Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 517.98

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА И ОПЕРАТОРОВ КОМПОЗИЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ В ПРОСТРАНСТВА ТИПА БЛОХА

С. Стевич

Аннотация. Дана полная картина ограниченности и компактности произведений операторов интегрального типа и операторов композиции из пространства со смешанной нормой в пространство типа Блоха голоморфных функций на единичном круге.

Ключевые слова: оператор интегрального типа, оператор типа композиции, пространство типа Блоха, пространство со смешанной нормой.

1. Введение

Пусть $\mathbb{D}$ — открытый единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $H(\mathbb{D})$ — класс аналитических функций на $\mathbb{D}$. Говорят, что аналитическая функция f на $\mathbb{D}$ *принадлежит пространству типа Блоха* $\mathscr{B}^w(\mathbb{D}) = \mathscr{B}^w$, если

$$B_w(f) = \sup_{z\in\mathbb{D}} w(z)|f'(z)| < \infty,$$

где $w(z)$ — положительная радиальная функция (т. е. $w(z) = w(|z|)$), невозрастающая по $|z|$ и такая, что $\lim\limits_{|z|\to 1} w(z) = 0$.

Выражение $B_w(f)$ определяет полунорму, а естественная норма определяется как $\|f\|_{\mathscr{B}^w} = |f(0)| + B_w(f)$. Относительно нее $\mathscr{B}^w$ — банахово пространство. Если $w(z) = (1-|z|^2)^\alpha$, $\alpha > 0$, то $\mathscr{B}^w = \mathscr{B}^\alpha$ — известное α-пространство Блоха (см., например, [1–5]).

Пусть $\mathscr{B}_0^w$ — подпространство в $\mathscr{B}^w$, состоящее из $f \in \mathscr{B}^w$ таких, что $\lim\limits_{|z|\to 1} w(z)|f'(z)| = 0$. Это пространство называют *малым пространством типа Блоха*.

Положительную непрерывную функцию ϕ на $[0,1)$ называют *нормальной*, если существуют положительные числа s, t, $0 < s < t$, и $\delta \in [0,1)$ такие, что

$$\frac{\phi(r)}{(1-r)^s} \quad \text{убывает на} \quad [\delta,1) \text{ и } \lim_{r\to 1}\frac{\phi(r)}{(1-r)^s} = 0;$$

$$\frac{\phi(r)}{(1-r)^t} \quad \text{возрастает на} \quad [\delta,1) \text{ и } \lim_{r\to 1}\frac{\phi(r)}{(1-r)^t} = \infty$$

(см. [6]).

Для $p, q \in (0, \infty)$ и нормальной функции ϕ пусть $H(p, q, \phi)$ — пространство со смешанной нормой, т. е. пространство аналитических функций f на $\mathbb{D}$ таких, что

$$\|f\|_{H(p,q,\phi)} = \left(\int_0^1 M_q^p(r, f) \frac{\phi^p(r)}{1-r} r dr \right)^{1/p} < \infty,$$

где интегральное среднее $M_q(f, r)$ определяется так:

$$M_q(f, r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q d\theta \right)^{1/q}, \quad 0 \le r < 1.$$

Если $1 \le p < \infty$, то $H(p, q, \phi)$, снабженное нормой $\|\cdot\|_{H(p,q,\phi)}$, есть банахово пространство. Если $0 < p < 1$, то $\|f\|_{H(p,q,\phi)}$ — квазинорма на $H(p, q, \phi)$, $H(p, q, \phi)$ — пространство Фреше, но не банахово пространство. Если $0 < p = q < \infty$, то $H(p, p, \phi)$ — пространство типа Бергмана. Если $\phi(r) = (1-r)^{1/p}$, то $H(p, p, \phi)$ — пространство Бергмана $A^p(\mathbb{D}) = A^p$ (см., например, [5, 7]).

Пусть φ — непостоянное аналитическое отображение $\mathbb{D}$ на себя. Связанный с φ оператор композиции C_φ определяется так: $C_\varphi f = f \circ \varphi$ для $f \in H(\mathbb{D})$. Интересно выяснить с точки зрения теории функций, когда φ индуцирует ограниченный или компактный оператор на том или ином пространстве (см., например, [7]).

Допустим, что $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ — фиксированное голоморфное отображение. Оператор интегрального типа J_g на $H(\mathbb{D})$ определяется равенством (см. [8])

$$J_g f(z) = \int_0^z f(\xi) g'(\xi) d\xi, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Другой оператор интегрального типа, обозначаемый через I_g, определяется так:

$$I_g f(z) = \int_0^z f'(\xi) g(\xi) d\xi, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Значение операторов J_g и I_g связано с тем, что

$$J_g f + I_g f = M_g f - f(0)g(0),$$

где оператор умножения M_g определяется так: $(M_g f)(z) = g(z)f(z)$.

Оператор J_g введен в [8], где доказано, что J_g ограничен на пространстве Харди H^2 тогда и только тогда, когда $g \in BMOA$. Операторы J_g и I_g, как и их n-мерные обобщения, действующие в разных пространствах аналитических функций, изучены недавно, например, в [3, 9–25] (см. также библиографию в этих работах).

В данной статье рассмотрим произведения операторов композиции и операторов интегрального типа, определяемые следующим образом:

$$C_\varphi J_g(f)(z) = \int_0^{\varphi(z)} f(\zeta) g'(\zeta) d\zeta, \quad C_\varphi I_g(f)(z) = \int_0^{\varphi(z)} f'(\zeta) g(\zeta) d\zeta \tag{1}$$

и

$$J_gC_\varphi(f)(z)=\int\limits_0^z(f\circ\varphi)(\zeta)g'(\zeta)d\zeta,\quad I_gC_\varphi(f)(z)=\int\limits_0^z(f\circ\varphi)'(\zeta)g(\zeta)d\zeta. \qquad (2)$$

Изучение этих операторов естественно проистекает из изометричности некоторых функциональных пространств. А именно, в [26] доказано, что оператор T является сюръективной изометрией пространства Дирихле

$$\mathscr{D}^p=\left\{f\in H(\mathbb{D})\mid \|f\|^p_{\mathscr{D}^p}=|f(0)|^p+\int\limits_{\mathbb{D}}|f'(z)|^p\,dA(z)<\infty\right\},$$

где $p\neq 2$, тогда и только тогда, когда существуют автоморфизм ϕ пространства $\mathbb{D}$ и унимодулярные постоянные λ_1 и λ_2 такие, что

$$(Tf)(z)=\lambda_1 f(0)+\lambda_2\int\limits_0^z(\phi'(\xi))^{2/p}f'(\phi(\xi))\,d\xi \qquad (3)$$

для любой $f\in\mathscr{D}^p$. Пусть S^p — пространство аналитических функций f на $\mathbb{D}$ таких, что $f'\in H^p$. Оператор T — сюръективная изометрия S^p относительно нормы $\|f\|^p_{S^p}=|f(0)|^p+\|f'\|^p_{H^p}$ в том и только в том случае, если найдутся автоморфизм ϕ пространства $\mathbb{D}$ и унимодулярные постоянные λ_1 и λ_2 такие, что

$$(Tf)(z)=\lambda_1 f(0)+\lambda_2\int\limits_0^z(\phi'(\xi))^{1/p}f'(\phi(\xi))\,d\xi \qquad (4)$$

для любой $f\in S^p$. Заметим, что операторы (3) и (4) связаны с оператором I_gC_φ.

Мы изучаем ограниченность и компактность операторов в (1) и (2) из пространства со смешанной нормой в пространство типа Блоха $\mathscr{B}^w$ и малое пространство типа Блоха $\mathscr{B}^w_0$.

Всюду далее постоянные обозначаются через C, они положительны и могут быть различными в разных ситуациях. Обозначение $A\asymp B$ означает, что существует положительная постоянная C такая, что $C^{-1}B\le A\le CB$.

2. Вспомогательные результаты

В данном разделе приведем вспомогательные результаты, собрав их в следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть $0<p,q<\infty$, ϕ нормальна и $f\in H(p,q,\phi)$. Тогда*

(a) *существует положительная постоянная C, не зависящая от f, такая, что*

$$|f(z)|\le C\frac{\|f\|_{H(p,q,\phi)}}{\phi(|z|)(1-|z|^2)^{1/q}},\quad z\in\mathbb{D}; \qquad (5)$$

(b) *существует положительная постоянная C, не зависящая от f, такая, что*

$$|f'(z)|\le C\frac{\|f\|_{H(p,q,\phi)}}{\phi(|z|)(1-|z|^2)^{1+\frac{1}{q}}}. \qquad (6)$$

Доказательство. Докажем только утверждение (b), доказательство (a) аналогично.

Ввиду монотонности интегральных средних с помощью известной асимптотической формулы [13]

$$\int_0^1 M_q^p(f,r)\frac{\phi^p(r)}{1-r}r\,dr \asymp |f(0)|^p + \int_0^1 M_q^p(f',r)\frac{\phi^p(r)}{1-r}(1-r)^p\,dr$$

из [27, теорема 7.2.5] и предположения о нормальности ϕ вытекает, что

$$\|f\|^p_{H(p,q,\phi)} \geq C\int_{(1+|z|)/2}^{(3+|z|)/4} M_q^p(f',r)\frac{\phi^p(r)}{1-r}(1-r)^p\,dr$$

$$\geq CM_q^p(f',(1+|z|)/2)\phi^p(|z|)(1-|z|^2)^p \geq C\phi^p(|z|)(1-|z|^2)^{p+\frac{p}{q}}|f'(z)|^p,$$

откуда получаем требуемое. □

Следствие 1. *Пусть $h \in H(\mathbb{D})$, $f \in H(p,q,\phi)$ и $z_0 \in \mathbb{D}$ фиксировано. Тогда*
(a) *существует положительная постоянная C, не зависящая от f, такая, что*

$$\left|\int_0^{z_0} f(\zeta)h(\zeta)\,d\zeta\right| \leq C\frac{\max\limits_{|\zeta|\leq|z_0|}|h(\zeta)|}{\phi(|z_0|)(1-|z_0|^2)^{1/q}}\|f\|_{H(p,q,\phi)};$$

(b) *существует положительная постоянная C, не зависящая от f, такая, что*

$$\left|\int_0^{z_0} f'(\zeta)h(\zeta)\,d\zeta\right| \leq C\frac{\max\limits_{|\zeta|\leq|z_0|}|h(\zeta)|}{\phi(|z_0|)(1-|z_0|^2)^{1/q+1}}\|f\|_{H(p,q,\phi)}.$$

Доказательство. (a) Ввиду леммы 1(a) и нормальности ϕ имеем

$$\left|\int_0^{z_0} f(\zeta)h(\zeta)\,d\zeta\right| \leq \max_{|\zeta|\leq|z_0|}|f(\zeta)|\max_{|\zeta|\leq|z_0|}|h(\zeta)| \leq C\frac{\max\limits_{|\zeta|\leq|z_0|}|h(\zeta)|}{\phi(|z_0|)(1-|z_0|^2)^{1/q}}\|f\|_{H(p,q,\phi)},$$

что и требовалось.

(b) В силу леммы 1(b) и нормальности ϕ получаем

$$\left|\int_0^{z_0} f'(\zeta)h(\zeta)\,d\zeta\right| \leq \max_{|\zeta|\leq|z_0|}|f'(\zeta)|\max_{|\zeta|\leq|z_0|}|h(\zeta)| \leq C\frac{\max\limits_{|\zeta|\leq|z_0|}|h(\zeta)|}{\phi(|z_0|)(1-|z_0|^2)^{1/q+1}}\|f\|_{H(p,q,\phi)},$$

что завершает доказательство следствия. □

Доказательство следующей леммы для случая $w(z) = (1-|z|^2)^\alpha$ может быть найдено в [28] (случай $\alpha = 1$ рассмотрен в [29]). Доказательство в общем случае аналогично, поэтому будет опущено.

Лемма 2. *Замкнутое множество K в $\mathscr{B}_0^w$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и*

$$\lim_{|z|\to 1}\sup_{f\in K} w(z)|f'(z)| = 0.$$

В следующей лемме характеризуется компактность операторов в (1) и (2). Ее доказательство аналогично доказательствам соответствующих лемм, например, в [7, 17, 22, 23] и будет опущено.

Лемма 3. *Оператор $C_\varphi J_g$ (соответственно $C_\varphi I_g$; $I_g C_\varphi$; $J_g C_\varphi$) : $H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ компактен тогда и только тогда, когда для любой ограниченной последовательности $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в $H(p,q,\phi)$, сходящейся к нулю равномерно на компактах в $\mathbb{D}$, будет $C_\varphi J_g f_k \to 0$ (соответственно $C_\varphi I_g f_k$; $I_g C_\varphi f_k$; $J_g C_\varphi f_k \to 0$) в $\mathscr{B}^w$ при $k \to \infty$.*

Лемма 4 [6]. *Для $\beta > -1$ и $m > 1 + \beta$ имеет место неравенство*

$$\int_0^1 \frac{(1-r)^\beta}{(1-\rho r)^m}\,dr \le C(1-\rho)^{1+\beta-m}, \quad 0 < \rho < 1.$$

3. Ограниченность и компактность операторов $C_\varphi J_g$ $(C_\varphi I_g)$: $H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ (или $\mathscr{B}_0^w$)

Здесь мы охарактеризуем ограниченность и компактность оператора $C_\varphi J_g$: $H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ (или $\mathscr{B}_0^w$).

Теорема 1. *Пусть φ — аналитическое отображение единичного круга в себя и $g \in H(\mathbb{D})$. Тогда*

(a) $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ *ограничен в том и только в том случае, если*

$$M := \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q}} < \infty; \tag{7}$$

(b) $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_0^w$ *ограничен в том и только в том случае, если $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ ограничен и*

$$\lim_{|z|\to 1} w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)| = 0. \tag{8}$$

Доказательство. (a) Допустим, что $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ ограничен. Из (1) находим, что

$$(C_\varphi J_g f)'(z) = f(\varphi(z))g'(\varphi(z))\varphi'(z). \tag{9}$$

Для фиксированного $\eta \in \mathbb{D}$ положим

$$f_\eta(z) = \frac{(1-|\eta|^2)^{t+1}}{\phi(|\eta|)(1-\bar{\eta}z)^{1/q+t+1}}. \tag{10}$$

Из [27, предложение 1.4.10] следует, что

$$M_q(f_\eta, r) \le C\frac{(1-|\eta|^2)^{t+1}}{\phi(|\eta|)(1-r|\eta|)^{t+1}}.$$

Используя лемму 4 и предположение о нормальности ϕ, получим

$$\|f_\eta\|^p_{H(p,q,\phi)} = \int_0^1 M_q^p(f_\eta, r)\frac{\phi^p(r)}{1-r} r\,dr \le C\int_0^1 \frac{(1-|\eta|^2)^{p(t+1)}}{\phi^p(|\eta|)(1-r|\eta|)^{p(t+1)}}\frac{\phi^p(r)}{1-r}\,dr$$

$$= C\left(\int_0^{|\eta|} \frac{(1-|\eta|^2)^{p(t+1)}}{\phi^p(|\eta|)(1-r|\eta|)^{p(t+1)}}\frac{\phi^p(r)}{1-r}\,dr + \int_{|\eta|}^1 \frac{(1-|\eta|^2)^{p(t+1)}}{\phi^p(|\eta|)(1-r|\eta|)^{p(t+1)}}\frac{\phi^p(r)}{1-r}\,dr\right)$$

$$\le C\frac{(1-|\eta|^2)^{p(t+1)}}{\phi^p(|\eta|)}\frac{\phi^p(|\eta|)}{(1-|\eta|^2)^{pt}}\int_0^{|\eta|}\frac{(1-r)^{pt-1}}{(1-r|\eta|)^{p(t+1)}}\,dr$$

$$+ C\frac{(1-|\eta|^2)^{p(t+1)}}{\phi^p(|\eta|)}\frac{\phi^p(|\eta|)}{(1-|\eta|^2)^{ps}}\int_{|\eta|}^1\frac{(1-r)^{ps-1}}{(1-r|\eta|)^{p(t+1)}}\,dr \le C.$$

Поэтому $\sup\limits_{\eta\in\mathbb{D}}\|f_\eta\|_{H(p,q,\phi)} \le C$. Значит, ограниченность $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi)\to\mathscr{B}^w$ влечет

$$\frac{w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q}} = w(z)|(C_\varphi J_g f_{\varphi(z)})'(z)| \\ \le \|C_\varphi J_g\|_{H(p,q,\phi)\to\mathscr{B}^w}\|f_{\varphi(z)}\|_{H(p,q,\phi)} \le C\|C_\varphi J_g\|_{H(p,q,\phi)\to\mathscr{B}^w} < \infty \quad (11)$$

для любого $z\in\mathbb{D}$. Получаем (7), что и требовалось.

Пусть теперь выполнено (7). Тогда из (9) и леммы 1 имеем

$$w(z)|(C_\varphi J_g f)'(z)| \le C\frac{w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q}}\|f\|_{H(p,q,\phi)}. \quad (12)$$

Следствие 1(a) с $h = g'$ и $z_0 = \varphi(0)$ дает оценку

$$|(C_\varphi J_g f)(0)| = \left|\int\limits_0^{\varphi(0)} f(\zeta)g'(\zeta)\,d\zeta\right| \le C\frac{\max\limits_{|\zeta|\le|\varphi(0)|}|g'(\zeta)|}{\phi(|\varphi(0)|)(1-|\varphi(0)|^2)^{1/q}}\|f\|_{H(p,q,\phi)}. \quad (13)$$

Так как $|\varphi(0)|<1$, имеем $\max\limits_{|\zeta|\le|\varphi(0)|}|g'(\zeta)|<\infty$. Переходя в (12) к точной верхней границе по $z\in\mathbb{D}$, из (13) получаем

$$\|C_\varphi J_g(f)\|_{\mathscr{B}^w} \\ \le C\left(\sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q}} + \frac{\max\limits_{|\zeta|\le|\varphi(0)|}|g'(\zeta)|}{\phi(|\varphi(0)|)(1-|\varphi(0)|^2)^{1/q}}\right)\|f\|_{H(p,q,\phi)},$$

откуда вытекает ограниченность $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi)\to\mathscr{B}^w$.

(b) Допустим, что $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi)\to\mathscr{B}^w_0$ ограничен. Тогда оператор $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi)\to\mathscr{B}^w$, очевидно, ограничен. Пусть $f_0\equiv 1$. Тогда $f_0\in H(p,q,\phi)$ и тем самым $C_\varphi J_g(f_0)\in\mathscr{B}^w_0$, т. е. выполнено (8), что и требовалось.

Пусть теперь $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi)\to\mathscr{B}^w$ ограничен и имеет место (8). Тогда для любого полинома p

$$w(z)|(C_\varphi J_g p(z))'| = w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)||p(\varphi(z))| \le \|p\|_\infty w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)|,$$

откуда с учетом (8) вытекает, что $C_\varphi J_g p\in\mathscr{B}^w_0$. Множество всех полиномов плотно в $H(p,q,\phi)$. Следовательно, для любой $f\in H(p,q,\phi)$ существует последовательность полиномов $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $\|p_n - f\|_{H(p,q,\phi)}\to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда с учетом ограниченности $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi)\to\mathscr{B}^w$ вытекает, что

$$\|C_\varphi J_g p_n - C_\varphi J_g f\|_{\mathscr{B}^w} \le \|C_\varphi J_g\|_{H(p,q,\phi)\to\mathscr{B}^w}\|p_n - f\|_{H(p,q,\phi)} \to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Значит, $C_\varphi J_g(H(p,q,\phi))\subset\mathscr{B}^w_0$, и тем самым $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi)\to\mathscr{B}^w_0$ ограничен. $\square$

Замечание 1. Условие (7) не зависит от p, хотя и характеризует ограниченность оператора $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi)\to\mathscr{B}^w$.

Теорема 2. *Пусть φ — аналитическое отображение единичного круга в себя и $g\in H(\mathbb{D})$. Тогда*

(a) $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi)\to\mathscr{B}^w$ *компактен в том и только в том случае, если*

$$M_1 := \sup_{z\in\mathbb{D}} w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)| < \infty \quad (14)$$

и

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q}} = 0. \tag{15}$$

(b) $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_0^w$ *компактен в том и только в том случае, если*

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q}} = 0. \tag{16}$$

Доказательство. (a) Пусть выполнены условия (14) и (15). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r \in (0,1)$ такое, что

$$\frac{w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q}} < \varepsilon \tag{17}$$

при $r < |\varphi(z)| < 1$.

Из (14) и (17) вытекает выполнение (7), так что оператор $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ ограничен. Далее, пусть $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность в $H(p,q,\phi)$ такая, что $f_n \to 0$ равномерно на компактах в $\mathbb{D}$ при $n\to\infty$. Из (17) и леммы 1 имеем

$$\begin{aligned}
&w(z)|(C_\varphi J_g f_n(z))'| \\
&\le \sup_{|\varphi(z)|\le r} w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)||f_n(\varphi(z))| + \sup_{r<|\varphi(z)|<1} w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)||f_n(\varphi(z))| \\
&\qquad \le \sup_{|\varphi(z)|\le r} |f_n(\varphi(z))| \sup_{|\varphi(z)|\le r} w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)| \\
&\qquad\quad + C\|f_n\|_{H(p,q,\phi)} \frac{w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q}} \\
&\qquad\qquad \le M_1 \sup_{|\zeta|\le r} |f_n(\zeta)| + \varepsilon C \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{H(p,q,\phi)}.
\end{aligned} \tag{18}$$

С другой стороны,

$$|C_\varphi J_g f_n(0)| \le C \max_{|\zeta|\le|\varphi(0)|} |g'(\zeta)| \max_{|\zeta|\le|\varphi(0)|} |f_n(\zeta)|. \tag{19}$$

Так как круги $|z| \le r$, $|z| \le |\varphi(0)|$ компактны, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\zeta|\le\max\{r,|\varphi(0)|\}} |f_n(\zeta)| = 0. \tag{20}$$

Устремляя n к ∞ в (18) и (19), используя (20) и произвольность ε, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|C_\varphi J_g f_n\|_{\mathscr{B}^w} = 0$. Отсюда с учетом леммы 3 вытекает компактность $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$.

Обратно, пусть $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ компактен. Для $f \equiv 1 \in H(p,q,\phi)$ имеем $C_\varphi J_g(1) \in \mathscr{B}^w$, что совпадает с (14). Пусть $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность в $\mathbb{D}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} |\varphi(z_n)| = 1$ (если такой последовательности нет, то (15) выполнено автоматически). Положим

$$f_n(z) := f_{\varphi(z_n)} = \frac{(1-|\varphi(z_n)|^2)^{t+1}}{\phi(|\varphi(z_n)|)(1-\overline{\varphi(z_n)}z)^{1/q+t+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

где f_η определена в (10) и t из определения нормальности ϕ.

Согласно теореме 1 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{H(p,q,\phi)} < \infty$ и $f_n \to 0$ равномерно на компактах при $n\to\infty$. Отсюда по лемме 3 вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|C_\varphi J_g f_n\|_{\mathscr{B}^w} = 0$.

С другой стороны, ввиду доказательства теоремы 1 (см. (11)) имеем

$$\|C_\varphi J_g f_n\|_{\mathscr{B}^w} \geq \frac{w(z_n)|g'(\varphi(z_n))||\varphi'(z_n)|}{\phi(|\varphi(z_n)|)(1-|\varphi(z_n)|^2)^{1/q}}. \tag{22}$$

Полагая $n \to \infty$ в (22), приходим к (15).

(b) Пусть выполнено (16). Применяя лемму 1, получим выполнение для любой $f \in H(p,q,\phi)$ неравенства

$$w(z)|(C_\varphi J_g f(z))'| \leq C\|f\|_{H(p,q,\phi)} \frac{w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q}}. \tag{23}$$

Переходя в (23) к точной верхней границе по единичному шару в $H(p,q,\phi)$, полагая затем $|z| \to 1$, применяя (16) и лемму 2, получаем компактность $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_0^w$.

Пусть теперь $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_0^w$ компактен. Тогда, очевидно, $C_\varphi J_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ компактен, по утверждению (a) имеем выполнение (15) и для $f \equiv 1$ приходим к (8). Тем самым для любого $\varepsilon > 0$ существует $r_1 \in (0,1)$ такое, что

$$\frac{w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q}} < \varepsilon$$

при $r_1 < |\varphi(z)| < 1$. Согласно (8) найдется $\delta \in (0,1)$ такое, что

$$w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)| < \varepsilon\phi(r_1)(1-r_1^2)^{1/q}$$

для $\delta < |z| < 1$. Отсюда для $\delta < |z| < 1$ и $r_1 < |\varphi(z)| < 1$ получаем, что

$$\frac{w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q}} < \varepsilon.$$

С другой стороны, если $\delta < |z| < 1$ и $|\varphi(z)| \leq r_1$, ввиду нормальности ϕ имеем

$$\frac{w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q}} < \frac{C}{\phi(r_1)(1-r_1^2)^{1/q}} w(z)|g'(\varphi(z))||\varphi'(z)| < C\varepsilon.$$

Из последних двух неравенств вытекает (16). $\square$

Теорема 3. *Пусть φ — аналитическое отображение единичного круга на себя и $g \in H(\mathbb{D})$. Тогда*

(a) $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ *ограничен в том и только в том случае, если*

$$M_2 := \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q+1}} < \infty. \tag{24}$$

(b) $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_0^w$ *ограничен в том и только в том случае, если* $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ *ограничен и*

$$\lim_{|z|\to 1} w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)| = 0. \tag{25}$$

Доказательство. (a) Отметим сначала, что

$$(C_\varphi I_g f(z))' = f'(\varphi(z))g(\varphi(z))\varphi'(z).$$

Отсюда и из леммы 1 имеем

$$w(z)|(C_\varphi I_g f(z))'| \leq C\|f\|_{H(p,q,\phi)} \frac{w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q+1}}. \tag{26}$$

Применяя следствие 1(b), получим

$$|C_\varphi I_g f(0)| \le C \frac{\max\limits_{|\zeta|\le|\varphi(0)|} |g(\zeta)|}{\phi(|\varphi(0)|)(1-|\varphi(0)|^2)^{1/q+1}} \|f\|_{H(p,q,\phi)}. \tag{27}$$

Переходя в (26) к точной верхней границе по $\mathbb{D}$ и используя (27), выводим, что $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ ограничен.

Пусть теперь $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ ограничен. Тогда найдется постоянная C такая, что

$$\|C_\varphi I_g f\|_{\mathscr{B}^w} \le C\|f\|_{H(p,q,\phi)}$$

для любой $f \in H(p,q,\phi)$. Взяв функцию $f(z) \equiv z \in H(p,q,\phi)$, получим

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)| < \infty. \tag{28}$$

Пусть f_η определена в (10). Известно, что $L := \sup\limits_{\eta\in\mathbb{D}} \|f_\eta\|_{H(p,q,\phi)} < \infty$. Поэтому

$$\frac{w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)||\varphi(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|)^{1/q+1}} \le CL\|C_\varphi I_g\|_{H(p,q,\phi)\to\mathscr{B}^w} < \infty. \tag{29}$$

Если $1/2 < |\varphi(z)| < 1$, из (29) вытекает, что

$$\frac{w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|)^{1/q+1}} \le 2CL\|C_\varphi I_g\|_{H(p,q,\phi)\to\mathscr{B}^w}. \tag{30}$$

При $|\varphi(z)| \le 1/2$ из (28) и нормальности ϕ имеем

$$\frac{w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|)^{1/q+1}} \le C\frac{w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(1/2)(1/2)^{1/q+1}} < \infty. \tag{31}$$

Из (30) и (31) следует (24).

(b) Если $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w_0$ ограничен, то, очевидно, $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ ограничен. Взяв функцию $f(z) \equiv z$, придем к (25).

Допустим теперь, что $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ ограничен и выполнено (25). Тогда для любого многочлена p имеем

$$w(z)|(C_\varphi I_g p)'(z)| = w(z)|p'(\varphi(z))||g(\varphi(z))||\varphi'(z)| \le \|p'\|_\infty w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)|.$$

Отсюда и из (25) выводим, что для любого многочлена p будет $C_\varphi I_g(p) \in \mathscr{B}^w_0$. Множество всех многочленов плотно в $H(p,q,\phi)$, тем самым для любой $f \in H(p,q,\phi)$ существует последовательность многочленов $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что $\|p_k - f\|_{H(p,q,\phi)} \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда

$$\|C_\varphi I_g p_k - C_\varphi I_g f\|_{\mathscr{B}^w} \le \|C_\varphi I_g\|_{H(p,q,\phi)\to\mathscr{B}^w}\|p_k - f\|_{H(p,q,\phi)} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$

поскольку оператор $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ ограничен. Значит, $C_\varphi I_g(H(p,q,\phi)) \subset \mathscr{B}^w_0$, что влечет ограниченность оператора $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w_0$. $\square$

Теорема 4. *Пусть φ — аналитическое отображение единичного круга на себя и $g \in H(\mathbb{D})$. Тогда*

(a) *$C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ компактен в том и только в том случае, если*

$$M_2 = \sup_{z\in\mathbb{D}} w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)| < \infty \tag{32}$$

и

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|)^{1/q+1}} = 0. \tag{33}$$

(b) $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_0^w$ *компактен в том и только в том случае, если*

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|)^{1/q+1}} = 0. \tag{34}$$

Доказательство. (a) Пусть выполнены условия (32) и (33). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r \in (0,1)$ такое, что

$$\frac{w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|)^{1/q+1}} < \varepsilon \tag{35}$$

для $r < |\varphi(z)| < 1$.

Из (32) и (35) вытекает (24), тем самым $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ ограничен. Пусть $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность в $H(p,q,\phi)$ такая, что $f_n \to 0$ равномерно на компактах в $\mathbb{D}$ при $n \to \infty$. Тогда из (35) и леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} &w(z)|(C_\varphi I_g f_n(z))'| \\ &\le \sup_{|\varphi(z)|\le r} w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)||f_n'(\varphi(z))| + \sup_{r<|\varphi(z)|<1} w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)||f_n'(\varphi(z))| \\ &\le \sup_{|\varphi(z)|\le r} |f_n'(\varphi(z))| \sup_{|\varphi(z)|\le r} w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)| \\ &\quad + C\|f_n\|_{H(p,q,\phi)} \frac{w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q+1}} \\ &\le M_2 \sup_{|\zeta|\le r} |f_n'(\zeta)| + \varepsilon C \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{H(p,q,\phi)}. \end{aligned} \tag{36}$$

С другой стороны,

$$|C_\varphi I_g f_n(0)| \le C \max_{|\zeta|\le|\varphi(0)|} |g(\zeta)| \max_{|\zeta|\le|\varphi(0)|} |f_n'(\zeta)|. \tag{37}$$

Так как круги $|z| \le r$ и $|z| \le |\varphi(0)|$ компактны, по теореме Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\zeta|\le \max\{r,|\varphi(0)|\}} |f_n'(\zeta)| = 0. \tag{38}$$

Полагая $n \to \infty$ в (36) и (37), используя (38) и произвольность ε, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \|C_\varphi I_g f_n\|_{\mathscr{B}^w} = 0$. Отсюда ввиду леммы 3 вытекает компактность $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$.

Обратно, пусть $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ компактен. Взяв функцию $f(z) \equiv z$, придем к (32). Пусть $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность в $\mathbb{D}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} |\varphi(z_n)| = 1$ (если такой последовательности нет, то (33) выполнено автоматически). Пусть последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ определена, как в (21). Известно, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{H(p,q,\phi)} < \infty$ и $f_n \to 0$ равномерно на компактах в $\mathbb{D}$ при $n \to \infty$. Отсюда по лемме 3 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \|C_\varphi I_g f_n\|_{\mathscr{B}^w} = 0$.

С другой стороны, из доказательства теоремы 3 вытекает, что

$$\|C_\varphi I_g f_n\|_{\mathscr{B}^w} \ge C \frac{w(z_n)|g(\varphi(z_n))||\varphi'(z_n)||\varphi(z_n)|}{\phi(|\varphi(z_n)|)(1-|\varphi(z_n)|)^{1/q+1}}. \tag{39}$$

Полагая $n \to \infty$ в (39), приходим к (33).

(b) Предположим сначала, что выполнено (34). Применяя лемму 1, получим, что для любой $f \in H(p,q,\phi)$ выполнено неравенство

$$w(z)|(C_\varphi J_g f(z))'| \le C\|f\|_{H(p,q,\phi)} \frac{w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|)^{1/q+1}}. \tag{40}$$

Переходя в (40) к точной верхней границе по единичному шару в $H(p,q,\phi)$, полагая $|z| \to 1$ и применяя лемму 2, получаем компактность оператора $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_0^w$.

Пусть теперь $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_0^w$ компактен. Тогда, очевидно, $C_\varphi I_g : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ компактен и из утверждения (a) следует выполнение (33). Для $f(z) \equiv z$ получим

$$\lim_{|z|\to 1} w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)| = 0. \tag{41}$$

Тем самым для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r_2 \in (0,1)$ такое, что

$$\frac{w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|)^{1/q+1}} < \varepsilon$$

для $r_2 < |\varphi(z)| < 1$. Согласно (41) существует $\delta \in (0,1)$ такое, что

$$w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)| < \varepsilon\phi(r_2)\big(1-r_2^2\big)^{1/q+1}$$

для $\delta < |z| < 1$.

Итак, для $\delta < |z| < 1$ и $r_2 < |\varphi(z)| < 1$ имеем

$$\frac{w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|)^{1/q+1}} < \varepsilon.$$

С другой стороны, если $\delta < |z| < 1$ и $|\varphi(z)| \le r_2$, ввиду нормальности ϕ имеем

$$\frac{w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|)^{1/q+1}} < \frac{C}{\phi(r_2)(1-r_2^2)^{1/q+1}} w(z)|g(\varphi(z))||\varphi'(z)| < C\varepsilon,$$

откуда вытекает (34). $\square$

4. Ограниченность и компактность операторов J_gC_φ (или I_gC_φ) : $H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ (или $\mathscr{B}_0^w$)

Применяя те же методы, какие были использованы при доказательстве теорем 1–4, можно получить следующие утверждения для операторов в (2). Ввиду того, что их доказательства аналогичны таковым для теорем 1–4, они будут опущены.

Теорема 5. *Пусть φ — аналитическое отображение единичного круга в себя и $g \in H(\mathbb{D})$. Тогда*

(a) $J_gC_\varphi : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ *ограничен в том и только в том случае, если*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{w(z)|g'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q}} < \infty.$$

(b) $J_gC_\varphi : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}_0^w$ *ограничен в том и только в том случае, если* $J_gC_\varphi : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ *ограничен и* $g \in \mathscr{B}_0^w$.

Теорема 6. *Пусть φ — аналитическое отображение единичного круга в себя и $g \in H(\mathbb{D})$. Тогда*

(a) $J_gC_\varphi : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ *компактен в том и только в том случае, если* $g \in \mathscr{B}^w$ *и*

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{w(z)|g'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q}} = 0.$$

(b) $J_gC_\varphi : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w_0$ *компактен в том и только в том случае, если*

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{w(z)|g'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q}} = 0.$$

Теорема 7. *Пусть φ — аналитическое отображение единичного круга в себя и $g \in H(\mathbb{D})$. Тогда*

(a) $I_gC_\varphi : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ *ограничен в том и только в том случае, если*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{w(z)|g(z)||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|^2)^{1/q+1}} < \infty;$$

(b) $I_gC_\varphi : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w_0$ *ограничен в том и только в том случае, если* $I_gC_\varphi : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ *ограничен и*

$$\lim_{|z|\to 1} w(z)|g(z)||\varphi'(z)| = 0.$$

Теорема 8. *Пусть φ — аналитическое отображение единичного круга в себя и $g \in H(\mathbb{D})$. Тогда*

(a) $I_gC_\varphi : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w$ *компактен в том и только в том случае, если*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} w(z)|g(z)||\varphi'(z)| < \infty$$

и

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{w(z)|g(z)||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|)^{1/q+1}} = 0.$$

(b) $I_gC_\varphi : H(p,q,\phi) \to \mathscr{B}^w_0$ *компактен в том и только в том случае, если*

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{w(z)|g(z)||\varphi'(z)|}{\phi(|\varphi(z)|)(1-|\varphi(z)|)^{1/q+1}} = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Avetisyan K. L.* Hardy–Bloch type spaces and lacunary series on the polydisk // Glasgow Math. J. 2007. V. 49, N 1. P. 345–356.
2. *Clahane D., Stević S.* Norm equivalence and composition operators between Bloch/Lipschitz spaces of the unit ball // J. Inequal. Appl. 2006. V. 2006. Article ID 61018. 11 p.
3. *Stević S.* On an integral operator on the unit ball in $\mathbb{C}^n$ // J. Inequal. Appl. 2005. V. 1. P. 81–88.
4. *Yamashita S.* Gap series and α-Bloch functions // Yokohama Math. J. 1980. V. 28. P. 31–36.
5. *Zhu K.* Spaces of holomorphic functions in the unit ball. New York: Springer-Verl., 2005.
6. *Shields A. L., Williams D. L.* Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 162. P. 287–302.
7. *Cowen C. C., MacCluer B. D.* Composition operators on spaces of analytic functions. Boca Raton, FL: CRC Press, 1995.
8. *Pommerenke Ch.* Schlichte Funktionen und analytische funktionen von beschränkter mittlerer oszillation // Comment. Math. Helv. 1977. V. 52. P. 591–602.

9. *Aleman A., Cima J. A.* An integral operator on H^p and Hardy's inequality // J. Anal. Math. 2001. V. 85. P. 157–176.

10. *Chang D. C., Li S., Stević S.* On some integral operators on the unit polydisk and the unit ball // Taiwanese J. Math. 2007. V. 11, N 5. P. 1251–1286.

11. *Chang D. C., Stević S.* Estimates of an integral operator on function spaces // Taiwanese J. Math. 2003. V. 7, N 3. P. 423–432.

12. *Chang D. C., Stević S.* The generalized Cesàro operator on the unit polydisk // Taiwanese J. Math. 2003. V. 7, N 2. P. 293–308.

13. *Hu Z.* Extended Cesàro operators on mixed norm spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. V. 131, N 7. P. 2171–2179.

14. *Hu Z.* Extended Cesàro operators on the Bloch space in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 2003. V. 23, N 4. P. 561–566.

15. *Li S., Stević S.* Integral type operators from mixed-norm spaces to α-Bloch spaces // Integral Transforms Spec. Funct. 2007. V. 18, N 7. P. 485–493.

16. *Li S., Stević S.* Riemann–Stieltjes operators on Hardy spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2007. V. 14, N 4. P. 621–628.

17. *Li S., Stević S.* Riemann–Stieltjes type integral operators on the unit ball in $\mathbb{C}^n$ // Complex Variables Elliptic Equations. 2007. V. 52, N 6. P. 495–517.

18. *Li S., Stević S.* Compactness of Riemann–Stieltjes operators between $F(p,q,s)$ and α-Bloch spaces // Publ. Math. Debrecen. 2008. V. 72, N 1–2. P. 111–128.

19. *Li S., Stević S.* Riemann–Stieltjes operators between different weighted Bergman spaces // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2008. V. 15, N 4. P. 677–686.

20. *Siskakis A. G., Zhao R.* A Volterra type operator on spaces of analytic functions // Contemp. Math. 1999. V. 232. P. 299–311.

21. *Stević S.* Cesàro averaging operators // Math. Nachr. 2003. Bd 248–249. S. 185–189.

22. *Stević S.* Boundedness and compactness of an integral operator on a weighted space on the polydisc // Indian J. Pure Appl. Math. 2006. V. 37, N 6. P. 343–355.

23. *Стевич С.* Ограниченность и компактность интегрального оператора на пространстве со смешанной нормой на поликруге // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 694–706.

24. *Стевич С.* Ограниченность и компактность интегрального оператора между H^∞ и пространством со смешанной нормой в поликруге // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 3. С. 916–928.

25. *Tang X. M.* Extended Cesàro operators between Bloch-type spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 326, N 2. P. 1199–1211.

26. *Hornor W., Jamison J. E.* Isometries of some Banach spaces of analytic functions // Integral Equations Operator Theory. 2001. V. 41. P. 401–425.

27. *Rudin W.* Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. New York: Springer-Verl., 1980.

28. *Ohno S., Stroethoff K., Zhao R.* Weighted composition operators between Bloch-type spaces // Rocky Mountain J. Math. 2003. V. 33, N 1. P. 191–215.

29. *Madigan K., Matheson A.* Compact composition operators on the Bloch space // Trans. Amer. Math. Soc. 1995. V. 347, N 777. P. 2679–2687.

Статья поступила 9 января 2008 г.

Stevo Stević (Стевич Стево)
Mathematical Institute of the Serbian Academy of Science,
Knez Mihailova 36/III, 11000 Beograd, Serbia
`sstevic@ptt.rs`