Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 517.958

О ГЛАДКОСТИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Г. Романов

Аннотация. Для линейного гиперболического дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, зависящими от пространственной переменной $x \in \mathbb{R}^n$, рассматривается задача о построении фундаментального решения. В предположении, что коэффициенты уравнения обладают достаточно высокой, но конечной гладкостью, выписывается структура фундаментального решения, устанавливается гладкость коэффициентов разложения сингулярной части решения и характеризуется гладкость его регулярной части.

Ключевые слова: фундаментальное решение, гиперболическое уравнение второго порядка, гладкость решения.

§ 1. Введение, основные результаты

Рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt} - Lu = \delta(x-y)\delta(t), \quad u|_{t<0} \equiv 0, \tag{1.1}$$

в которой L — линейный эллиптический оператор с достаточно гладкими коэффициентами, зависящими только от $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u. \tag{1.2}$$

Предположение об эллиптичности означает, что матрица $A = (a_{ij})$ является строго положительной для всех $x \in \mathbb{R}^n$. В уравнении (1.1) $y \in \mathbb{R}^n$ — фиксированная точка, являющаяся параметром задачи, следовательно, $u = u(x,t,y)$. Функция $u = u(x,t,y)$ называется *фундаментальным решением* задачи Коши для гиперболического оператора $\partial^2/\partial t^2 - L$, так как с ее помощью выписывается в явном виде решение задачи Коши с произвольными начальными данными и произвольной правой частью.

В общих чертах структура фундаментального решения хорошо известна (см., например, работы Ж. Адамара [1], С. Л. Соболева [2], В. М. Бабича [3]). Фундаментальное решение состоит из сингулярной части с носителем на характеристическом коноиде и регулярной части с носителем, сосредоточенным в замыкании внутренней части коноида. Асимптотическое разложение решения в окрестности коноида выписано в явном виде в работах [4, 5]. Это разложение

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00312) и Сибирского отделения РАН (проект-2009, № 93).

имеет место в той области, где поле геодезических с центром в точке y регулярно. Оно дает полное описание сингулярной части решения и характеризует поведение регулярной части вблизи границы коноида. В принципе, использованный в [4] метод позволяет оценивать и гладкость регулярной части решения (см. теорему 4.1 для случая $n = 3$). Однако неизученным остался вопрос: какие требования на коэффициенты оператора L обеспечивают заданную гладкость регулярной части решения? Ответ на этот вопрос дается в настоящей статье.

Пусть функция $\tau(x, y)$ является решением уравнения эйконала

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\tau_{x_i}\tau_{x_j} = 1, \quad \tau(x, y) = O(|x - y|) \text{ при } x \to y. \tag{1.3}$$

Физический смысл этой функции — время пробега сигнала от точки y к точке x. Скорость этого сигнала зависит от x и направления его распространения $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$, $|\nu| = 1$, и вычисляется по формуле

$$v(x, \nu) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, \nu_i\, \nu_j \right)^{-1/2}. \tag{1.4}$$

Здесь коэффициенты (a^{ij}) образуют матрицу A^{-1}, которая является обратной к матрице A. С другой стороны, функция $\tau(x, y)$ определяет риманову метрику с элементом длины $\mathrm{d}\tau$, задаваемым соотношением

$$d\tau = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, dx_i\, dx_j \right)^{1/2}. \tag{1.5}$$

Обозначим через $\Gamma(x, y)$ геодезическую линию в этой метрике, соединяющую точки x и y.

Определение. Пусть Ω — компактная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Семейство геодезических $\Gamma(x, y)$ называется *регулярным* в Ω, если

1) область Ω выпукла относительно $\Gamma(x, y)$, $(x, y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega$,

2) каждая пара точек x, y может быть соединена в $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ одной и только одной геодезической $\Gamma(x, y)$.

Пусть семейство геодезических регулярно в Ω. Тогда функция $\tau^2(x, y)$ является гладкой функцией переменных x, y, более точно, $\tau^2(x, y) \in \mathbf{C}^l(\Omega \times \Omega)$, если $a_{ij} \in \mathbf{C}^l(\Omega)$, $l \geq 2$. При фиксированной точке $y \in \Omega$ положение произвольной точки x из Ω может быть однозначно определено римановыми координатами $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, причем $\zeta = -\frac{1}{2}(\nabla_y \tau^2(x, y))A(y) \equiv g(x, y) \in \mathbf{C}^{l-1}(\Omega \times \Omega)$. Функция $\zeta = g(x, y)$ имеет обратную функцию $x = f(\zeta, y)$ класса $\mathbf{C}^{l-1}$, которая позволяет найти точку x по ее римановым координатам.

Ниже мы используем асимптотическое разложение решения задачи (1.1) в окрестности характеристического коноида $t = \tau(x, y)$. Это разложение имеет различную форму для четных и нечетных n. В связи с этим рассмотрим две системы функций. Первую из них введем равенствами

$$\theta_0(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \theta_k(t) = \frac{t^k}{k!}\,\theta_0(t), \quad \theta_{-k}(t) = \frac{d^k}{dt^k}\,\theta_0(t), \ k = 1, 2, \dots, \tag{1.6}$$

а вторую — равенствами

$$\theta_{k+1/2}(t) = \frac{2^{k+1} t^{k+1/2}}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}\,\theta_0(t), \quad \theta_{-k-1/2}(t) = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}\,\theta_{1/2}(t), \ k = 0, 1, 2, \dots. \tag{1.7}$$

В этих равенствах производные понимаются в смысле обобщенных функций. Следовательно, $\theta_{-k}(t)$, $\theta_{-k-1/2}(t)$ — обобщенные функции. В частности,

$$\theta_{-1}(t) = \delta(t), \quad \theta_{-2}(t) = \delta'(t), \quad \theta_{-k}(t) = \delta^{(k-1)}(t), \quad k \geq 1. \tag{1.8}$$

Следующая лемма является комбинацией лемм 2.2.1 и 2.2.2 из книги [5].

Лемма. *Пусть a_{ij}, b_j, c — функции класса $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ и семейство геодезических линий, отвечающих метрике (1.5), регулярно в $\mathbb{R}^n$. Тогда при $n = 2m+1$, $m \geq 1$, решение задачи (1.1) может быть представлено в виде асимптотического ряда*

$$u(x,t,y) = \theta_0(t) \sum_{k=-m}^{\infty} \alpha_k(x,y)\, \theta_k(t^2 - \tau^2(x,y)), \tag{1.9}$$

а при $n = 2m$, $m \geq 1$, — в виде асимптотического ряда

$$u(x,t,y) = \theta_0(t) \sum_{k=-m}^{\infty} \alpha_k(x,y) \theta_{k+1/2}(t^2 - \tau^2(x,y)), \tag{1.10}$$

в которых $\alpha_k(x,y)$ и $\tau^2(x,y)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями и $\alpha_k(x,y)$ вычисляются по формулам

$$\alpha_{-m}(x,y) = \frac{1}{2(\pi)^m (\det A(y))^{1/2}} \left(\det \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma(x,y)} \sum_{i,j=1}^{n} b_i(\xi) a^{ij}(\xi) d\xi_j\right),$$

$$\alpha_k(x,y) = \frac{\alpha_{-m}(x,y)}{4[\tau(x,y)]^{k+m}} \int\limits_{\Gamma(x,y)} \frac{L\alpha_{k-1}(\xi,y)}{\alpha_{-m}(\xi,y)}\, \tau_1^{k+m-1} d\tau_1, \quad k > -m. \tag{1.11}$$

В этих формулах $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — переменная точка на $\Gamma(x,y)$, $\tau_1 = \tau(\xi,y)$ и в качестве положительного направления на $\Gamma(x,y)$ взято направление от y к x.

В следующем параграфе доказывается теорема, являющаяся основным результатом этой статьи.

Теорема. *Пусть $a_{ij}(x) \in \mathbf{C}^l(\Omega)$, $b_j(x) \in \mathbf{C}^{l-2}(\Omega)$, $c(x) \in \mathbf{C}^{l-4}(\Omega)$, где $l = 2(2m+r+2)$, а m, r — целые числа, причем $m \geq 1$, $r \geq 0$. Пусть поле геодезических метрики (1.5) регулярно в Ω и область Ω' содержится строго внутри Ω. Пусть $y \in \Omega'$ и число $T > 0$ таково, что риманов шар $B(y, T/2) = \{x \mid \tau(x,y) \leq T/2\}$ содержится в Ω. Тогда решение задачи (1.1) может быть представлено при $n = 2m+1$ в виде*

$$u(x,t,y) = \theta_0(t) \left[\sum_{k=-m}^{0} \alpha_k(x,y)\, \theta_k(t^2 - \tau^2(x,y)) + \theta_0(t^2 - \tau^2(x,y)) v(x,t,y)\right], \tag{1.12}$$

а при $n = 2m$ — в виде

$$u(x,t,y) = \theta_0(t) \left[\sum_{k=-m}^{0} \alpha_k(x,y) \theta_{k+1/2}(t^2 - \tau^2(x,y)) + \theta_{1/2}(t^2 - \tau^2(x,y)) v'(x,t,y)\right], \tag{1.13}$$

причем функции $\alpha_k(x,y) \in \mathbf{C}^{l-2(m+k+1)}(\Omega \times \Omega)$ вычисляются по формулам (1.10), функция $v(x,t,y)$ является при каждой фиксированной точке $y \in \Omega'$ функцией класса $\mathbf{C}^r(K(y,T))$, $K(y,T) = \{(x,t) \mid \tau(x,y) \leq t \leq T - \tau(x,y)\}$, кроме того, $v(x,t,\tau(x,y)+0) = 0$, а функция $v'(x,t,y)$ в равенстве (1.13) обладает аналогичным свойством $v'(x,t,\tau(x,y)+0) = 0$ и представима в виде $v'(x,t,y) = w(x, \sqrt{t^2 - \tau^2(x,y)}, t, y)$, в котором w является $\mathbf{C}^r$-гладкой функцией своих первых трех аргументов.

§ 2. Доказательство теоремы

Рассмотрим вначале случай $n = 2m+1$. Тогда в качестве следствия равенств

$$l_k(\alpha_k) \equiv 2\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\alpha_k)_{x_i}(\tau^2)_{x_j} + \alpha_k\left(4k-2+\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(\tau^2)_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\tau^2)_{x_i}\right), \tag{2.1}$$

$$l_k(\alpha_k) = 0,\ k=-m; \quad l_k(\alpha_k) - L(\alpha_{k-1}) = 0,\ k > -m, \tag{2.2}$$

являющихся условием выбора коэффициентов α_k разложения (1.9) (см. соотношения (2.2.8) и (2.2.9) в книге [5]), получаем, что функция $v(x,t,y)$ является решением задачи Коши

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - L\right)v = -\theta_0(t)L(\alpha_0)\theta_0(t^2-\tau^2(x,y)), \quad v|_{t<0} = 0. \tag{2.3}$$

В связи с этим функция $v(x,t,y)$ тождественно нулевая для $t < \tau(x,y)$ и удовлетворяет внутри характеристического коноида $t \ge \tau(x,y)$ соотношению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - L\right)v = f(x,y), \quad f(x,y) \equiv -L(\alpha_0), \quad t > \tau(x,y). \tag{2.4}$$

В то же время значения функции $v(x,t,y)$ и ее производных $D^\gamma_{t,x}v(x,t,y)$, $\gamma = (\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n)$, $|\gamma| = \gamma_0+\gamma_1+\ldots+\gamma_n$, по переменным t, x до порядка $p = r+m+1$ могут быть вычислены на границе этого коноида. В самом деле, используя равенство (1.9), получаем

$$v(x,t,y)|_{t=\tau(x,y)+0} = 0,$$

$$D^\gamma_{t,x}v(x,t,y)|_{t=\tau(x,y)+0} = D^\gamma_{t,x}\left[\sum_{k=1}^{|\gamma|}\frac{1}{k!}\alpha_k(x,y)(t^2-\tau^2(x,y))^k\right]_{t=\tau(x,y)}, \quad |\gamma| \le p. \tag{2.5}$$

Из этих соотношений видно, что значения всех производных $D^\gamma_{t,x}v(x,t,y)$ до порядка p при $t=\tau(x,y)+0$ являются непрерывными ограниченными функциями переменной x для $x \in B(y,T/2)$. Заметим также, что правая часть равенства (2.4) обладает тем свойством, что $D^\gamma_{t,x}f(x,y) \in \mathbf{C}(B(y,T/2))$, $|\gamma| \le p$, при фиксированном $y \in \Omega'$.

Используем для оценки функции $v(x,t,y)$ метод энергетических оценок в области $K(y,T)$. Зафиксируем $y \in \Omega'$ и введем интеграл энергии

$$J(t) = \int\limits_{\Sigma(t)}\left[v_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}\right]dx, \quad 0 < t < T. \tag{2.6}$$

Здесь $\Sigma(t)$ — сечение области $K(y,T)$ плоскостью $t = \mathrm{const}$. Используя дифференциальное тождество

$$2v_t(v_{tt} - Lv) \equiv \left[v_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}\right]_t - 2\sum_{i,j=1}^n (v_t a_{ij}v_{x_j})_{x_i} + 2v_t\sum_{i,j=1}^n (a_{ij})_{x_i}v_{x_j} - 2v_t\left[\sum_{i=1}^n b_i v_{x_i} + cv\right], \tag{2.7}$$

уравнение (2.4) и ограниченность его коэффициентов, получаем, что в области $K(y,T)$ для функции $v(x,t,y)$ справедливо неравенство вида

$$\left[v_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} v_{x_j}\right]_t - 2\sum_{i,j=1}^n (v_t a_{ij} v_{x_j})_{x_i} \le C\bigl(f^2 + v_t^2 + |\nabla v|^2 + v^2\bigr). \tag{2.8}$$

Интегрируя это неравенство по слою $D(t_0) = \{(x,t) \in K(y,T) \mid 0 < t < t_0\}$ и используя формулу Гаусса — Остроградского, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} J(t_0) &+ \int\limits_{S_1(t_0)} \left[v_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + 2v_t \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_j} \tau_{x_i}\right] dx \\ &- \int\limits_{S_2(t_0)} \left[v_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + 2v_t \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_j} \tau_{x_i}\right] dx \\ &\le C \int\limits_{D(t_0)} \bigl(f^2 + v_t^2 + |\nabla v|^2 + v^2\bigr)\, dxdt, \end{aligned} \tag{2.9}$$

в котором $S_1(t_0) = \{(x,t) \in K(y,T) \mid t = T - \tau(x,y) \le t_0\}$, $S_2(t_0) = \{(x,t) \in K(y,T) \mid t = \tau(x,y) \le t_0\}$. Заметим, что множество $S_1(t_0)$ пусто для $t_0 < T/2$. В том случае, когда оно непусто, функция, стоящая под знаком интеграла по этому множеству, неотрицательна. В самом деле,

$$\begin{aligned} v_t^2 &+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + 2v_t \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_j} \tau_{x_i} = \left(v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_j} \tau_{x_i}\right)^2 \\ &+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} - \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} \tau_{x_j}\right)^2 \ge \left(v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_j} \tau_{x_i}\right)^2 \\ &+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} \left[1 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \tau_{x_i} \tau_{x_j}\right] = \left(v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_j} \tau_{x_i}\right)^2 \ge 0. \end{aligned}$$

В то же время интеграл по множеству $S_2(t_0)$ легко оценивается, так как функция $v(x,t,y)$ и ее первые производные, как мы уже отмечали выше, известны на этом множестве. В частности, $v = 0$, $v_t = \alpha_1$, $v_{x_i} = 0$. Заметим, что функция $v(x,t,y)$ легко оценивается через значения ее первой производной по переменной t, так что

$$v^2(x,t,y) \le (t - \tau(x,y)) \int\limits_{\tau(x,y)}^{t} v_s^2(x,s,y)\, ds \le T \int\limits_{\tau(x,y)}^{t} v_s^2(x,s,y)\, ds.$$

Учитывая положительную определенность матрицы A и приведенные выше аргументы, из соотношения (2.9) выводим неравенство вида

$$J(t_0) \le C\left[\varepsilon_0 + \int\limits_0^{t_0} J(t)\, dt\right], \quad 0 < t_0 < T, \tag{2.10}$$

в котором

$$\varepsilon_0 = \|\alpha_0\|_{\mathbf{C}^2(B(y,T/2))} + \|\alpha_1\|_{\mathbf{C}(B(y,T/2))}.$$

Из этого неравенства вытекают ограниченность интеграла энергии $J(t)$ для всех $t \in (0,T)$ и как следствие принадлежность функции v пространству $\mathbf{H}^1(\Sigma(t))$, а функции v_t пространству $\mathbf{L}^2(\Sigma(t))$ для $t \in (0,T)$.

Дифференцируя равенство (2.4), аналогично можно оценить функции $v^\gamma = D^\gamma_{t,x} v(x,t,y)$ для всех $|\gamma| \leq p-1$. Введем

$$J_p(t) = \sum_{|\gamma|\leq p-1} \int\limits_{\Sigma(t)} \left[\left(v_t^\gamma\right)^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v^\gamma_{x_i} v^\gamma_{x_j} \right] dx, \quad 0 < t < T. \tag{2.11}$$

Используя изложенную выше технику, вычисляя значения производных функции $v(x,t,y)$ по переменным x,t до порядка p на границе коноида $t = \tau(x,y)$, получаем неравенство, аналогичное (2.10):

$$J_p(t) \leq C \left[\varepsilon_p + \int\limits_0^t J_p(t)\, dt \right], \quad 0 < t < T, \tag{2.12}$$

в котором

$$\varepsilon_p = \|\alpha_0\|_{\mathbf{C}^{2+p}(B(y,T/2))} + \sum_{k=1}^p \|\alpha_k\|_{\mathbf{C}^{p-k}(B(y,T/2))}.$$

Следовательно,

$$J_p(t) \leq C\varepsilon_p \exp(CT), \quad 0 < t < T. \tag{2.13}$$

Это означает, что $v^\gamma \in \mathbf{H}^1(\Sigma(t))$, $v^\gamma_t \in \mathbf{L}^2(\Sigma(t))$, $t \in (0,T)$, для всех $|\gamma| \leq p-1$. Поэтому $v^\gamma \in \mathbf{H}^{m+1}(\Sigma(t))$, $v_t^\gamma \in \mathbf{H}^m(\Sigma(t))$ для $|\gamma| \leq p-1-m = r$. Тогда из теорем вложения следует, что функции v^γ принадлежат $\mathbf{C}(\Sigma(t))$ для $|\gamma| \leq r$ и непрерывны как элементы пространств $\mathbf{C}(\Sigma(t))$ на сегменте $(0,T)$. Таким образом, теорема доказана для случая нечетного n.

Докажем теперь ее справедливость в четномерном случае $n = 2m$. Используем для этого метод повышения размерности пространства. Метод основан на наблюдении, что фундаментальное решение в рассматриваемом случае может быть найдено в виде свертки фундаментального решения, отвечающего пространству размерности $n+1$, с постоянной функцией, тождественно равной 1. Введем дополнительную переменную x_{n+1} и обозначим $\hat{x} = (x, x_{n+1})$. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для функции $\hat{u} = \hat{u}(\hat{x}, t, \hat{y})$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \widehat{L} \right) \hat{u} = \delta(\hat{x} - \hat{y})\delta(t), \quad \hat{u}|_{t<0} \equiv 0. \tag{2.14}$$

Здесь $\widehat{L} = L + \partial^2/\partial x^2_{n+1}$ и $\hat{y} = (y, y_{n+1})$. Так как коэффициенты оператора $\widehat{L}$ не зависят от x_{n+1} и правая часть в (2.14) зависит от разности $x_{n+1} - y_{n+1}$, то имеет место равенство

$$\hat{u}(\hat{x}, t, \hat{y}) = \hat{u}(x, x_{n+1} - y_{n+1}, t, y, 0).$$

Тогда функция u выражается через $\hat{u}$ формулой

$$u(x,t,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x, z, t, y, 0)\, dz. \tag{2.15}$$

Так как $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $n = 2m$, можно использовать уже доказанное представление (1.12) для функции $\hat{u}(\hat{x}, t, \hat{y})$:

$$\hat{u}(\hat{x}, t, \hat{y}) = \theta_0(t)\left[\sum_{k=-m}^{0} \hat{\alpha}_k(\hat{x}, \hat{y})\theta_k(t^2 - \hat{\tau}^2(\hat{x}, \hat{y})) + \theta_0(t^2 - \hat{\tau}^2(\hat{x}, \hat{y}))\hat{v}(\hat{x}, t, \hat{y})\right], \quad (2.16)$$

в котором $\hat{v}(\hat{x}, t, \hat{y}) = \hat{v}(x, x_{n+1} - y_{n+1}, t, y, 0)$ и $\hat{v}(\hat{x}, t, \hat{y}) = 0$ при $t = \hat{\tau}(\hat{x}, \hat{y}) + 0$. Используя установленные в книге [5] равенства (см. с. 43–45)

$$\hat{\tau}^2(\hat{x}, \hat{y}) = \tau^2(x, y) + (x_{n+1} - y_{n+1})^2, \quad \hat{\alpha}_k(\hat{x}, \hat{y}) = \alpha_k(x, y),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_k(t^2 - \tau^2(x, y) - z^2)\, dz = \theta_{k+1/2}(t^2 - \tau^2(x, y)), \quad k > -m,$$

и формулу (2.15), находим, что функция $u(x, y, t)$ имеет вид

$$u(x, y, t) = \theta_0(t)\left[\sum_{k=-m}^{0} \alpha_k(x, y)\theta_{k+1/2}(t^2 - \tau^2(x, y)) + v(x, y, t)\right], \quad (2.17)$$

где

$$v(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(t^2 - \tau^2(x, y) - z^2)\hat{v}(x, z, t, y, 0)\, dz.$$

Выполняя в интеграле замену переменных $z = z_1\sqrt{t^2 - \tau^2(x, y)}$, получаем представление функции $v(x, y, t)$ в виде

$$v(x, y, t) = \theta_{1/2}(t^2 - \tau^2(x, y))v'(x, y, t), \quad v'(x, t, y) = w(x, \sqrt{t^2 - \tau^2(x, y)}, t, y), \quad (2.18)$$

$$w(x, s, t, y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \hat{v}(x, z_1 s, t, y, 0)\, dz_1. \quad (2.19)$$

Завершая доказательство теоремы, заметим, что $v'(x, t, y) = 0$ при $t = \tau(x, y) + 0$, так как $w(x, 0, t, y) = 0$ при $t = \tau(x, y)$. Очевидно, что $w(x, s, t, y)$ при фиксированном значении параметра $y \in \Omega'$ является функцией той же гладкости, что и $\hat{v}(\hat{x}, t, \hat{y})$, т. е. $\mathbf{C}^r$-гладкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.
2. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.
3. *Бабич В. М.* Анзатц Адамара, его аналоги, обобщения, приложения // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3, № 5. С. 1–37.
4. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
5. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.

Статья поступила 11 января 2009 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru