Zbl 013.00602

Erdős, Pál; Turán, Pál

Über die Vereinfachung eines Landauschen Satzes.

On a simplification of a theorem of Landau. (In German)

Mitteil. Forsch.-Inst. Math. Mech. Univ. Tomsk 1, 144-147 (1935).

Es sei $\varepsilon > 0$, $a \geq 2$, $l_a(k)$ die kleinste positive Zahl derart, daß $a^{l_a(k)} \equiv 1 (\bmod k)$. Es sei

$$S(a,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}(l_a(k))^{-\varepsilon}.$$

Die Verff. beweisen $S(a,\varepsilon) = O(\log\log a)$. Schon die Konvergenz der Reihe ist für kein a trivial (falls $\varepsilon \leq 1$), wie die Verff. anzunehmen scheinen. Sie wurde zuerst von *N.P.Romanoff* [Math. Ann. 109, 668-678 (1934; Zbl 009.00801)] für $\varepsilon = 1$ bewiesen, und *E.Landau* [Acta Arith. 1, 43-61 (1935; Zbl 011.00901)] zeigte dann, daß $S(a,1) = O(\log\log a)^2$.

Der von den Verff. gegebene Beweis ist äußerst kurz und einfach und liefert das bestmögliche Resultat, da $S(a,1) = o(\log\log a)$ falsch ist.

Hans Heilbronn (Cambridge)

Classification:

11B25 Arithmetic progressions