinuumshypothese sind alle hyper-rellen $C(D_0)/M$ isomorph. Satz: Sei D_c ein diskreter Raum von der Mächtigkeitt $\mathfrak{c}$. dann enthält $C(D_c)$ zwei maximale Ideale M und M', so daß $C(D_c)/M$ nd $C(D_c)/M'$ hyper-reell und nicht isomorph sind.

E.Hewitt

Classification:
12J15 Ordered fields
12J25 Non-Archimedean valued fields