Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 517.98

КОМПАКТНОСТЬ ОПЕРАТОРА ХАРДИ — ЛИТТЛВУДА НА ПРОСТРАНСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. Стевич

Аннотация. Изучается компактность оператора Харди — Литтлвуда на нескольких пространствах гармонических функций в единичном шаре в $\mathbb{R}^n$ таких, как a-пространство Блоха, весовые пространства Харди, Бергмана и Бесова, пространство BMO_p и пространство Дирихле.

Ключевые слова: гармоническая функция, единичный шар, оператор Харди — Литтлвуда, ограниченность, компактность.

1. Введение

Всюду далее G — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < r\}$ — открытый шар радиусом $r > 0$ с центром в $a \in \mathbb{R}^n$, где $|x|$ — норма $x \in \mathbb{R}^n$, и B — единичный открытый шар в $\mathbb{R}^n$, $S = \partial B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ — граница B.

Пусть dV — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, v_n — объем B, $d\sigma$ — поверхностная мера на S, σ_n — площадь поверхности S, dV_N — нормированная мера Лебега на B, $d\sigma_N$ — нормированная поверхностная мера на S. Пусть $\mathscr{H}(B)$ — множество комплекснозначных гармонических функций на B. Основные свойства гармонических функций можно найти, например, в [1, 2].

Пространства типа Харди. Для $p > 0$ обозначим через $\mathscr{H}^p(B)$ множество гармонических функций u на B таких, что

$$\|u\|_{\mathscr{H}^p(B)} = \sup_{0<r<1} M_p(u,r) = \sup_{0<r<1} \left(\int_S |u(r\zeta)|^p \, d\sigma_N(\zeta) \right)^{1/p} < +\infty.$$

При $p \geq 1$ множество $\mathscr{H}^p(B)$ с указанной нормой является банаховым пространством, а при $p \in (0,1)$ — полным метрическим пространством со следующей инвариантной относительно сдвигов метрикой:

$$d(u,v) = \sup_{0<r<1} \int_S |u(r\zeta) - v(r\zeta)|^p d\sigma_N(\zeta).$$

О пространствах $\mathscr{H}^p(B)$ можно найти в [1, гл. VI], о теории комплексных H^p-пространств см., например, [3]. Пространство Харди $\mathscr{H}^p(B)$ содержится в пространствах $\mathscr{H}^p_\beta(B)$, состоящих из всех гармонических функций u на B таких, что

$$\|u\|_{\mathscr{H}^p_\beta(B)} = \sup_{0<r<1} (1-r)^\beta \left(\int_S |u(r\zeta)|^p \, d\sigma_N(\zeta) \right)^{1/p} < +\infty,$$

где $\beta \in [0, \infty)$. Такие пространства мы называем *пространствами типа Харди* или *весовыми пространствами Харди*.

a-Пространства Блоха. Пусть $a > 0$. Функцию $f \in C^1(B)$ называют *a-функцией Блоха*, если

$$\|f\|_{\mathscr{B}^a} = \sup_{x \in B} (1 - |x|)^a |\nabla f(x)| < +\infty.$$

Пространство a-функций Блоха обозначается через $\mathscr{B}^a(B) = \mathscr{B}^a$. Если $a = 1$, то $\mathscr{B}^a$ превращается в пространство Блоха $\mathscr{B}$. Заметим, что $\|\cdot\|_{\mathscr{B}^a}$ — полунорма на $\mathscr{B}^a(B)$, так что $\mathscr{B}^a(B)$ — нормированное пространство по модулю постоянных функций. Эта норма обычно определяется величиной $|f(0)| + \|f\|_{\mathscr{B}^a}$. С этой нормой $\mathscr{B}^a(B)$ банахово. Пусть $\mathscr{H}_{\mathscr{B}^a}(B)$ — пространство, состоящее из всех гармонических a-функций Блоха на единичном шаре, т. е. $\mathscr{H}(B) \cap \mathscr{B}^a(B)$. Если $a = 1$, то получаем пространство Блоха $\mathscr{H}_{\mathscr{B}}(B)$. Основные результаты об аналитических функциях Блоха на единичном круге можно найти в [4–7] и об аналитических функциях многих переменных — в [8–12]. О гипергармонических функциях см. [13, 14].

Пространства BMO_p. Пусть $p > 0$. Борелевскую функцию f, локально интегрируемую на единичном шаре B, называют *$BMO_p(B)$-функцией*, если

$$\|f\|_{BMO_p} = \sup_{B(a,r) \subset B} \left(\frac{1}{V(B(a,r))} \int\limits_{B(a,r)} |f(x) - f_{B(a,r)}|^p \, dV(x) \right)^{1/p} < +\infty,$$

где точная верхняя граница берется по всем шарам $B(a,r)$ с $\overline{B}(a,r) \subset B$ и $f_{B(a,r)}$ — среднее значение f по $B(a,r)$.

Пусть $\mathscr{H}_{BMO_p}(B) = \mathscr{H}(B) \cap BMO_p(B)$.

В [15] для $p \ge 1$ Мурамото доказал, что $\mathscr{H}_{\mathscr{B}}(B)$ и $\mathscr{H}_{BMO_p}(B)$ изоморфны как банаховы пространства. Он доказал следующий результат.

Теорема A. *Пусть $p \ge 1$. Тогда существует положительная постоянная $c(p,n)$, зависящая от p и n, такая, что для любой $u \in \mathscr{H}(B)$*

$$\frac{1}{c(p,n)} \|u\|_{BMO_p} \le \|u\|_{\mathscr{H},n} \le c(p,n) \|u\|_{BMO_p},$$

где

$$\|u\|_{\mathscr{H},n} = \sup_{x \in B} \frac{1}{2} (1 - |x|^2) |\nabla u(x)|.$$

Отметим, что нормы $\|u\|_{\mathscr{H},n}$ и $\|u\|_{\mathscr{B}}$ эквивалентны. В случае $n = 2$ это по-существу получено в [16, 17]. В [18, теоремы 2, 3] мы доказали, что утверждение Мурамото верно также для $p \in (0,1)$. Статья Мурамото побудила нас точно вычислить BMO_p-нормы гармонических функций, что составило содержание работы [18]. В доказательстве основного результата из [18] на самом деле установлено обобщение тождества Харди — Штейна (см., например, [19, с. 42]). Дальнейшие приложения этого очень полезного тождества можно найти в [20, 21]. Среди прочего в [20] доказаны некоторые утверждения, близкие к результатам Ямашиты для аналитических функций на единичном круге [22], а основное утверждение из [21] обобщает основной результат Ямашиты из [23].

Пространства поверхностного типа. В основном утверждении из [21] введено пространство функций на B, состоящее из всех $u \in \mathscr{H}(B)$ таких, что

$$\int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \mathscr{A}^{p/2}(r,u)\,dr < \infty,$$

где $\gamma \in (-1,\infty)$, $p>0$ и

$$\mathscr{A}(r,u) = \int\limits_{rB} |\nabla u(x)|^2\,dV(x).$$

Обозначим это пространство через $\mathscr{S}_{p,\gamma}(B)$. Его можно рассмотреть как естественное обобщение пространства аналитических функций на единичном круге, возникающего в [24]. Для $p \ge 1$ легко увидеть, что

$$\|u\|_{\mathscr{S}_{p,\gamma}} = |u(0)| + \left(\int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \mathscr{A}^{p/2}(r,u)\,dr\right)^{1/p}$$

является нормой на множестве $\mathscr{S}_{p,\gamma}(B)$, которое с этой нормой становится банаховым пространством. Для $p \in (0,1)$ множество $\mathscr{S}_{p,\gamma}(B)$ становится метрическим пространством с метрикой

$$d_{\mathscr{S}_{p,\gamma}}(u,v) = |u(0)-v(0)|^p + \int\limits_0^1 (1-r)^\gamma \mathscr{A}^{p/2}(r,u-v)\,dr.$$

Весовые пространства Бергмана. Пусть $\omega(r)$, $0<r<1$, — положительная весовая функция, интегрируемая на $(0,1)$. Распространим ω на B, полагая $\omega(x) = \omega(|x|)$. Можно считать, что наши веса нормированы, так что $\int\limits_B \omega(x)\,dV(x) = 1$.

Для $0<p<\infty$ весовое пространство Бергмана $b^p_\omega(B)$ представляет собой пространство всех гармонических функций u на B таких, что

$$\|u\|_{b^p_\omega} = \left(\int\limits_B |u(x)|^p \omega(x)\,dV(x)\right)^{1/p} < +\infty.$$

Если $\omega(r) = (1-r)^\alpha, \alpha > -1$, то норму обозначим через $\|u\|_{b^p_\alpha}$, а соответствующее пространство — через $b^p_\alpha(B)$.

Если $p \ge 1$, то $b^p_\omega(B)$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{b^p_\omega}$, а при $p \in (0,1)$ — полное метрическое пространство с метрикой

$$d_{b^p_\omega}(u,v) = \int\limits_B |(u-v)(x)|^p \omega(x)\,dV(x).$$

Легко видеть, что веса могут быть изменены на промежутках $[0,\sigma]$ с $\sigma<1$ без изменения пространства Бергмана. По существу, соответствующие нормы эквивалентны. Недавно появился большой интерес к изучению весовых пространств Бергмана аналитических или гармонических функций с классическим весом $\omega(r) = (1-r)^\alpha$, $\alpha>-1$, а также с весами, отличными от классического (см., например, [3, 13, 25–40] и библиографию там).

Пространство типа Дирихле. Для $\alpha \in (-1,\infty)$ и $p \in (0,\infty)$ пусть $\mathscr{D}^p_\alpha(B) = \mathscr{D}^p_\alpha$ — класс всех гармонических функций u на единичном круге таких, что

$$\|u\|^p_{\mathscr{D}^p_\alpha} = |u(0)|^p + \int_B |\nabla u(x)|^p (1-|x|)^\alpha \, dV(x) < \infty.$$

Для $p = 2$ и $\alpha = 0$ получим классическое пространство Дирихле.

Гармоническое пространство Бесова. Гармоническое пространство Бесова $\mathscr{B}_p(B) = \mathscr{B}_p$ составлено из всех $u \in \mathscr{H}(B)$ таких, что

$$\int_B (1-|x|^2)^p |\nabla u(x)|^p \, d\tau(x) < \infty,$$

где

$$d\tau(x) = \frac{dV(x)}{(1-|x|^2)^n}.$$

При $p > 1$ пространство Бесова с нормой

$$\|u\|_{\mathscr{B}_p} = |u(0)| + \left(\int_B (1-|x|^2)^p |\nabla u(x)|^p \, d\tau(x) \right)^{1/p}$$

становится банаховым пространством. О голоморфном пространстве Бесова на единичном круге в $\mathbb{C}^n$ см., например, [41] и библиографию там.

Будем говорить, что локально интегрируемая функция f на B *обладает HL-свойством с константой* $c > 0$, если

$$f(a) \le \frac{c}{r^n} \int_{B(a,r)} f(x) \, dV(x) \quad \text{при } \overline{B}(a,r) \subset B.$$

Например, каждая гармоническая функция имеет HL-свойство, когда $c = 1/v_n$ [42]. В [43] Харди и Литтлвуд доказали, что $|u|^p$, $p > 0$, $n = 2$, также обладает HL-свойством, где u — гармоническая на B функция. В случае $n \ge 3$ Феферман и Стейн дали обобщение в [44]. В настоящей работе нам потребуется следующее обобщение результата Фефермана и Стейна (см., например, [45]).

Лемма A. *Пусть f — неотрицательная субгармоническая функция на собственной открытой области $G \subset \mathbb{R}^n$. Тогда существует константа $C(n,p)$, зависящая только от n и p, такая, что*

$$f^p(x) \le \frac{C}{r^n} \int_{B(x,r)} f^p(y) \, dV(y),$$

где $0 < r < d(x, \partial G)$ (расстояние от точки x до границы G), для любого $p > 0$.

Рассмотрим функцию $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Для измеримой комплекснозначной функции f на B определим весовой оператор Харди — Литтлвуда $L_g(f)$, полагая

$$L_g(f)(x) = \int_0^1 f(tx) g(t) \, dt$$

для $x \in B$, если интеграл существует.

Для $g(t) \equiv 1$ и $n = 1$ Харди доказал, что этот специальный оператор ограничен на $\mathscr{L}^p(0,\infty)$, $p > 1$, более того, $\|L_1\|_{\mathscr{L}^p(0,\infty)} = \frac{p}{p-1}$ [3, с. 234]. Ограниченность весового оператора Харди — Литтлвуда на $\mathscr{H}^p(B)$, $\mathscr{H}_{\mathscr{B}^\alpha}(B)$, $\mathscr{H}_{BMO_p}(B)$, $b^p_\omega(B)$ и $\mathscr{D}^p_\alpha(B)$ исследована в [46]. А именно, получены следующие результаты.

Теорема B. *Справедливы следующие утверждения.*

(a) *Пусть* $g \in \mathscr{L}[0,1]$ *и* $a > 0$. *Тогда* L_g *— ограниченный оператор из* $\mathscr{H}_{\mathscr{B}^a}(B)$ *в* $\mathscr{H}_{\mathscr{B}^a}(B)$.

(b) *Пусть* $g \in \mathscr{L}[0,1]$. *Тогда* L_g *— ограниченный оператор из* $\mathscr{H}_{BMO_p}(B)$ *в* $\mathscr{H}_{BMO_p}(B)$.

(c) *Пусть* ω *— весовая функция, невозрастающая по* $r \in (0,1)$, $p \geq 1$, *и* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *— функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_0^1 t^{-n/p}|g(t)|\,dt < \infty.$$

Тогда оператор $L_g : b^p_\omega(B) \to b^p_\omega(B)$ *ограничен.*

(d) *Пусть* $\alpha \geq 0$, $p \geq 1$ *и* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *— функция, удовлетворяющая условиям*

$$\int_0^1 t^{-n/p}|g(t)|\,dt < \infty.$$

Тогда $L_g : \mathscr{D}^p_\alpha(B) \to \mathscr{D}^p_\alpha(B)$ *— ограниченный оператор такой, что*

$$\|L_g\| \leq C \int_0^1 t^{-n/p}|g(t)|\,dt,$$

где $C = C(n,p)$ *— положительная константа.*

(e) *Пусть* $p \geq 1$ *и* $g \in \mathscr{L}[0,1]$. *Тогда* L_g *— ограниченный оператор из* $\mathscr{H}^p(B)$ *в* $\mathscr{H}^p(B)$. *Более того,*

$$\|L_g\|_{\mathscr{H}^p(B)\to\mathscr{H}^p(B)} \leq \int_0^1 |g(t)|\,dt.$$

Данная работа посвящена исследованию компактности оператора L_g. Ее можно рассматривать как продолжение наших исследований, посвященных гармоническим функциям на единичном шаре (см. [11, 18, 20, 21, 36, 46–48]). Работа организована следующим образом.

В разд. 2 доказаны вспомогательные факты, используемые в доказательствах основных результатов работы. В разд. 3 рассмотрена компактность весового оператора Харди — Литтлвуда

$$L_g(f)(x) = \int_0^1 f(tx)g(t)\,dt$$

на пространствах $\mathscr{H}_{\mathscr{B}^a}(B), \mathscr{H}_{BMO_p}(B), \mathscr{H}^p_\beta(B), b^p_\omega(B)$, $\mathscr{D}^p_\alpha(B)$, $\mathscr{B}_p(B)$ и $\mathscr{S}_{p,\gamma}(B)$.

Всюду далее константы обозначаются буквой C, они положительны и могут быть различными в разных ситуациях. Обозначение $a \preceq b$ означает, что существует положительная константа C такая, что $a \leq Cb$. Если одновременно $a \preceq b$ и $b \preceq a$, то пишем $a \asymp b$.

2. Вспомогательные результаты

Некоторые из утверждений следующей леммы, возможно, известны знатокам, однако мы докажем их для удобства читателя.

Лемма 1. *Пусть X — какое-либо из пространств $\mathscr{H}_{\mathscr{B}^a}(B)$, $\mathscr{H}_{BMO_p}(B)$, $b^p_\omega(B)$, $\mathscr{D}^p_\alpha(B)$, $\mathscr{B}_p(B)$, $\mathscr{S}_{p,\gamma}(B)$ или $\mathscr{H}^p(B)$ ($p \ge 1$). Тогда для любого компакта $K \subset B$ найдется положительная константа C_K, не зависящая от функции $u \in X$, такая, что*

$$\sup_{x\in K} |u(x)| \le C_K \|u\|_X.$$

Доказательство. Случай $\mathscr{H}_{\mathscr{B}^a}(B)$. Так как

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(u(tx))\,dt = \int_0^1 \langle \nabla u(tx), x\rangle\,dt, \tag{1}$$

имеем

$$|u(x)| \le |u(0)| + \int_0^1 \frac{(1-|tx|)^a |\nabla u(tx)|}{(1-|tx|)^a} |x|\,dt \le |u(0)| + \|u\|_{\mathscr{B}^a} \int_0^1 \frac{|x|dt}{(1-|tx|)^a}. \tag{2}$$

Из (2) для $a \ne 1$ следует, что

$$|u(x)| \le |u(0)| + \frac{\|u\|_{\mathscr{B}^a}}{a-1}\left(\frac{1}{(1-|x|)^{a-1}} - 1\right), \tag{3}$$

и если $a = 1$, то

$$|u(x)| \le |u(0)| + \|u\|_{\mathscr{B}^1} \ln \frac{1}{1-|x|}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем требуемое, учитывая, что для любого компакта $K \subset B$ найдется $\overline{B(0,r)}$ такой, что $K \subseteq \overline{B(0,r)} \subset B$.

Случай $\mathscr{H}_{BMO_p}(B)$. Вытекает из результата Мурамото, его обобщения из [18] и случая $\mathscr{H}_{\mathscr{B}^1}(B)$.

Случай $b^p_\omega(B)$. Пусть $r > 0$ и $\delta > 0$ выбраны так, что $K \subset \overline{B(0,r)} \subset B$ и $r + \delta < 1$. Поскольку $\overline{B(0,r+\delta)}$ компактно в B, существует $m = \min\limits_{x\in\overline{B(0,r+\delta)}} \omega(x) > 0$. По HL-свойству $|u|^p$, $p \in (0,\infty)$, для любого $x \in K$ имеем

$$|u(x)|^p \le \frac{C}{\delta^n} \int\limits_{B(x,\delta)} |u(y)|^p\,dV(y) \le \frac{C}{m\delta^n} \int\limits_{B(0,r+\delta)} |u(y)|^p \omega(y)\,dV(y) \le \frac{C}{m\delta^n}\|u\|^p_{\omega,p},$$

откуда и получаем требуемое в этом случае.

Случай $\mathscr{D}^p_\alpha(B)$. Используя (1), тот факт, что функция $|\nabla u|$ субгармонична и вследствие этого функция $|\nabla u|^p$ обладает по лемме А HL-свойством, имеем

$$|u(x)| \le |u(0)| + \sup_{y\in B(0,|x|)} |\nabla u(y)| \le |u(0)| \\ + \frac{C_1}{(1-|x|)^{n/p}} \Bigg(\int\limits_{y\in B(0,(1+|x|)/2)} |\nabla u(y)|^p\,dV(y)\Bigg)^{1/p}$$

$$\le |u(0)| + \frac{C_2}{(1-|x|)^{\frac{n+\alpha}{p}}} \Bigg(\int\limits_{y\in B(0,(1+|x|)/2)} |\nabla u(y)|^p (1-|y|)^\alpha \, dV(y) \Bigg)^{1/p} \le \frac{C_3 \|u\|_{\mathscr{D}^p_\alpha}}{(1-|x|)^{\frac{n+\alpha}{p}}}.$$

Отсюда и из того, что $K \subset \overline{B(0,r)} \subset B$ для некоторого $r \in (0,1)$, приходим к следующему результату.

Случай $\mathscr{B}_p(B)$. Доказательство аналогично доказательству в случае $\mathscr{D}^p_\alpha(B)$, поэтому мы его опускаем. Заметим только, что получена оценка

$$|u(x)| \le |u(0)| + C \frac{\|u\|_{\mathscr{B}_p}}{1-|x|}.$$

Случай $\mathscr{S}_{p,\gamma}(B)$. Как и в случае $\mathscr{D}^p_\alpha(B)$, имеем

$$\begin{aligned} |u(x)| &\le |u(0)| + \sup_{y\in B(0,|x|)} |\nabla u(y)| \\ &\le |u(0)| + \frac{C_1}{(1-|x|)^{n/2}} \Bigg(\int\limits_{y\in B(0,(1+|x|)/2)} |\nabla u(y)|^2 \, dV(y) \Bigg)^{1/2} \\ &= |u(0)| + \frac{C_1}{(1-|x|)^{n/2}} \mathscr{A}((1+|x|)/2, u)^{1/2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Ввиду (5) и неравенства

$$(x+y)^p \le c_p(x^p + y^p), \quad x, y \ge 0, \tag{6}$$

где $c_p = 1$, если $p \in (0,1]$, и $c_p = 2^{p-1}$ при $p > 1$, получаем

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &\le c_p \left(|u(0)|^p + \frac{C_1^p}{(1-|x|)^{np/2}} \mathscr{A}((1+|x|)/2, u)^{p/2} \right) \\ &\le c_3 |u(0)|^p + \frac{c_4}{(1-|x|)^{np/2+1+\gamma}} \mathscr{A}((1+|x|)/2, u)^{p/2} \int\limits_{(1+|x|)/2}^{1} (1-r)^\gamma \, dr \\ &\le c_3 |u(0)|^p + \frac{c_5}{(1-|x|)^{np/2+\gamma+1}} \int\limits_{(1+|x|)/2}^{1} (1-r)^\gamma \mathscr{A}(r,u)^{p/2} \, dr \\ &\le c_3 |u(0)|^p + \frac{c_5}{(1-|x|)^{np/2+\gamma+1}} \|u\|^p_{\mathscr{S}_{p,\gamma}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Неравенство (7) вместе с включением $K \subset \overline{B(0,r)} \subset B$ для некоторого $r \in (0,1)$ приводит к требуемому.

Случай $\mathscr{H}^p_\beta(B)$. Так как $|u|$ субгармонична, для любого $p \ge 1$ функция $|u|^p$ обладает HL-свойством, более того, она также субгармонична.

Пусть сначала $|x| > 1/3$. Применяя лемму A к шару $B\big(x, \frac{1-|x|}{2}\big)$, выводим, что найдется положительная константа C, не зависящая от u, такая, что

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &\le \frac{2^n C}{(1-|x|)^n} \int\limits_{B\left(x, \frac{1-|x|}{2}\right)} |u(y)|^p \, dV(y) \\ &\le \frac{2^n C}{(1-|x|)^n} \int\limits_{P\left(0, \frac{3|x|-1}{2}, \frac{|x|+1}{2}\right)} |u(y)|^p \, dV(y), \end{aligned} \tag{8}$$

где $P\bigl(0, \frac{3|x|-1}{2}, \frac{|x|+1}{2}\bigr)$ — кольцо с центром в начале и радиусами $\frac{3|x|-1}{2}$ и $\frac{|x|+1}{2}$.

Из (8), используя полярные координаты, монотонность интегрального среднего $M_p(u,r)$ и определение пространства $\mathscr{H}^p_\beta(B)$, имеем

$$|u(x)|^p \le \frac{2^n C}{(1-|x|)^n} \int\limits_{\frac{3|x|-1}{2}}^{\frac{|x|+1}{2}} r^{n-1} \int\limits_S |u(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)\, dr$$

$$\le \frac{2^n C M_p^p((1+|x|)/2, u)}{(1-|x|)^n} \int\limits_{\frac{3|x|-1}{2}}^{\frac{|x|+1}{2}} r^{n-1}\, dr$$

$$\le \frac{2^n C_1 M_p^p((1+|x|)/2, u)}{(1-|x|)^{n+p\beta-1}} \left(1 - \frac{1+|x|}{2}\right)^{p\beta} \le C_1 \frac{\|u\|^p_{\mathscr{H}^p_\beta}}{(1-|x|)^{n+p\beta-1}}. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь $|x| \le 1/3$. Ввиду HL-свойства функции $|u|^p$ будет

$$|u(x)|^p \le 3^n C \int\limits_{B(0,2/3)} |u(y)|^p\, dV(y)$$

для любого $x \in \overline{B(0,1/3)}$. Отсюда

$$|u(x)|^p \le 3^n C V(B(0,2/3)) M_p^p(2/3, u) \le C v_n 2^n 3^{p\beta} \frac{\|u\|^p_{\mathscr{H}^p_\beta}}{(1-|x|)^{n+p\beta-1}}. \quad (10)$$

Согласно (9) и (10) существует положительная константа C_3, не зависящая от u, такая, что

$$|u(x)|^p \le C_3 \frac{\|u\|^p_{\mathscr{H}^p}}{(1-|x|)^{n+p\beta-1}}.$$

Отсюда и из включения $K \subset \overline{B(0,r)} \subset B$ при некотором $r \in (0,1)$ получаем требуемое. $\square$

Из доказательства леммы 1 можно извлечь

Следствие 1. *Справедливы следующие утверждения.*

(a) *Если $u \in \mathscr{H}_{\mathscr{B}^\alpha}(B)$, то найдется положительная константа C, не зависящая от u и x, такая, что*

$$|u(x)| \le \begin{cases} C\|u\|_{\mathscr{B}^\alpha}, & 0 \le \alpha < 1, \\ C\|u\|_{\mathscr{B}^\alpha} \log \frac{2}{1-|x|}, & \alpha = 1, \\ C(1-|x|)^{1-\alpha}\|u\|_{\mathscr{B}^\alpha}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

(b) *Если $u \in \mathscr{H}_{BMO_p}(B)$, то найдется положительная константа C, не зависящая от u и x, такая, что*

$$|u(x)| \le C\|u\|_{BMO_p} \log \frac{2}{1-|x|}.$$

(c) *Если $u \in b^p_\alpha(B)$, то найдется положительная константа C, не зависящая от u и x, такая, что*

$$|u(x)| \le C \frac{\|u\|_{b^p_\alpha}}{(1-|x|)^{\frac{n+\alpha}{p}}}.$$

(d) *Если $u \in \mathscr{D}^p_\alpha(B)$, то найдется положительная константа C, не зависящая от u и x, такая, что*

$$|u(x)| \le C \frac{\|u\|_{\mathscr{D}^p_\alpha}}{(1-|x|)^{\frac{n+\alpha}{p}}}.$$

(e) *Если $u \in \mathscr{B}_p(B)$, то найдется положительная константа C, не зависящая от u и x, такая, что*

$$|u(x)| \le C \frac{\|u\|_{\mathscr{B}_p}}{1-|x|}.$$

(f) *Если $u \in \mathscr{S}_{p,\gamma}(B)$, то найдется положительная константа C, не зависящая от u и x, такая, что*

$$|u(x)| \le C \frac{\|u\|_{\mathscr{S}_{p,\gamma}}}{(1-|x|)^{\frac{n}{2}+\frac{\gamma+1}{p}}}.$$

(g) *Если $u \in \mathscr{H}^p_\beta(B)$, то найдется положительная константа C, не зависящая от u и x, такая, что*

$$|u(x)| \le C \frac{\|u\|_{\mathscr{H}^p_\beta}}{(1-|x|)^{\frac{n+p\beta-1}{p}}}.$$

Замечание 1. Если $a \in (0,1)$, то из (3) вытекает, что каждая функция из $\mathscr{B}^a$ ограничена. Отметим также, что мы не использовали гармоничность функции u в случае $\mathscr{H}_{\mathscr{B}^a}(B)$ доказательства леммы 1.

Лемма 2. *Пусть X — одно из пространств в лемме 1 и $T : X \to X$ — оператор, непрерывный в топологии равномерной сходимости на компактах. Тогда T компактен в том и только в том случае, если для любой ограниченной последовательности $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в X, сходящейся к 0 равномерно на компактах в B, имеет место $\lim\limits_{k\to\infty} \|Tu_k\|_X = 0$.*

Доказательство. Пусть T компактен и $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность в X такая, что $\|u_k\|_X \le M$, $k \in \mathbb{N}$, и $u_k \to 0$ равномерно на компактах в B при $k \to \infty$. Допустим, что существует подпоследовательность $(u_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$, для которой $\|Tu_{k_l}\|_X \ge \delta > 0$ для любого $l \in \mathbb{N}$ и некоторого $\delta > 0$. Из компактности T вытекает, что найдутся подпоследовательность u_{k_l} (которую будем обозначать также через u_{k_l}) и $u \in X$ такие, что $\|Tu_{k_l} - u\|_X \to 0$ при $l \to \infty$. По лемме 1 получаем, что для любого $r \in (0,1)$ существует константа C_r, зависящая от r, такая, что

$$|(Tu_{k_l} - u)(x)| \le C_r \|Tu_{k_l} - u\|_X \quad \text{для любого } x \in \overline{B(0,r)}.$$

Поэтому $Tu_{k_l} - u \to 0$ на компактах. Поскольку из сходимости $u_{k_l} \to 0$ на компактах следует сходимость $Tu_{k_l} \to 0$ на компактах, имеем $u \equiv 0$ и тем самым $\lim\limits_{l\to\infty} \|Tu_{k_l}\|_X = 0$; противоречие.

Обратно, пусть $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность такая, что $\|u_k\|_X \le M$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда по лемме 1 $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ равномерно ограничена на компактных подмножествах в B и тем самым нормальна. Поэтому можно извлечь подпоследовательность $(u_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$, сходящуюся равномерно на компактных подмножествах в B к некоторому $u \in \mathscr{H}(B)$. Отсюда и из неравенства Коши (см., например, [1]) вытекает, что ∇u_{k_l} сходится на компактах из B к ∇u. Поэтому если $X = \mathscr{B}^\alpha$, то для любого $x \in B$ будет

$$\lim_{l\to\infty} (1 - |x|)^\alpha |\nabla u_{k_l}(x)| = (1 - |x|)^\alpha |\nabla u(x)| \le M,$$

значит, $u \in \mathscr{B}^\alpha$. В других случаях по лемме Фату имеем $u \in b^p_\omega$ (соответственно $u \in \mathscr{D}^p_\alpha$, или $u \in \mathscr{B}_p$, или $u \in \mathscr{S}_{p,\gamma}$, или $u \in \mathscr{H}^p_\beta$), так что во всех случаях $u \in X$. Тем самым последовательность $(u_{k_l} - u)_{l\in\mathbb{N}}$ такова, что $\sup\limits_{l\in\mathbb{N}} \|u_{k_l} - u\|_X \le 2M < \infty$, и сходится к 0 на компактных подмножествах в B при $l \to \infty$. Из предположений вытекает, что $Tu_{k_l} \to Tu$ в X при $l \to \infty$. Отсюда шар $\mathscr{K}_X(0, M)$ — относительно компактное подмножество в X. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $g \in \mathscr{L}[0,1]$. Тогда оператор L_g непрерывен в топологии равномерной сходимости на компактах.*

Доказательство. Пусть последовательность $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к нулю на компактах. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in \overline{B(0,r)}$, где $r \in (0,1)$, найдется $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $|f_k(x)| < \varepsilon$ для всех $k \ge k_0$. Поэтому для любых $x \in \overline{B(0,r)}$ и $k \ge k_0$ имеем

$$|L_g(f_k)(x)| \le \int_0^1 |f_k(tx)g(t)|\,dt \le \sup_{x\in\overline{B(0,r)}} |f_k(x)| \int_0^1 |g(t)|\,dt < \varepsilon \int_0^1 |g(t)|\,dt,$$

что и требовалось.

3. Компактность оператора L_g

В этом разделе сформулируем и докажем основной результат статьи. Мы дадим некоторые достаточные условия, гарантирующие компактность оператора L_g в указанных выше пространствах гармонических функций.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

(a) *Пусть $g \in \mathscr{L}[0,1]$ и $a > 0$. Тогда оператор L_g компактен из $\mathscr{H}_{\mathscr{B}^a}(B)$ в $\mathscr{H}_{\mathscr{B}^a(B)}$.*

(b) *Пусть $g \in \mathscr{L}[0,1]$. Тогда L_g — компактный оператор из $\mathscr{H}_{BMO_p}(B)$ в $\mathscr{H}_{BMO_p}(B)$.*

(c) *Пусть ω — вес, невозрастающий по $r \in (0,1)$, $p \ge 1$, и $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_0^1 t^{-n/p} |g(t)|\,dt < \infty.$$

Тогда оператор $L_g : b^p_\omega(B) \to b^p_\omega(B)$ компактен.

(d) *Пусть $\alpha \ge 0$, $1 \le p \le n$, и $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_0^1 t^{1-n/p} |g(t)|\,dt < \infty.$$

Тогда оператор $L_g : \mathscr{D}^p_\alpha(B) \to \mathscr{D}^p_\alpha(B)$ компактен.

(e) *Пусть $n \geq p \geq 2(n-1)$ и $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_0^1 t^{1-n/p} |g(t)|\, dt < \infty.$$

Тогда оператор $L_g : \mathscr{B}_p(B) \to \mathscr{B}_p(B)$ компактен.

(f) *Пусть $p \geq 1$, $n \geq 2$ и $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_0^1 t^{1-n/2} |g(t)|\, dt < \infty.$$

Тогда оператор $L_g : \mathscr{S}_{p,\gamma}(B) \to \mathscr{S}_{p,\gamma}(B)$ компактен.

(g) *Пусть $p \geq 1$ и $g \in \mathscr{L}[0,1]$. Тогда L_g — компактный оператор из $\mathscr{H}^p_\beta(B)$ в $\mathscr{H}^p_\beta(B)$.*

Доказательство. Отметим, что во всех случаях интеграл от g по промежутку $[0,1]$ конечен, так что по лемме 3 оператор L_g непрерывен в топологии равномерной сходимости на компактах.

(a) Пусть $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность в $\mathscr{H}_{\mathscr{B}^a(B)}$, сходящаяся к 0 равномерно на компактах в B при $k \to \infty$.

Заметим сначала, что

$$L_g(u_k)(0) = u_k(0) \int_0^1 g(t)\, dt$$

и, следовательно,

$$|L_g(u_k)(0)| \leq |u_k(0)| \int_0^1 |g(t)|\, dt \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Поэтому можно считать, что $u_k(0) = 0$ для каждого $k \in \mathbb{N}$.

Для любых $\varepsilon > 0$ и $r \in (0,1)$ найдется $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $k \geq k_0$ будет $|u_k(x)| < \varepsilon$ при $x \in \overline{B(0,r)}$. Отсюда

$$\begin{aligned}\|L_g(u_k)\|_{\mathscr{B}^a} &= \sup_{x\in B}(1-|x|)^a \left| \int_0^1 \langle \nabla u_k(tx), t\rangle g(t)\, dt \right| \\ &\leq \sup_{x\in B}(1-|x|)^a \sup_{x\in B} |\nabla u_k(r_0 x)| \int_0^1 |g(t)|\, dt + \|u_k\|_{\mathscr{B}^a} \int_{r_0}^1 |g(t)|\, dt.\end{aligned}$$

Выберем $r_0 \in (0,1)$ так, что

$$\int_{r_0}^1 |g(t)|\, dt < \varepsilon$$

(это возможно, ибо $g \in \mathscr{L}[0,1]$). Ввиду неравенства Коши существует константа C, не зависящая от u, такая, что

$$|\nabla u(x)| \leq C \sup_{B(0,(1+r_0)/2)} |u(x)| \quad \text{для любого } x \in B(0,r_0).$$

С другой стороны, в силу равномерной сходимости последовательности $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ на компактах в B найдется $k_1 \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\max_{x\in\overline{B(0,(1+r_0)/2)}} |u_k(x)| < \varepsilon \quad \text{для любого } k \geq k_1.$$

Из вышеизложенного ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к требуемому.

(b) Это утверждение вытекает из результатов [15, 18] и доказанного в (a).

(c) Пусть $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность в $b^p_\omega(B)$, сходящаяся к 0 равномерно на компактах из B при $k \to \infty$.

Используя неравенство Минковского, монотонность веса ω и замену переменных $tx \to x$, получаем

$$\begin{aligned}
\|L_g(u_k)\|_{b^p_\omega(B)} &= \Bigg(\int\limits_B |L_g(u_k)(x)|^p \omega(x)\, dV(x)\Bigg)^{1/p} \\
&\leq \int\limits_0^1 \Bigg(\int\limits_B |u_k(tx)|^p \omega(x)\, dV(x)\Bigg)^{1/p} |g(t)|\, dt \\
&\leq \int\limits_0^1 \Bigg(\int\limits_B |u_k(tx)|^p \omega(tx)\, dV(x)\Bigg)^{1/p} |g(t)|\, dt \\
&= \int\limits_0^1 \Bigg(\int\limits_{tB} |u_k(x)|^p \omega(x)\, dV(x)\Bigg)^{1/p} t^{-n/p}|g(t)|\, dt \\
&= \int\limits_0^{r_0} \Bigg(\int\limits_{tB} |u_k(x)|^p \omega(x)\, dV(x)\Bigg)^{1/p} t^{-n/p}|g(t)|\, dt \\
&\quad + \int\limits_{r_0}^1 \Bigg(\int\limits_{tB} |u_k(x)|^p \omega(x)\, dV(x)\Bigg)^{1/p} t^{-n/p}|g(t)|\, dt \\
&\leq C \sup_{x\in r_0B} |u_k(x)| \sup_{x\in r_0B} \omega(x) \int\limits_0^{r_0} t^{-n/p}|g(t)|\, dt + \|u_k\|_{b^p_\omega(B)} \int\limits_{r_0}^1 t^{-n/p}|g(t)|\, dt.
\end{aligned}$$

Так как интеграл $\int\limits_0^1 t^{-n/p}|g(t)|\, dt$ сходится, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r_0 \in (0,1)$ такое, что

$$\int\limits_{r_0}^1 t^{-n/p}|g(t)|\, dt < \varepsilon.$$

С другой стороны, для так выбранных ε и r_0 существует $k_0 \in \mathbb{N}$, для которого $\sup\limits_{x\in\overline{B(0,r_0)}} |u_k(x)| < \varepsilon$ при любом $k \geq k_0$. Отсюда для каждого $k \geq k_0$ будет

$$\|L_g(u_k)\|_{b^p_\omega(B)} < \varepsilon \Bigg(C \int\limits_0^{r_0} t^{-n/p}|g(t)|\, dt + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{b^p_\omega(B)}\Bigg),$$

следовательно, оператор L_g компактен на $b^p_\omega(B)$.

(d) Пусть $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — ограниченная в $\mathscr{D}^p_\alpha(B)$ последовательность, сходящаяся к 0 равномерно на компактах в B. Как и при доказательстве п. (a), имеем

$$|L_g(u_k)(0)| \le |u_k(0)| \int_0^1 |g(t)|\,dt \le |u_k(0)| \int_0^1 t^{1-n/p}|g(t)|\,dt \to 0 \quad \text{при } k\to\infty.$$

Поэтому можно считать, что $u_k(0)=0$ для любого $k\in\mathbb{N}$.

Используя неравенство Минковского, условие $\alpha\ge 0$ и замену переменных $tx\to x$, имеем

$$\begin{aligned}
\|L_g(u_k)\|_{\mathscr{D}^p_\alpha(B)} &= \Bigg(\int_B |\nabla L_g(u_k)(x)|^p(1-|x|)^\alpha\,dV(x)\Bigg)^{1/p}\\
&= \Bigg(\int_B \bigg|\nabla \int_0^1 u_k(xt)g(t)\,dt\bigg|^p (1-|x|)^\alpha\,dV(x)\Bigg)^{1/p}\\
&\le \Bigg(\int_B \bigg|\int_0^1 |\nabla u_k(xt)|tg(t)\,dt\bigg|^p (1-|x|)^\alpha\,dV(x)\Bigg)^{1/p}\\
&\le \int_0^1 \Bigg(\int_B |\nabla u_k(xt)|^p(1-|x|)^\alpha\,dV(x)\Bigg)^{1/p} t|g(t)|\,dt\\
&\le \int_0^1 \Bigg(\int_B |\nabla u_k(xt)|^p(1-|tx|)^\alpha\,dV(x)\Bigg)^{1/p} t|g(t)|\,dt\\
&= \int_0^1 \Bigg(\int_{tB} |\nabla u_k(x)|^p(1-|x|)^\alpha\,dV(x)\Bigg)^{1/p} t^{1-n/p}|g(t)|\,dt\\
&= \int_0^{r_0} \Bigg(\int_{tB} |\nabla u_k(x)|^p(1-|x|)^\alpha\,dV(x)\Bigg)^{1/p} t^{1-n/p}|g(t)|\,dt\\
&+ \int_{r_0}^1 \Bigg(\int_{tB} |\nabla u_k(x)|^p(1-|x|)^\alpha\,dV(x)\Bigg)^{1/p} t^{1-n/p}|g(t)|\,dt\\
&\le C\sup_{x\in r_0B}|\nabla u_k(x)| \int_0^{r_0} t^{1-n/p}|g(t)|\,dt + \|u_k\|_{b^p_\omega(B)}\int_{r_0}^1 t^{1-n/p}|g(t)|\,dt.
\end{aligned}$$

Из сходимости интеграла $\int_0^1 t^{1-n/p}|g(t)|\,dt$ вытекает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $r_0\in(0,1)$ такое, что

$$\int_{r_0}^1 t^{1-n/p}|g(t)|\,dt<\varepsilon.$$

С другой стороны, для так выбранных ε и r_0 существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\sup\limits_{x\in\overline{B(0,r_0)}} |u_k(x)| < \varepsilon$ при каждом $k \geq k_0$. Отсюда для любого $k \geq k_0$ вытекает, что

$$\|L_g(u_k)\|_{\mathscr{D}^p_\alpha(B)} < \varepsilon \left(C \int\limits_0^{r_0} t^{1-n/p}|g(t)|\,dt + \sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{\mathscr{D}^p_\alpha(B)} \right),$$

откуда получаем, что L_g — компактный оператор на $\mathscr{D}^p_\alpha(B)$.

(e) Доказательство аналогично таковому для п. (d) и опускается.

(f) Пусть $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность в $\mathscr{S}_{p,\gamma}(B)$, сходящаяся к 0 равномерно на компактах в B при $k \to \infty$. Используя условие $\int\limits_0^1 t^{1-n/2}|g(t)|\,dt < \infty$, аналогично п. (d) можно доказать, что общий случай может быть сведен к случаю $u_k(0) = 0$ для каждого $k \in \mathbb{N}$.

Применяя дважды неравенство Минковского, некоторые простые неравенства и замену переменных $tx \to x$, имеем

$$\begin{aligned}
\|L_g(u_k)\|_{\mathscr{S}_{p,\gamma}(B)} &= \left(\int\limits_0^1 A(r, L_g(u_k))^{p/2}(1-r)^\gamma\,dr \right)^{1/p} \\
&= \left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{rB} \left| \nabla \int\limits_0^1 u_k(xt)g(t)\,dt \right|^2 dV(x) \right)^{p/2} (1-r)^\gamma\,dr \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{rB} \left(\int\limits_0^1 |\nabla u_k(xt)|t|g(t)|\,dt \right)^2 dV(x) \right)^{p/2} (1-r)^\gamma\,dr \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{rB} |\nabla u_k(xt)|^2\,dV(x) \right)^{1/2} t|g(t)|\,dt \right)^p (1-r)^\gamma\,dr \right)^{1/p} \\
&\leq \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{rB} |\nabla u_k(xt)|^2\,dV(x) \right)^{p/2} (1-r)^\gamma\,dr \right)^{1/p} t|g(t)|\,dt \\
&= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{trB} |\nabla u_k(y)|^2 \frac{dV(y)}{t^n} \right)^{p/2} (1-r)^\gamma\,dr \right)^{1/p} t|g(t)|\,dt \\
&\leq \sup_{|x|\leq t_0} |u_k(x)| \int\limits_0^{r_0} t^{1-n/2}|g(t)|\,dt + \|u_n\|_{\mathscr{S}_{p,\gamma}(B)} \int\limits_{r_0}^1 t^{1-n/2}|g(t)|\,dt.
\end{aligned}$$

Из сходимости интеграла $\int\limits_0^1 t^{1-n/2}|g(t)|\,dt$ следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $r_0 \in (0,1)$ такое, что $\int\limits_{r_0}^1 t^{1-n/2}|g(t)|\,dt < \varepsilon$. С другой стороны, для так выбранных ε и r_0 существует $k_0 \in \mathbb{N}$, для которого $\sup\limits_{x\in\overline{B(0,r_0)}} |u_k(x)| < \varepsilon$ при каждом $k \geq k_0$. Отсюда для любого $k \geq k_0$ вытекает, что

$$\|L_g(u_k)\|_{\mathscr{S}_{p,\gamma}(B)} < \varepsilon \left(\int\limits_0^{r_0} t^{1-n/2} |g(t)|\, dt + \sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{\mathscr{S}_{p,\gamma}(B)} \right),$$

следовательно, оператор L_g компактен на $\mathscr{S}_{p,\gamma}(B)$.

(g) Пусть $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность в $\mathscr{H}^p_\beta(B)$, сходящаяся к 0 равномерно на компактах в B при $k \to \infty$. Используя неравенство Минковского и монотонность интегральных средних $M_p(u,r)$ при $p \geq 1$, имеем

$$\|L_g(u_k)\|_{\mathscr{H}^p_\beta(B)} = \sup_{0\leq r<1} (1-r)^\beta \left(\int\limits_S |L_g(u_k)(r\zeta)|^p d\sigma_N(\zeta) \right)^{1/p}$$

$$\leq \sup_{0\leq r<1} (1-r)^\beta \int\limits_0^1 \left(\int\limits_S |u_k(rt\zeta)|^p |g(t)|^p d\sigma_N(\zeta) \right)^{1/p} dt$$

$$= \sup_{0\leq r<1} (1-r)^\beta \left(\int\limits_0^{r_0} + \int\limits_{r_0}^1 \right) \left(\int\limits_S |u_k(rt\zeta)|^p d\sigma_N(\zeta) \right)^{1/p} |g(t)|\, dt$$

$$\leq \sup_{x\in r_0 B} (1-r)^\beta |u_k(x)| \int\limits_0^{r_0} |g(t)|\, dt + \|u_k\|_{\mathscr{H}^p_\beta(B)} \int\limits_{r_0}^1 |g(t)|\, dt.$$

Ввиду сходимости интеграла $\int\limits_0^1 |g(t)|\, dt$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r_0 \in (0,1)$ такое, что $\int\limits_{r_0}^1 |g(t)|\, dt < \varepsilon$. Для так выбранных ε и r_0 найдется $k_2 \in \mathbb{N}$ такое, что $\sup\limits_{x\in\overline{B(0,r_0)}} |u_k(x)| < \varepsilon$ для каждого $k \geq k_2$. Отсюда для любого $k \geq k_2$ получаем

$$\|L_g(u_k)\|_{\mathscr{H}^p_\beta(B)} < \varepsilon \left(\int\limits_0^{r_0} |g(t)|\, dt + \sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|_{\mathscr{H}^p_\beta(B)} \right),$$

так что оператор L_g компактен на $\mathscr{H}^p_\beta(B)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Axler S., Bourdon P., Ramey W.* Harmonic function theory. New York: Springer-Verl., 1992.
2. *Helms L. L.* Introduction to potential theory. New York; London; Sydney; Toronto: Wiley-Interscience, 1969.
3. *Duren P. L.* Theory of H^p spaces. New York: Acad. Press, 1970.
4. *Anderson J. M., Clunie J., Pommerenke Ch.* On Bloch functions and normal functions // J. Reine Angew. Math. 1974. V. 270. P. 12–37.
5. *Holland F., Walsh D.* Criteria for membership of Bloch space and its subspace, BMOA // Math. Ann. 1986. V. 273. P. 317–335.
6. *Mathews J. H.* Coefficients of uniformly normal-Bloch functions // Yokohama Math. J. 1973. V. 21. P. 27–31.
7. *Yamashita S.* Gap series and α-Bloch functions // Yokohama Math. J. 1980. V. 28. P. 31–36.
8. *Ли Сунсяо* Дробные производные функций типа Блоха // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 394–402.

9. *Nowak M.* Bloch space and Möbius invariant Besov spaces on the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // Complex Variables. Theory Appl. 2001. V. 44, N 1. P. 1–12.
10. *Ren G., Tu C.* Bloch space in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // Proc. Amer. Math. Soc. 2005. V. 133, N 3. P. 719–726.
11. *Stević S.* Harmonic Bloch and Besov spaces in the unit ball // Ars. Comb. (to appear).
12. *Timoney R. M.* Bloch functions in several complex variables. I // Bull. London Math. Soc. 1980. V. 12. P. 241–267.
13. *Ren G., Kähler U.* Weighted Hölder continuity of hyperbolic harmonic Bloch functions // Z. Anal. Anwendungen. 2002. Bd 21, Heft 3. S. 599–610.
14. *Stević S.* On Bloch hyperharmonic functions // Ann. Math. Sil. 2002. V. 16. P. 57–64.
15. *Muramoto K.* Harmonic Bloch and BMO functions on the unit ball in several variables // Tokyo J. Math. 1988. V. 11, N 2. P. 381–386.
16. *Coifman R. R., Rochberg R., Weiss G.* Factorization theorems for Hardy spaces in several complex variables // Ann. of Math. 1976. V. 103. P. 611–635.
17. *Gotoh Y.* On BMO functions on Riemann surface // J. Math. Kyoto Univ. 1985. V. 25. P. 331–339.
18. *Stević S.* An equivalent norm on BMO spaces // Acta Sci. Math. 2000. V. 66. P. 553–563.
19. *Hayman W.* Multivalent functions. London: Cambridge Univ. Press, 1958.
20. *Stević S.* On harmonic Hardy and Bergman spaces // J. Math. Soc. Japan. 2002. V. 54, N 4. P. 983–996.
21. *Stević S.* On harmonic Hardy spaces and area integrals // J. Math. Soc. Japan. 2004. V. 56, N 2. P. 339–347.
22. *Yamashita S.* Holomorphic functions and area integrals // Boll. Unione Mat. Ital., Ser. A. Mat. Soc. Cult. (8). 1982. V. 6, N 1. P. 115–120.
23. *Yamashita S.* Criteria for functions to be of Hardy class H^p // Proc. Amer. Math. Soc. 1979. V. 75. P. 69–72.
24. *Holland F., Twomey J. B.* On Hardy classes and the area function // J. London Math. Soc. 1978. V. 17. P. 275–283.
25. *Flett T. M.* Inequalities for the pth mean values of harmonic and subharmonic functions with $p \leq 1$ // Proc. London Math. Soc. 1970. V. 20. P. 249–275.
26. *Flett T. M.* The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities // J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 38. P. 746–765.
27. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. II // Math. Z. 1931. V. 34. P. 483–439.
28. *Hu Z.* Estimates for the integral mean of harmonic functions on bounded domains in $\mathbb{R}^n$ // Sci. China Ser. A. 1995. V. 38, N 1. P. 36–46.
29. *Kriete T. L., MacCluer B. D.* Composition operators on large weighted Bergman spaces // Indiana Univ. Math. J. 1992. V. 41. P. 755–788.
30. *Lin P., Rochberg R.* Hankel operators on the weighted Bergman spaces with exponential weights // Integral Equations Operator Theory. 1995. V. 21. P. 460–483.
31. *Ouyang C., Yang W., Zhao R.* Characterizations of Bergman spaces and Bloch space in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1995. V. 347. P. 4301–4313.
32. *Ren G., Kähler U.* Hardy-Littlewood inequalities and Q_p-spaces // Z. Anal. Anwendungen. 2005. V. 24, N 2. P. 375–388.
33. *Shi J. H.* Inequalities for the integral means of holomorphic functions and their derivatives in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V. 328, N 2. P. 619–637.
34. *Siskakis A.* Weighted integrals of analytic functions // Acta Sci. Math. 2000. V. 66. P. 651–664.
35. *Stević S.* On an area inequality and weighted integrals of analytic functions // Result. Math. 2002. V. 41. P. 386–393.
36. *Stević S.* Weighted integrals of harmonic functions // Studia Sci. Math. Hungar. 2002. V. 39. P. 87–96.
37. *Stević S.* Weighted integrals of holomorphic functions in $\mathbb{C}^n$ // Complex Variables. Theory Appl.. 2002. V. 47, N 9. P. 821–838.
38. *Stević S.* Composition operators on the generalized Bergman space // J. Indian Math. Soc. 2002. V. 69. P. 61–64.
39. *Stević S.* Weighted integrals of holomorphic functions on the polydisk // Z. Anal. Anwendungen. 2004. Bd 23, Heft 3. S. 577–587.
40. *Stević S.* Weighted integrals of holomorphic functions on the unit polydisk. II // Z. Anal. Anwendungen. 2004. Bd 23, Heft 4. S. 775–782.

41. *Li S., Wulan H.* Besov space on the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // Indian J. Math. 2006. V. 48, N 2. P. 177–186.
42. *Hayman W., Kennedy P. B.* Subharmonic functions. London; New York; San Francisco: Acad. Press, 1976. V. I.
43. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of conjugate functions // J. Reine Angew. Math. 1931. V. 167. P. 405–423.
44. *Fefferman C., Stein E. M.* H^p spaces of several variables // Acta Math. 1972. V. 129. P. 137–193.
45. *Riihentaus J.* On a theorem of Avanisian–Arsove // Exposition. Math. 1989. V. 7. P. 68–72.
46. *Stević S.* On harmonic function spaces // J. Math. Soc. Japan. 2005. V. 57, N 3. P. 781–802.
47. *Stević S.* A Littlewood–Paley type inequality // Bol. Soc. Brasil. Math. 2003. V. 34, N 2. P. 211–217.
48. *Stević S.* Area type inequalities and integral means of harmonic functions on the unit ball // J. Math. Soc. Japan. 2007. V. 59, N 2. P. 583–601.

Статья поступила 22 февраля 2007 г.

Stevo Stević (Стевич Стево)
Mathematical Institute of the Serbian Academy of Science,
Knez Mihailova 36/III, 11000 Beograd, Serbia
`sstevic@ptt.rs`