Zbl 044.06003

de Bruijn, N.G.; Erdős, Pál

Some linear and some quadratic recursion formulas. I. (In English)

Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 374-382 (1951); Indag. Math. 13, 374-382 (1951).

Die Verff. untersuchen die Lösungen f von

$$f(1)=1;\quad f(n)=\sum_{k=1}^{n-1} c_k f(n-k)\quad (n=2,3,...),$$

wo die $c_k>0$ vorausgesetzt werden, so daß auch $f(n)>0$ $(n=1,2,...)$. Es werde $C(x)=\sum_{n=1}^\infty c_n x^n$ und $F(x)=\sum_{n=1}^\infty f(n)x^n$ gesetzt. Es ist dann $F(x)=x+C(x)F(x)$. Es sei γ die obere Grenze aller Zahlen $\alpha \geq=$ mit $C(\alpha)\leq 1$ und R der Konvergenzradius der Potenzreihe für $C(x)$. Fünf Fälle werden unterschieden:
1. $\gamma=R=0$; 2. $0<\gamma<R\leq\infty$, $C(\gamma)=1$; 3. $0<\gamma=R<\infty$, $C(\gamma)=1$, $0<C'(\gamma)<\infty$; 4. $0<\gamma=R<\infty$, $C(\gamma)=1$; $C'(\gamma)=\infty$; 5. $0<\gamma=R<\infty$, $0<C(\gamma)<1$.
Die Verff. zeigen zunächst, daß $\lim\{f(n)\}^{-1/n}$ immer existiert (sogar in einem allgemeineren Fall, wo die c_k noch von n abhängen) und $=\gamma$ ist. Komplizierter istdie Frage nach der Existenz von $\lim f(n)/f(n+1)$, der dann ebenfalls $=\gamma$ ist, was in den Fällen 2. und 3. immer zutrifft, nicht immer aber in den übrigen Fällen. Es sei $\alpha=\liminf f(n)/f(n+1)$ und $\beta=\limsup f(n)/f(n+1)$. Die Verff. geben ein Beispiel, wo $\beta>\alpha=0$ ist. Eine hinreichende Bedingung für $\alpha>0$ ist $\sum c_k/f(k)<\infty$. Im 5. Fall ist aber $\sum c_k/f(k)=\infty$. Die Verff. zeigen noch, daß in den Fällen 2, 3, und 4 immer $c_n=o\{f(n)\}$ ist, falls entweder $\lim f(n)/f(n+1)$ oder $\lim c_{n+1}/c_n$ existiert. Für die Fälle 2, 3, 4 und 5 geben sie zwei zugleich notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von $\lim f(n)/f(n+1)$. In diesen 4 Fällen sind folgende Bedingungen (jede für sich) hinreichend:
a) $\lim c_n/c_{n+1}=\gamma$;
b) $\sum_{n=1}^\infty |\gamma c_n-c_{n-1}|\{f(n)\}^{-1}<\infty$;
c) $\sum c_n/f(n)<\infty$;
d) $c_{n+1}c_{n-1}\geq c_{\frac{2}{n}}$ $(n>1)$,
a) und d) auch im Fall 1.

Hendrik Douwe Kloosterman

Classification:
40A05 Convergence of series and sequences