Zbl 046.04902

Davenport, H.; Erdős, Pál

Note on normal decimals. (In English)

Can. J. Math. 4, 58-63 (1952). [0008-414X]

Die Verff. zeigen folgenden Satz: Es sei $f(x)$ ein Polynom x vom Grad g, dessen Werte für $x = 1, 2, ...$ natürliche Zahlen sind. Dann ist die Dezimalzahl 0, $f(1)f(2)...$ normal. Ist $N(n,t)$ die Anzahl, mit der eine feste Kombination von k Ziffern under den Ziffern von der $(n+1)$-ten bis zur t-ten Ziffer einer Dezimalzahl vorkommt, $N(t) = N(0,t)$, so heißt eine Zahl normal, wenn $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{10^k}$. Der Beweis verläuft so: Es ist für $t > u$ $N(u,t) \le N(t) - N(u) \le N(u,t) + (k-1)$. Ist für festes natürliches nx_n die größte ganze Zahl x, für welche $f(x)$ weniger als n Ziffern besitzt [es ist $x_n \sim \alpha(10^{1/q})^n$ für $n \to \infty$, α Konstante], nimmt die letzte Ziffer in $f(x_n)$ den t_n-ten Platz in 0, $f(1)f(2)...$ ein [$t_{n+1} - t_n = n(x_{n+1} - x_n)$], so genügt es zu zeigen $N(t_n, t) = 10^{-k}(t - t_n) + o(t_n)$ für $n \to \infty$ ($t_n < t \le t_{n+1}$). Hier genügt es den Fall $t = t_n + nX$ (X ganz) zu betrachten. Ist nun $\theta(z)$ definiert als 1 wenn z (modulo 1) einer Zahl kongruent ist, welche in einem Intervall der Länge 10^{-k} liegt und sonst 0 ist, so ist

$$N(t_n, t) = \sum_{x=x_n+1}^{x_n+X} \sum_{m=k}^{n} \theta(10^{-m} f(x)) + O(x_{n+1} - x_n),$$

und es ist zu zeigen, daß die Doppelsumme $= 10^{-k} nX + o(n(x_{n+1} - x_n))$ für $0 < X \le x_{n+1} - x_n$ ist. Alles ist gezeigt, wenn für jedes feste $\delta > 0$, $\delta n < m < (1-\delta)n$,

$$\sum_{x=x_n+1}^{x_n+X} \theta(10^{-m} f(x)) = 10^{-k} X + o(x_{n+1} - x_n)$$

gleichmäßig in m ist. Diese Summe kann aber nach geläufigen Methoden [vgl. *J.F.Koksma*, Diophantische Approximationen, Berlin, SS. 91-92 (1936; Zbl 012.39602)] behandelt werden und läuft auf die Abschätzung der Weylschen Summe

$$S_{n,m,\nu} = \sum_{x=x_n+1}^{x_n+X} \exp(2\pi 10^{-m} \nu f(\nu))$$

hinaus, welche durch die Weylsche Ungleichung geleistet wird. Die Verff. zeigen noch schärfer: Für jedes ε und k ($\varepsilon > 0$, k natürliche Zahl) sind fast alle Zahlen $f(1), f(2), ..., (\varepsilon, k)$ normal (zur Definition vgl. *A.S.Besicovitch*, Zbl 009.20002).

E.Hlawka

Classification:
11K16 Normal numbers, etc.

©European Mathematical Society & FIZ Karlruhe & Springer-Verlag