Zbl 047.06303

de Bruijn, N.G.; Erdős, Pál

Some linear and some quadratic recursion formulas. II. (In English)

Indag. Math. 14, 152-163 (1952); Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 152-163 (1952).

[Teil I. s. Zbl 044.06003]

Die Verff. untersuchen die Lösungen f von

$$f(1)=1, \qquad f(n)=\sum_{k=1}^{n-1} c_k f(n-k) \qquad (n=2,3,...),$$

falls die $c_k>0$ sind und

$$\limsup_{k\to\infty} c_k^{1/k}=\infty :$$

Sie beweisen:

1. Für $n\to\infty$ ist $\limsup c_n/f(n)=0$, $\limsup c_n/f(n+1)=1$.
2. Die explizite Lösung ist:

$$f(n)=\sum_{h=1}^{n-1}\sum c_{i(1)}c_{i(2)}\cdots c_{i(h)},$$

wo in der inneren Summe die Summationsvariablen den Bedingungen $i(1)>0$,...,$i(h)>0$, $i(1)+i(2)+\cdots+i(h)=n-1$ genügen. Falls I_n der größte unter den 2^{n-2} Summanden ist, so gilt: $\lim_{n\to\infty}\{f(n)/I_n\}^{1/n}=1$.

3. Falls $c_{n+1}/c_n\to\infty$, so gilt auch $f(n+1)/f(n)\to\infty$.
4. falls c_{n+1}/c_n monoton wächst, so gilt dasselbe für $f(n+1)/f(n)$, und es ist

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}\cdot\frac{c_{n-1}}{c_n}=1, \qquad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(n)}{c_{n-1}}\right]^{1/n}=1.$$

5. Falls c_{n+1}/c_n monoton wächst und $c_{n+1}/c_n>Cn^\alpha$ $(n=1,2,...)$ (wo $C>0$, $\alpha>0$), so gilt $f(n+1)/c_n\to 1$, falls $n\to\infty$.

Die Verff. geben weiter einige Beispiele, aus denen hervorgeht, daß die erhaltenen Resultate nicht erheblich verschärft werden können. Sie wenden die erhaltenen Resultate an auf die Lösungen von

$$f(1)=1, \quad f(n)=\sum_{k=1}^{n-1} c_{k,n} f(k) f(n-k) \quad (n=2,3,...),$$

wo die $c_{k,n}>0$ sind. Sie geben hinreichende Bedingungen dafür an, daß $\{f(n)\}^{-1/n}$ für $n\to\infty$ einen endlichen Grenzwert hat.

H.D.Kloosterman

Classification:
40A05 Convergence of series and sequences