
Zbl 032.01602
Erdős, Pál
Some remarks on diophantine approximations. (In English)
J. Indian Math. Soc., II. Ser. 12, 67-74 (1948).

Mittels einiger bekannter Abschätzungen über die Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung einer reellen Irrationalzahl α und mittels eines Behnkeschen Satzes über die Reziproken $\frac{1}{\{m\alpha\}}$ für natürliche m wo $\{u\}$ das nächste Ganze an u bezeichnet, verbessert der Verf. zunächst Resultate von *S.D.Chowla* [Math. Z. 33, 544-563 (1935; Zbl 001.32501)] und schärfer *A.Walfisz* [Math. Z. 35, 774-778 (1935; Zbl 004.34102)] über die Teileranzahl $d(n)$ und die Anzahlen $r_2(n), r_4(n)$ der Darstellungen von n als Summe von 2 bzw. 4 Quadraten. Er zeigt nämlich, daß in den für fast alle α (d.h. alle α bis auf eine Ausnahmemenge vom Maß 0) gültigen Walfiszschen Abschätzungen

$$\sum_{m=1}^{n} d(m)e^{2\pi im\alpha} = O(\sqrt{n(\log n)^{1+\varepsilon}}),$$

$$\sum_{m=1}^{n} r_2(m)e^{2\pi im\alpha} = O(\sqrt{n(\log n)^{1+\varepsilon}}),$$

$$\sum_{m=1}^{n} r_4(m)e^{2\pi im\alpha} = O(\sqrt{n(\log n)^{2+\varepsilon}})$$

das willkürliche $\varepsilon > 0$ durch 0 ersetzt werden kann.
Mittels eines Khintchine-Ostrowskischen Satzes über Summen von $\frac{1}{\{m\alpha\}}$ behandelt der Verf. ferner die Größenordnung der Summe $S(n) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m\{m\alpha\}}$. Nach *Spencer* [Proc. Cambridge Philos. Soc. 35, 527-547 (1939; Zbl 022.30904] ist einerseits $S(n) = O(\log n)^2$ für fast alle α, und nach *Hardy-Littlewood* [Bull. Calcutta Math. Soc. 20, 251-266 (1930)] ist anderseits $S(n) = \Omega(\log n^2)$ für alle irrationalen α. Der Verf. beweist, daß genau $S(n) = (1 + o(1))(\log n)^2$ für fast alle α ist, und allgemeiner

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^a\{m\alpha\}} = (1 + o(1))\frac{2n^{1-a}\log n}{a}$$

für $0 < a < 1$ und fast alle α.
Schließlich spricht der Verf. ohne Beweis noch folgende Behauptung aus. Für fast alle α ist

$$\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{\sum_{m=1}^{n}\{m\alpha\}^{-1}} = (1 + o(1))\frac{\log\log x}{2},$$

so daß insbesondere die $\sum_{n=1}^{\infty}$ für fast alle α divergiert. Ist $f(n)$ eine wachsende Funktion, für die $f(n) > (2 + c)n \log n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ konvergent ist, so ist für fast alle α

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\{m\alpha\}} < f(n) \text{ für alle } n > n_0(\alpha).$$

Auf die letzteren beiden Behauptungen ist der Verf. durch Arbeiten von *Khintchine* [Compositio Math., Groningen 1, 361-382 (1935; Zbl 010.34101)] und *Paul Levy* [ebenda 3, 286-303 (1936; Zbl 014.26803)] gekommen.

Hasse (Berlin)

Classification:
11K06 General theory of distribution modulo 1