Zbl 024.30702

Erdős, Pál

On divergence properties of the Lagrange interpolation parabolas. (In English)

Ann. of Math., II. Ser. 42, 309-315 (1941); corrections ibid. 44, 647-651 (1943).

Bezeichnet man mit $x_\alpha^{(n)}$ die nach ihrer Größe geordneten Wurzeln des Tschebyscheffschen Polynomes n-ten Grades, so zeigt man zunächst $x_i^{(m)} - x_j^{(n)} > n^{-3}$ für $m \geq n$. Setzt man $x_0 = \cos(p\pi/q)$, $p \equiv q \equiv 1(\mathrm{mod}2)$ so gibt es zwei Konstanten c_1 und c_2, so daß die Beziehungen $\min_{i=1,\dots,n} |x_0 - x_i^{(n)}| > c_1 n^{-1}$, $|T_n(x_0)| > c_2$ erfüllt sind. Ist $l_k^{(n)}(x_0) = T_n(x_0)/T'{}_n(x_0) \cdot (x_0 - x_k)$ und wird die Summe $\sum'$ über alle $x_k^{(n)}$, die $|x_k^{(n)} - x_0| > (\ln n)^{-1/2}$ genügen, erstreckt, so besteht die Relation $\sum' |l_k^{(n)}(x_0)| < (\ln n)^{1/2}$. Aus $0 < x_k^{(n)} < x_j^{(n)}$ folgt $|l_k^{(n)}(x_0)| > \frac{c_4}{j-k}$; endlich zeigt man, daß

$$\sum_{(2k-1,n)=1} |l_k^{(n)}(x_0)| > c_6 \ln n / \ln\ln n$$

ist. Es ist jetzt möglich, eine stetige Funktion $f(x)$ zu konstruieren, so daß für die Interpolationsparabel nach Lagrange (an den Stellen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ $L_n f(x)$ mit wachsendem $n \to +\infty$ $L_n(f(x_0)) \to \infty$ wird. Ist jedoch $x_0 \neq \cos p\pi/q$, $p \equiv q \equiv 1(\mathrm{mod}2)$, so gibt es für jede stetige Funktion $f(x)$ eine Folge $n_1 < n_2 < n_3 \dots$, so daß $L_{n_i}(f(x_0)) \to f(x_0)$ geht. Der Beweis dieser Behauptung gelingt mit Hilfe des Hilfssatzes: Ist $x_0 \neq \frac{p}{q}$, $p \equiv q \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$, dann hat die Ungleichung $\left| x_0 - \frac{2r-1}{2n_k} \right| < \frac{c_{14}}{n_k^2}$ eine unendliche Anzahl von Lösungen.

F.Knoll (Wien)

Classification:
41A05 Interpolation
33C25 Orthogonal polynomials and functions