Zbl 032.38604
Erdős, Pál
Some remarks on polynomials. (In English)
Bull. Am. Math. Soc. 53, 1169-1176 (1947).

Es werden mehrere interessante Ungleichungen bewiesen, von denen einige sich an Resultate von Bernstein, Schur, Fekete, Pólya und Szegö anschließen. Sind $f_n(x)=\prod_{k=1}^n(x-x_k)$, $-1\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le 1$, $f'_n(x)=n\prod_{k=1}^{n-1}(x-y_k)$, $-1\le y_1\le\cdots\le y_n\le 1$, so besteht die Ungleichung

$$|f_n(-1)|+|f_n(+1)|+\sum_{k=1}^{n-1}|f_n(y_k)|\le 2^{n/k}$$

im Falle $k=1$, $k=2$ bzw. $k>2$ für jeden Grad n, für $n\ge 3$ bzw. für $n\ge n_0(k)$. [Die Zahl $n_0(k)$ wird nicht bestimmt.] Sind $-1=x_0\le x_1\le\cdots\le x_{n+1}=1$, $\omega(x)=\prod_{k=1}^n(x-x_k)$, $l_j(x)=\omega(x)/\omega'(x_j)(x-x_j)$, so gibt es einen Index k, für den

$$\max_{x_k<x<x_{k+1}}\sum_{j=1}^n|l_j(x)|<n^{\frac12}$$

ist. Hat das Polynom $f_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ reelle ganze Koeffizienten, liegen die Nullstellen von $f_n(x)$ im Intervall $(-1,+1)$ und ist $f_n(-1)f_n(0)f_n(+1)\ne 0$, so ist $|a_0|\ge 2^{\frac n2}$. (Die Bedingung für die Nullstellen von $f_n(x)$ blieb bei der Aussage des Satzes in der Arbeit weg, beim Beweis aber nicht.) Hat $f_n(z)$ reelle Koeffizienten und ist $|f_n(z)|<1$ im Intervall $(-1,+1)$, so ist $|f_n(z_0)|\le|T_n(z_0)|$, wenn $|z_0|>1$ ist und $T_n(z)$ das Tschebyscheffsche Polynom n-ten Grades bedeutet. Die Arbeit enthält noch andere Ungleichungen für Polynome.

The author proved some interesting inequalities, some of them are closely related to results of Bernstein, Schur, Fekete, Pólya und Szegö. Let $f_n(x)=\prod_{k=1}^n(x-x_k)$, $-1\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le 1$, $f'_n(x)=n\prod_{k=1}^{n-1}(x-y_k)$, $-1\le y_1\le\cdots\le y_n\le 1$, then the following inequality is valid

$$|f_n(-1)|+|f_n(+1)|+\sum_{k=1}^{n-1}|f_n(y_k)|\le 2^{n/k}$$

in case $k=1$, $k=2$ resp. $k>2$ for each degree n, for $n\ge 3$ resp. for $n\ge n_0(k)$. [The number $n_0(k)$ is not computed.] If $-1=x_0\le x_1\le\cdots\le x_{n+1}=1$, $\omega(x)=\prod_{k=1}^n(x-x_k)$, $l_j(x)=\omega(x)/\omega'(x_j)(x-x_j)$, then there exists an index k with

$$\max_{x_k<x<x_{k+1}}\sum_{j=1}^n|l_j(x)|<n^{\frac12}.$$

. If the polynomial $f_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ has real entire coefficients, the zeros of $f_n(x)$ are in the interval $(-1,+1)$ and $f_n(-1)f_n(0)f_n(+1)\ne 0$, then $|a_0|\ge 2^{\frac n2}$. (The condition for the zeros of $f_n(x)$ has been dropped in the statement of the theorem but not in the proof.) If $f_n(z)$ has real coefficients and $|f_n(z)| < 1$ in the interval $(-1, +1)$, then $|f_n(z_0)| \leq |T_n(z_0)|$, if $|z_0| > 1$ and $T_n(z)$ is the Chebyshev polynomial of degree n. The paper contains further inequalities for polynomials.

Gy.Sz.-Nagy (Szeged)

Classification:
26D05 Inequalities for trigonometric functions and polynomials
26C05 Polynomials: analytic properties (real variables)