Zbl 050.04302
Davenport, H.; Erdős, Pál
The distribution of quadratic and higher residues. (In English)
Publ. Math., Debrecen 2, 252-265 (1953). [0033-3883]

Die Verff. beweisen:
1. Der kleinste positive quadratische Nichtrest d zur Primzahl p ist $O((p^{1/2}\log p)^\beta)$, wo $\beta = e^{-1/2}$.
2. Der kleinste positive k-te Potenz-Nichtrest d_k ist [falls $p \equiv 1 \pmod k$] $O(p^{\alpha_k+\varepsilon})$, wo ε beliebig > 0 und $\alpha_k = (2u_k)^{-1}$ ist, wo u_k die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $\varrho(u) = k^{-1}$ ist und $\varrho(u)$ die Funktion, die bestimmt ist durch $\varrho(u) = 1 - \log u$ für $1 \le u \le 2$; $u\varrho'(u) = -\varrho(u-1)$ für $u \ge 2$. Es ist $\alpha_k < (\log\log k)/2\log k + c/\log k$, wo c eine Konstante ist.
3. Jede Klasse von kubischen Nichtresten enthält eine positive Zahl $p^{\gamma+\varepsilon}$, falls p genügend groß ist. Hier ist ε beliebig > 0 und $\gamma = (2u)^{-1} = 0,383...$, wo u die Lösung von $\log u + \int_1^{2u-1} \frac{\log t}{1+t}dt = \frac{1}{3}$ ist.
4. Es gibt eine nur von k abhängige positive Zahl η derart, daß für jede genügend große Primzahl $p \equiv 1 \pmod k$ jede der $k-1$ Klassen von k-ten Potenz-Nichtresten eine positive Zahl $< p^{1/2-\eta}$ enthält.
5. Es sei h eine Funktion von p, für die $h \to \infty$, $\log h/\log p \to 0$, falls $p \to \infty$. Für Primzahlen p sei $S_h(x) = \sum_{n=x+1}^{x+h} \left(\frac{n}{p}\right)$, und $M_p(\lambda)$ sei die Anzahl der positiven ganzen Zahlen x, für die $0 \le x < p$, und $S_h(x) \le \lambda h^{1/2}$ ist. Für jedes feste λ ist dann

$$\lim_{p\to\infty} p^{-1} M_p(\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-t^2/2}dt.$$

H.D.Kloosterman

Classification:
11N69 Distribution of integers in special residue classes
11A15 Power residues, etc.