Zbl 036.30702
Bateman, Paul T.; Chowla, S.; Erdős, Pál
Remarks on the size of $L(1,\chi)$. (In English)
Publ. Math., Debrecen 1, 165-182 (1950). [0033-3883]

Es sei χ ein Restcharakter mod k ($\neq$ Hauptcharakter), dann wird $L(1,\chi)$ betrachtet. Es ist bekannt: $|L(1,\chi)| < \log k$. Die Verff. zeigen (Satz 2): Es ist

$$|L(1,\chi)| < \frac{10}{3}\frac{\varphi(k)}{k}\log k + 1 \text{ und für großes } k, \qquad < \frac{7}{4}\frac{\varphi(k)}{k}\log k.$$

Dies ist eine Verschärfung, wenn k viele verschiedene kleine Primfaktoren enthält. Beim Beweis wird von dem Satz von Mertens, dem Primzahlsatz und den Resultaten von *B.Rosser* (Zbl 019.39401; Zbl 024.25004) Gebrauch gemacht.
Der Hauptteil der Arbeit beschäftigt sich mit einer Vertiefung der Untersuchungen von *S.Chowla* (Zbl 032.11006). Es werden jetzt nur reelle primitive Charaktere $\chi(n) = (d/n)$ (Kronecker Symbol, d Fundamentaldiskriminante) betrachtet. Ist $k = q \equiv 1(4)$, (g Primzahl), dann ist $d = q$, ist $q \equiv -1(4)$, dann ist $d = -q$. Es gilt für $L(1,\chi) = L_d(1)$:
(Satz 1): Durchläuft q alle Primzahlen $\equiv 1(4)$ bzw. $\equiv -1(4)$, dann ist

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} \frac{L_d(1)}{\log\log q} \geq \frac{1}{18}e^C, \quad \underline{\lim_{q\to\infty}} (\log\log q)L_d(1) \leq \frac{18}{6}\pi^2 e^{-C}.$$

(C Eulersche Konstante). In beiden Fällen ist $L_d(1) = \sum_{n=1}^{\infty}(n/q)1/n$.
Aus diesem Satz kann gefolgert werden: $\max\sum_{n=1}^{m}(n/q) = \Omega_R(q^{\frac{1}{2}}\log\log q)$, was bereits früher von *S.Chowla* (Zbl 006.25403; Zbl 009.25301) unter Verwendung der erweiterten Riemannschen Vermutung gezeigt wurde.
Der Beweis von Satz 1 ist sehr kompliziert. Benützt wird die Arbeit von *A.Page* (Zbl 011.14905) über Primzahlen in arithmetischen Reihen und ein Lemma von *A. Rényi* (Zbl 033.16201). Um z. B. den ersten Teil des Satzes (etwa für $q \equiv 1(4)$) zu zeigen, wird eine Menge $\gamma = \gamma(x)$ von solchen Primzahlen, welche $\leq x$ sind, konstruiert (für ihre Definition sei auf die Arbeit verwiesen), für die gezeigt wird:

$$\sum_{q\varepsilon\gamma} \log L_q(1) \geq 8\log\log\log x + S(C - \log 18) + o(S) \qquad (x\to\infty),$$

wo S die Anzahl der Primzahlen in γ ist.
Die Hauptschwierigkeit liegt dabei in der Abschätzung von $R = \sum_{q\varepsilon\gamma}\sum_{p>y}(p/q)1/p$, wo das Lemma von Rényi eine wichtige Rolle spielt.

Hlawka (Wien)

Classification:
11M20 Real zeros of L(s,chi)