
Zbl 043.08002

Erdős, Pál; Herzog, F.; Piranian, G.

Schlicht Taylor series whose convergence on the unit circle is uniform but not absolute. (In English)

Pac. J. Math. 1, 75-82 (1951). [0030-8730]

Das Funktionselement (1) $f(x) = \sum_0^\infty a_n z^n$ besitze den Konvergenzradius 1. Nach G. H. Hardy kann es vorkommen, daß (1) auf $|z| = 1$ gleichmäßig, aber nicht absolut konvergiert (vgl. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1929, S. 68). Verff. geben zwei neue Beispiele von Potenzreihen (1) dieser Art, die zudem die Eigenschaft haben, daß $f(z)$ schlicht in $|z| \leq 1$ ist. Beim ersten Beispiel besitzt $f(z)$ nur eine einzige singuläre Stelle auf $|z| = 1$, beim zweiten Beispiel ist der andere Extremfall verwirklicht, daß nämlich $f(z)$ über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar ist. Im zweiten Beispiel handelt es sich um eine Lückenreihe $\sum_{\kappa=0}^\infty a_\kappa z^{m_\kappa}$. Soll eine solche die Eigenschaften der Schlichtheit in $|z| \leq 1$ und der gleichmäßigen, aber nicht absoluten Konvergenz auf $|z| = 1$ besitzen, so muß $\sum m_\kappa^{-1}$ divergieren, darf also m_κ nicht zu schnell wachsen. Aber, dies zeigt das Beispiel, m_κ kann immerhin so schnell wachsen, daß die Fabrysche Lückenbedingung $m_{\kappa+1} - m_\kappa \to \infty$ für $\kappa \to \infty$ erfüllt ist. Die Konstruktion der Beispiele beruht auf den Abbildungseigenschaften der Funktion $z + k\omega[1 - (1 - z/\omega)^{1/n}]$, die die Fläche des Einheitskreises abbildet auf einen Bereich, der, roh gesprochen, wieder aus der Fläche des Einheitskreises mit einem an der Stelle ω ansetzenden (für großes n schmalen) Zahn der Länge k besteht [k reell, $|\omega| = 1$, $n > 0$ ganz, $(1 - z/\omega)^{1/n} > 0$ für $z = \omega/2$].

Werner Meyer-König

Classification:
30C45 Special classes of univalent and multivalent functions
41A58 Series expansions