Zbl 024.30601
Erdős, Pál
Note on some elementary properties of polynomials. (In English)
Bull. Am. Math. Soc. 46, 954-958 (1940).

$f(x)$ sei ein reelles Polynom vom Grade $n \geq 2$ mit lauter reellen Wurzeln; es sei ferner $f(x) \neq 0$ für $|x| < 1$, $f(-1) = f(+1) = 0$ und $\max_{|x|\leq 1} f(x) = 1$. Der Verf. beweist: Sind $a < b$ zwei in $(-1, +1)$ liegende Zahlen, für die $f(a) = f(b) = d \leq 1$ ausfällt, so gilt die Ungleichung $b - a \leq 2\sqrt{1-d}$; Integration über d gibt die schon bekannte Ungleichung $\int_{-1}^{+1} f(x)dx \leq \frac{4}{3}$ (vgl. Zbl 021.39502); das Gleichheitszeichen steht in beiden Fällen nur für $f(x) = 1 - x^2$. Anschließend äußert der Verf. eine Reihe von Vermutungen. z.B.
1) das Maximum von $\int_{-1}^{+1} |f(x)|dx$ unter allen reellen Polynomen n-ten Grades, deren sämtliche Wurzeln in $(-1, +1)$ liegen, und für die $\max_{|x|\leq 1} f(x) = 1$ ist, wird für $f(x) = T_n(xx_n)$ angenommen, wo T_n das n-te Tschebyscheffsche Polynom, x_n dessen größte Wurzel bedeuten.
2) Sind unter den gleichen Voraussetzungen x_i die der Größe nach geordneten Wurzeln von $f(x)$, so gilt mit einer von i unabhängigen Konstanten $\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)|dx \leq d_n(x_{i+1} - x_i)$, und das Gleichheitszeichen tritt nur für $f(x) = T_n(xx_n)$ ein.

Harald Geppert (Berlin)

Classification:
26D05 Inequalities for trigonometric functions and polynomials
26C05 Polynomials: analytic properties (real variables)
33C25 Orthogonal polynomials and functions