Сибирский математический журнал
Июль—август, 2005. Том 46, № 4

УДК 517.54

О ЖОРДАНОВЫХ САМОПОДОБНЫХ ДУГАХ, ДОПУСКАЮЩИХ СТРУКТУРНУЮ ПАРАМЕТРИЗАЦИЮ

В. В. Асеев, А. В. Тетенов

Аннотация: Изучаются аттракторы γ конечной системы $\mathscr{S}$ сжимающих подобий S_j $(j = 1, \dots, m)$ в $\mathbb{R}^d$, являющиеся жордановыми дугами. Доказывается, что в случае, когда система $\mathscr{S}$ обладает структурной параметризацией $(\mathscr{T}, \varphi)$, а $\mathscr{F}(\mathscr{T})$ — ассоциированное семейство системы $\mathscr{T}$, имеет место одна из следующих возможностей.

1. Тождественное отображение Id не принадлежит замыканию ассоциированного семейства $\mathscr{F}(\mathscr{T})$. Тогда система $\mathscr{S}$ (при надлежащем переупорядочении) является жордановым циппером.

2. Тождественное отображение Id является предельной точкой для семейства $\mathscr{F}(\mathscr{T})$. Тогда дуга γ есть отрезок прямой.

3. Тождественное отображение Id является изолированной точкой в семействе $\overline{\mathscr{F}(\mathscr{T})}$.

Построен пример жордановой самоподобной кривой, реализующей п. 3.

Ключевые слова: аттрактор, самоподобный фрактал, жорданова дуга, мера Хаусдорфа, хаусдорфова размерность, размерность подобия.

В статье [1] Бандтом и Графом доказана теорема, устанавливающая условия, при которых инвариантное множество K системы $\mathscr{S}$ сжимающих подобий в $\mathbb{R}^d$ имеет положительную меру. Эти условия формулируются в терминах ассоциированного семейства подобий $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ системы $\mathscr{S}$. В основной теореме этой статьи [1, с. 996] утверждается, что инвариантное множество $K(\mathscr{S})$ системы $\mathscr{S}$ имеет положительную меру тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Id} \notin \overline{\mathscr{F}(\mathscr{S})}. \tag{1}$$

Есть примеры, показывающие, что это условие не сводится к дискретности группы, порожденной системой $\mathscr{S}$. Стремясь глубже понять скрытую в условии (1) информацию, мы рассматриваем самоподобные жордановы дуги в $\mathbb{R}^d$ и даем их классификацию в терминах ассоциированного семейства $\mathscr{F}(\mathscr{S})$.

Важным классом самоподобных жордановых дуг являются аттракторы специальных систем сжимающих подобий, которые называютсяципперами (см. [2, 3] и п. 1.2 настоящей статьи). В статье [4] приведены необходимые условия для того, чтобы аттрактор циппера $\mathscr{S}$ являлся жордановой дугой.

Основной результат настоящей работы — теорема 2.1 — формулируется в § 2 и дает ответ на вопрос: при каких условиях система сжимающих подобий $\mathscr{S}$, аттрактор которой — самоподобная жорданова дуга γ, является циппером?

Работа выполнена при финансовой поддержке научной программы «Университеты России» (проект УР.04.01.456).

Именно в зависимости от того, является ли Id внешней, предельной или же изолированной точкой для ассоциированного семейства $\mathscr{F}(\mathscr{T})$ системы сжимающих подобий в $\mathbb{R}$, структурно эквивалентной системе $\mathscr{S}$, соответственно выполняется одна из трех возможностей:

1) система $\mathscr{S}$ является жордановым циппером;

2) дуга γ есть отрезок прямой;

3) дуга γ может не быть отрезком прямой, но система $\mathscr{S}$ не является жордановым циппером.

В § 3, 4 доказывается ряд вспомогательных результатов, в § 5 приводится доказательство теоремы, а в § 6 приводится пример, реализующий п. 3 основной теоремы.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Системы сжимающих отображений и их инвариантные множества. Всюду далее мы будем обозначать через $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ систему сжимающих отображений полного метрического пространства X в себя. *Аттрактором* или *инвариантным множеством* системы $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ сжимающих отображений полного метрического пространства в себя называется такое компактное множество $K(\mathscr{S}) \subset M$, что $K = S_1(K) \cup \dots \cup S_m(K)$. Существование и единственность аттрактора системы обеспечиваются теоремой Хатчинсона (см. [5, с. 724]). В случае, когда $\mathscr{S}$ — система сжимающих подобий в $\mathbb{R}^d$, аттрактор K системы $\mathscr{S}$ мы также будем называть *самоподобным множеством* в $\mathbb{R}^d$. Систему $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ назовем *неприводимой*, если для всякой ее собственной подсистемы $\mathscr{S}' \subset \mathscr{S}$ аттрактор $K(\mathscr{S}')$ последней отличен от K.

1.2. Ципперы. Систему $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ сжимающих отображений полного метрического пространства X в себя будем называть *циппером* с *вершинами* $\{z_0, \dots, z_m\}$ и *сигнатурой* $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, если для набора точек $\{z_0, \dots, z_m\} \subset X$ и вектора $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \{0,1\}^m$ выполняются равенства $S_j(z_0) = z_{j-1+\varepsilon_j}$ и $S_j(z_m) = z_{j-\varepsilon_j}$ при всех $j \in I$. В случае, когда отображения S_j являются подобиями, циппер $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ будет называться *самоподобным.* Если аттрактор $K(\mathscr{S})$ циппера $\mathscr{S}$ — жорданова кривая, будем говорить, что $\mathscr{S}$ — *жорданов* циппер.

Из определения циппера и условия его жордановости [4, теорема 1.2] следует, что система сжимающих отображений $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$, аттрактор которой — жорданова дуга γ, является жордановым циппером тогда и только тогда, когда поддуги $\gamma_j = S_j(\gamma)$, $j = 1, \dots, m$, удовлетворяют условию:

$$\gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing \text{ при } |i-j| > 1 \text{ и } \operatorname{Card}(\gamma_i \cap \gamma_j) = 1 \text{ при } |i-j| = 1. \tag{2}$$

1.3. Мультииндексы. Будем обозначать через $I = \{1, \dots, m\}$ отрезок натурального ряда, через I^k — семейство *мультииндексов* длины k и через $I^* = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I^k$ — семейство всех мультииндексов конечной длины. Если задана система $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ отображений метрического пространства X в себя, то каждому мультииндексу $\mathbf{i} \in I^k$, $\mathbf{i} = i_1 i_2 \dots i_k$, сопоставляется отображение $S_{\mathbf{i}} = S_{i_1} \cdot S_{i_2} \cdot \ldots \cdot S_{i_k} : X \to X$. Символом $\mathscr{S}^* = \{S_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in I^*\}$ обозначается полугруппа, порожденная системой $\mathscr{S}$. Если $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ — система сжимающих отображений пространства X в себя, а K — ее аттрактор, то символом $K_{\mathbf{j}}$ или $K_{j_1 \dots j_k}$ мы будем обозначать копию k-го ранга $S_{\mathbf{j}}(K) = S_{j_1 \dots j_k}(K)$.

1.4. Ассоциированное семейство. В случае, когда все отображения $S_j \in \mathscr{S}$ биективны, семейство всех отображений вида ${S_{\mathbf{i}}}^{-1} \cdot S_{\mathbf{j}} : X \to X$, где $\mathbf{i} \in I^*$, $\mathbf{j} \in I^*$ и $i_1 \neq j_1$, будем называть, следуя [1, с. 996], *ассоциированным семейством* $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ системы $\mathscr{S}$. Под сходимостью $g_n \to g$ последовательности непрерывных отображений g_n (и, в частности, $g_n \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$) метрического пространства X в себя к непрерывному отображению g будем подразумевать равномерную сходимость на компактах в X.

1.5. Структурные гомеоморфизмы. Пусть в полных метрических пространствах X_1 и X_2 заданы системы сжимающих отображений $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ и $\mathscr{T} = \{T_1, \dots, T_m\}$ с аттракторами $K(\mathscr{S}) \subset X_1$ и $K(\mathscr{T}) \subset X_2$ соответственно. Гомеоморфизм $\varphi : K(\mathscr{T}) \to K(\mathscr{S})$ называется *структурным*, если для любых $x \in K(\mathscr{T})$ и $i \in I$ выполняется равенство

$$\varphi(T_i(x)) = S_i(\varphi(x)). \tag{3}$$

Рассматривая композиции структурного гомеоморфизма φ с отображениями $T_{\mathbf{j}} = T_{j_1} \cdot \ldots \cdot T_{j_k}$ и $S_{\mathbf{j}} = S_{j_1} \cdot \ldots \cdot S_{j_k}$, получаем такое же равенство $\varphi(T_{\mathbf{j}}(x)) = S_{\mathbf{j}}(\varphi(x))$ для любых мультииндексов $\mathbf{j} \in I^*$ и любых $x \in K(\mathscr{T})$. При дополнительном ограничении на выбор точки x это свойство распространяется и на элементы ассоциированных семейств $\mathscr{F}(\mathscr{T})$ и $\mathscr{F}(\mathscr{S})$.

Предложение 1.1. *Пусть $\varphi : K(\mathscr{T}) \to K(\mathscr{S})$ — структурный гомеоморфизм аттракторов систем $\mathscr{T}$ и $\mathscr{S}$. Пусть $g = {T_{\mathbf{i}}}^{-1} \cdot T_{\mathbf{j}}$ и $h = {S_{\mathbf{i}}}^{-1} \cdot S_{\mathbf{j}}$ — элементы ассоциированных семейств $\mathscr{F}(\mathscr{T})$ и $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ соответственно. Для любого $x \in K(\mathscr{T}) \cap g^{-1}(K(\mathscr{T}))$ выполняется равенство $\varphi \cdot g(x) = h \cdot \varphi(x)$.*

Доказательство. Поскольку $g(x) \in K(\mathscr{T})$, имеем

$$\varphi \cdot g(x) = S_{\mathbf{i}}^{-1} \cdot \varphi \cdot T_{\mathbf{i}} \cdot g(x) = S_{\mathbf{i}}^{-1} \cdot \varphi \cdot T_{\mathbf{j}}(x) = S_{\mathbf{i}}^{-1} \cdot S_{\mathbf{j}} \cdot \varphi(x) = h \cdot \varphi(x). \quad \square$$

В случае, когда структурный гомеоморфизм $\varphi : K(\mathscr{T}) \to K(\mathscr{S})$ существует, две системы $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ и $\mathscr{T} = \{T_1, \dots, T_m\}$ называются *структурно эквивалентными*. Симметричность и транзитивность отношения структурной эквивалентности обеспечиваются тем, что обратное отображение к структурному гомеоморфизму и композиция структурных гомеоморфизмов также являются структурными гомеоморфизмами. Следующее утверждение показывает единственность гомеоморфизма, устанавливающего структурную эквивалентность двух систем.

Предложение 1.2. *Пусть $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_n\}$ и $\mathscr{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ — две структурно эквивалентные системы инъективных сжимающих отображений в полных метрических пространствах X_1 и X_2 соответственно, а $K(\mathscr{S}) \subset X_1$ и $K(\mathscr{T}) \subset X_2$ — их аттракторы. Пусть $\varphi : K(\mathscr{T}) \to K(\mathscr{S})$ и $\psi : K(\mathscr{T}) \to K(\mathscr{S})$ — структурные гомеоморфизмы. Тогда $\varphi = \psi$ на $K(\mathscr{T})$.*

Доказательство. Положим $K = K(\mathscr{T})$ и рассмотрим гомеоморфизм $\tau = \psi^{-1} \cdot \varphi$ множества K на себя. Заметим что для любых $i \in I$ и $x \in K_i$ имеем $\tau \cdot T_i(x) = T_i \cdot \tau(x)$. Тогда для всех мультииндексов $\mathbf{j} \in I^*$ и для всех $x \in K_{\mathbf{j}}$ также выполняется равенство $\tau \cdot T_{\mathbf{j}}(x) = T_{\mathbf{j}} \cdot \tau(x)$. Таким образом, $\tau(K_{\mathbf{j}}) = K_{\mathbf{j}}$ для всех мультииндексов $\mathbf{j} \in I^*$. Поскольку всякая точка $x \in K$ есть пересечение стягивающейся последовательности вложенных множеств

$$K_{i_1} \supset K_{i_1 i_2} \supset \dots \supset K_{i_1 \dots i_p} \supset \dots$$

(см. [5, теорема 3, с. 724]), для всех $x \in K$ справедливо равенство $\tau(x) = x$, поэтому $\varphi(x) = \psi(x)$ на K. $\square$

1.6. Структурная параметризация самоподобной жордановой кривой. Пусть для системы $\mathscr{S}$ инъективных сжимающих подобий полного метрического пространства X, аттрактор $K(\mathscr{S})$ которой является жордановой дугой, существует структурно эквивалентная ей система $\mathscr{T}$ сжимающих подобий $\mathbb{R}$ с аттрактором $K(\mathscr{T}) = [0,1]$. Структурный гомеоморфизм $\varphi : [0,1] \to K(\mathscr{S})$, который согласно предложению 1.1 однозначно определен заданием системы $\mathscr{T}$, называется *структурной параметризацией* системы $\mathscr{S}$.

1.7. Аффинная размерность и сходимость. *Аффинной размерностью* $\dim_A(K)$ непустого множества $K \subset \mathbb{R}^d$ будем называть размерность аффинной оболочки K. Если $\dim_A(K) = d$, то сходимость $f_n \to f$ последовательности аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^d$ равносильна равномерной сходимости $f_n(x) \to f(x)$ на множестве K.

1.8. Ориентированные дуги. Жорданову дугу γ с упорядоченной парой ее концов $\{a,b\}$ мы называем *ориентированной дугой* и обозначаем через $\vec{\gamma}$. Гомеоморфизм $\varphi : [0,1] \to \gamma$, $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$, индуцирует на γ линейное упорядочение $x \le y$, при котором $a \le x \le b$ для любых $x \in \vec{\gamma}$. Любая пара точек $a' < b'$ на $\vec{\gamma}$ задает в $\vec{\gamma}$ поддугу $\vec{\gamma}_{a'b'} \subset \vec{\gamma}$. Биективное отображение $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ назовем *сохраняющим направление на дуге* γ, если $\gamma \cap g(\gamma)$ есть невырожденная поддуга и $g(x) < g(y)$ при каком-либо задании ориентации $\vec{\gamma}$ для любых $x < y$ в $g^{-1}(\gamma) \cap \gamma$.

1.9. Осевые подпространства. Для подобий в $\mathbb{R}^d$, не являющихся изометриями, будем использовать их представление в виде $g(x) = q \cdot \mathscr{O}(x - x_0) + x_0$, где $q = \mathrm{Lip}(g)$ — коэффициент линейного растяжения g, $\mathscr{O}$ — ортогональное преобразование в $\mathbb{R}^d$, которое будем называть *ортогональной частью* g, и x_0 — неподвижная точка g. В таком же виде, когда это возможно, будем представлять и изометрии g, соответствующим образом выбирая неподвижную точку x_0. Аффинное подпространство $V \in \mathbb{R}^d$ коразмерности 2 назовем *осевым* для подобия g, если $g(V) = V$, а сужение $\mathscr{O}|_{V^\perp}$ есть поворот плоскости $V^\perp$ на ненулевой угол. Символом $\Delta(z, g)$ будем обозначать расстояние от точки z до ближайшего осевого подпространства преобразования g.

§ 2. Основная теорема

Цель настоящей работы — получить описание самоподобных жордановых дуг в $\mathbb{R}^d$. Основным результатом является следующая

Теорема 2.1. *Пусть жорданова дуга $\gamma \in \mathbb{R}^d$ представляет собой аттрактор неприводимой системы $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ сжимающих подобий в $\mathbb{R}^d$, обладающей структурной параметризацией $(\mathscr{T}, \varphi)$. Пусть $\mathscr{F}(\mathscr{T})$ — ассоциированное семейство системы $\mathscr{T}$. Тогда имеет место одна из следующих возможностей.*

1. *Тождественное отображение* Id *не принадлежит замыканию ассоциированного семейства $\mathscr{F}(\mathscr{T})$. Тогда система $\mathscr{S}$ (при надлежащем переупорядочении) является жордановым циппером.*

2. *Тождественное отображение* Id *является предельной точкой для семейства $\mathscr{F}(\mathscr{T})$. Тогда дуга γ есть отрезок прямой.*

3. *Тождественное отображение* Id *является изолированной точкой в семействе $\overline{\mathscr{F}(\mathscr{T})}$.*

Следующее утверждение показывает, что заключение теоремы не зависит от выбора структурной параметризации системы $\mathscr{S}$.

Предложение 2.2. *Пусть жорданова дуга $\gamma \in \mathbb{R}^d$ является аттрактором неприводимой системы $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ сжимающих подобий в $\mathbb{R}^d$, обладающей структурной параметризацией $(\mathscr{T}_1, \varphi_1)$. Пусть $(\mathscr{T}_2, \varphi_2)$ также является структурной параметризацией системы $\mathscr{S}$. Пусть $\mathscr{F}(\mathscr{T}_1)$ и $\mathscr{F}(\mathscr{T}_2)$ — ассоциированные семейства систем $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ соответственно. Тождественное преобразование* Id *является предельной (соответственно изолированной) точкой для семейства $\mathscr{F}(\mathscr{T}_1)$ тогда и только тогда, когда оно является предельной (изолированной) точкой для $\mathscr{F}(\mathscr{T}_2)$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{T}_1 = \{T_1, \dots, T_m\}$ и $\mathscr{T}_2 = \{T'_1, \dots, T'_m\}$. В силу симметричности и транзитивности отношения структурной эквивалентности гомеоморфизм $\eta = \varphi_1 \cdot \varphi_2^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ является структурной параметризацией системы $\mathscr{T}_2$, т. е. для любых $i = 1, \dots, m$ и любых $x \in [0,1]$ выполняется равенство $\eta \cdot T_i(x) = T'_i \cdot \eta(x)$.

Пусть $g_n = T_{\mathbf{j}_n}^{-1} T_{\mathbf{i}_n}$ — последовательность в $\mathscr{F}(\mathscr{T}_1)$, сходящаяся к Id. Зафиксируем две точки a_0, a_1, $0 < a_0 < a_1 < 1$. Поскольку $g_n(a_k) \to a_k$, $k = 0, 1$, найдется такой номер N, что $g_n(a_k) \in (0,1)$ при любых $n > N$. Согласно предложению 1.1 для преобразований $h_n = {T'_{\mathbf{j}_n}}^{-1} T'_{\mathbf{i}_n}$, $n > N$, и для $k = 0, 1$ выполняется равенство $\eta \cdot g_n(a_k) = h_n \cdot \eta(a_k)$. Из сходимости $g_n(a_k) \to a_k$ следует, что $h_n(\eta(a_k)) \to \eta(a_k)$, $k = 0, 1$, поэтому $h_n \to \mathrm{Id}$. При этом если $g_n \neq \mathrm{Id}$, то и $h_n \neq \mathrm{Id}$. Таким образом, если Id — предельная точка для $\mathscr{F}(\mathscr{T}_1)$, то Id — предельная точка и для $\mathscr{F}(\mathscr{T}_2)$. Повторяя те же рассуждения для гомеоморфизма η^{-1}, получим обратную импликацию. $\square$

§ 3. Вспомогательные утверждения

Приведем несколько вспомогательных утверждений о самоподобных жордановых дугах.

Лемма 3.1. *Пусть жорданова дуга γ с концами a_0, a_1 является аттрактором системы $\mathscr{S} = \{S_1, \dots S_m\}$ сжимающих биекций полного метрического пространства X на себя. Тогда*

(i) *либо* (A1) *один из концов a_k, $k = 0, 1$, дуги γ является неподвижной точкой некоторого $S_{i_k} \in \mathscr{S}$, либо* (A2) *существуют такие индексы $i_0, i_1 \in I$, что $S_{i_1 i_0}(a_0) = a_0$, $S_{i_0 i_1}(a_1) = a_1$;*

(ii) *для любого отображения $g \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ множество $\gamma' = g(\gamma) \cap \gamma$ является либо* (B1) *пустым; либо* (B2) *дугой γ; либо* (B3) *дугой $g(\gamma)$; либо* (B4) *собственной поддугой в γ, один из концов которой совпадает с концом дуги γ, а другой совпадает с концом дуги $g(\gamma)$;*

(iii) *если $g \in \mathscr{F}(\mathscr{S})$ не имеет неподвижных точек на γ, то для множества γ' реализуется либо* (B1), *либо* (B4).

Доказательство. (i) Так как $\gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i(\gamma)$, то $a_0 \in s_{j_0}(\gamma)$, $a_1 \in s_{j_1}(\gamma)$ для некоторых индексов $j_0, j_1 \in I$. Поскольку дуга γ компактна, сужения отображений $s_{j_0} : \gamma \to \gamma_{j_0}$ и $s_{j_1} : \gamma \to \gamma_{j_1}$ являются гомеоморфизмами. Так как каждый гомеоморфизм S_{j_k}, $k = 0, 1$, сохраняет порядок континуума в точке (см. [6, § 51]), точки $b_k = S_{i_k}^{-1}(a_k)$ также являются концами дуги γ. Если $b_k = a_k$ для одного из индексов $k = 0, 1$, то выполнено утверждение (A1), если же $b_0 = a_1$ и $b_1 = a_0$, то выполнено (A2).

(ii) Пусть $g = S_{\mathbf{i}}{}^{-1} \cdot S_{\mathbf{j}}$ для мультииндексов $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^*$. Пусть $\tau = S_{\mathbf{i}}(\gamma) \cap S_{\mathbf{j}}(\gamma)$. Если $\tau = \varnothing$, то

$$\gamma' = \gamma \cap g(\gamma) = S_{\mathbf{i}}{}^{-1}(S_{\mathbf{i}}(\gamma)) \cap S_{\mathbf{i}}{}^{-1}(S_{\mathbf{j}}(\gamma)) = S_{\mathbf{i}}^{-1}(\tau) = \varnothing$$

и реализуется (B1). Если же $\tau \neq \varnothing$, то $S_{\mathbf{i}}(\gamma)$ и $S_{\mathbf{j}}(\gamma)$ — две поддуги с непустым пересечением в жордановой дуге γ. В силу уникогерентности жордановой дуги (см. [6, § 51, теорема 1, с. 304]) их пересечение τ является поддугой в γ. Тогда множество $\gamma' = \gamma \cap g(\gamma) = S_{\mathbf{i}}^{-1}(\tau)$ также есть поддуга в γ.

Если $\tau = S_{\mathbf{i}}(\gamma)$, то $\gamma' = S_{\mathbf{i}}^{-1}(\tau) = \gamma$ и мы имеем случай (B2).

Если $\tau = S_{\mathbf{j}}(\gamma)$, то $\tau \subset S_{\mathbf{i}}(\gamma)$ и $g(\gamma) = S_{\mathbf{i}}^{-1}(\tau) \subset \gamma$. Но тогда $\gamma' = \gamma \cap g(\gamma) = g(\gamma)$, и мы имеем случай (B3).

Если же $\tau \neq S_{\mathbf{i}}(\gamma)$ и $\tau \neq S_{\mathbf{j}}(\gamma)$, то концами дуги τ являются точки $S_{\mathbf{i}}(a_p)$ и $S_{\mathbf{j}}(a_q)$, где $p, q \in \{0, 1\}$, а концами дуги $\gamma \cap g(\gamma) = S_{\mathbf{i}}^{-1}(\tau)$ служат точки a_p и $g(a_q)$, т. е. реализуется случай (B4).

(iii) Реализация случаев (B2) и (B3) приводит к включениям $g(\gamma) \subset \gamma$ или $g^{-1}(\gamma) \subset \gamma$, означающим, что g имеет неподвижную точку на γ. Поэтому при условии (iii) возможны лишь случаи (B1) и (B4). □

Лемма 3.2. *Пусть $\mathscr{T} = \{T_1, \dots, T_m\}$ — система сжимающих подобий в $\mathbb{R}$, аттрактором которой является отрезок $J = [0, 1]$. Пусть тождественное преобразование* Id *является предельной точкой для ассоциированного семейства $\mathscr{F}(\mathscr{T})$. Пусть $J' = [b_0, b_1] \subset (0, 1)$. Тогда в множестве $\mathscr{F}(\mathscr{T}) \setminus \mathrm{Id}$ существует такая последовательность $\{h_n\}$, что*

(i) $h_n \to \mathrm{Id}$;

(ii) *все подобия h_nсохраняют ориентацию на $\mathbb{R}$;*

(iii) $h_n(T_i(J)) \cap T_i(J) \neq \varnothing$ *для любых n и $i \in I$;*

(iv) $h_n(J') \subset J$ *для любых n;*

(v) $0 < h_n(0) < 1$.

Доказательство. По условию леммы в семействе $\mathscr{F}(\mathscr{T})$ существует последовательность $\{f_n\}$, удовлетворяющая условию (i). Пусть $f_n(x) = c_n x + d_n$. Тогда $c_n \to 1$ и $d_n \to 0$ при $n \to \infty$. При достаточно больших n, $c_n > 0$, и преобразования f_n сохраняют ориентацию на $\mathbb{R}$. Поэтому существует подпоследовательность $\{f'_n\} \subset \{f_n\}$, удовлетворяющая условию (ii).

Поскольку для всякого f'_n либо $f'_n(0) \geq 0$, либо $f'_n(0) \leq 0$, существует подпоследовательность $\{f''_n\} \subset \{f'_n\}$ такая, что все $f''_n(0)$ имеют один знак. Положим $g'_n = f''_n$, если $f''_n(0) \geq 0$, и $g'_n = f''^{-1}_n$, если $f''_n(0) \leq 0$. Таким образом, мы приходим к последовательности $\{g'_n\}$, для которой выполнены условия (i), (ii) и $g'_n(0) \geq 0$ для всех n. Поскольку $g'_n(0) \to 0$, при достаточно больших n имеем $g'_n(0) < 1$. Поэтому существует подпоследовательность $\{g_n\} \subset \{g'_n\}$, для которой выполнены требования (i), (ii) и (v). Пусть $\delta > 0$ не превосходит $\min\limits_{i=1,\dots,m} \mathrm{diam}(T_i(J))$ и $\min(1 - b_1, b_0)$. Из равномерной сходимости $g_n \rightrightarrows \mathrm{Id}$ на $[0, 1]$ следует существование такого N, что при $n > N$ для всех $x \in J$ будет $|g_n(x) - x| < \delta$. Поэтому $g_n(T_i(J)) \cap T_i(J) \neq \varnothing$ и $g_n(J') \subset J$. Отбросив первые N членов последовательности $\{g_n\}$, получим искомую последовательность $\{h_n\}$. □

Лемма 3.3. *Пусть система $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ инъективных сжимающих подобий пространства $\mathbb{R}^d$, аттрактором которой является жорданова дуга γ с концами a_0, a_1, структурно эквивалентна системе $\mathscr{T}$ сжимающих подобий на $\mathbb{R}$, имеющей аттрактором отрезок $J = [0, 1]$. Пусть $\varphi : J \to \gamma$ — гомеоморфизм,* *реализующий структурную параметризацию. Пусть* $\dim_A(\gamma) = d$ *и* Id *является предельной точкой для семейства* $\mathscr{F}(\mathscr{T})$.

Тогда существует такая последовательность преобразований $g_n \in \mathscr{F}(\mathscr{S}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$, *что*

(a1) *все подобия* g_n *сохраняют направление на* γ,

(a2) $g_n \to \mathrm{Id}$,

(a3) $g_n(a_0) \in \gamma \setminus \{a_0, a_1\}$,

(a4) *для неподвижных точек* z_n *преобразований* g_n, $z_n \notin \gamma$, *имеет место сходимость* $z_n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $0 < b_0 < b_1 < 1$ и $J' = [b_0, b_1]$. В силу предыдущей леммы в семействе $\mathscr{F}(\mathscr{T}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ существует последовательность подобий $\{h_n\}$, удовлетворяющая условиям (i)–(v). Для каждого h_n возьмем его представление $h_n = T_{\mathbf{j}_n}{}^{-1} T_{\mathbf{i}_n}$, где мультииндексы $\mathbf{i}_n$ и $\mathbf{j}_n$ имеют различные начальные элементы. Рассмотрим последовательность $h'_n = S_{\mathbf{j}_n}{}^{-1} S_{\mathbf{i}_n}$ в семействе $\mathscr{F}(\mathscr{S})$. Заметим, что равенство $h'_n = \mathrm{Id}$ означало бы равенство $S_{\mathbf{j}_n} = S_{\mathbf{i}_n}$ на дуге γ, а потому и равенство $T_{\mathbf{j}_n} = T_{\mathbf{i}_n}$ на отрезке J или, что то же самое, равенство $h_n = \mathrm{Id}$. Последнее противоречит выбору последовательности $\{h_n\}$, поэтому все подобия h'_n отличны от Id.

Согласно предложению 1.1 на множестве $J \cap h_n^{-1}(J)$ выполняется равенство $\varphi \cdot h_n(x) = h'_n(x) \cdot \varphi(x)$. Поскольку в силу (iv) для любых $n \in \mathbb{N}$ будет $J' \subset h_n^{-1}(J)$, равенство $\varphi \cdot h_n(x) = h'_n(x) \cdot \varphi(x)$ выполняется на J' для всех n. Тем самым отображения h'_n удовлетворяют условию (a1). Из равномерной сходимости $h_n(x) \rightrightarrows x$ на J' и из равномерной непрерывности отображения φ следует равномерная сходимость $h'_n(y) \rightrightarrows y$ на поддуге $\varphi(J') \subset \gamma$. Существует такой мультииндекс $\mathbf{j} \in I^*$, что $S_{\mathbf{j}}(\gamma) \subset \varphi(J')$. Так как инъективное подобие сохраняет аффинную размерность множеств, $\dim_A(\varphi(J')) \geq \dim_A(S_{\mathbf{j}}(\gamma)) = \dim_A(\gamma) = d$. Поэтому из равномерной сходимости подобий $h'_n(y) \rightrightarrows y$ на $\varphi(J')$ вытекает сходимость $h'_n \to \mathrm{Id}$, и тем самым выполнено условие (a2).

Поскольку $h_n(0) \in J$, то $0 \in h_n^{-1}(J) \cap J$. Согласно предложению 1.1 справедливо равенство $\varphi \cdot h_n(0) = h'_n \cdot \varphi(0)$. Таким образом, $h'_n(a_0) \in \gamma \setminus \{a_0, a_1\}$, и выполнено условие (a3).

Перейдем теперь к условию (a4).

Из свойства (iii) леммы 3.2 следует, что для любого i существует точка $x \in T_i(J) \cap h_n(T_i(J))$. Тогда точка $y = h_n^{-1}(x)$ лежит в множестве $T_i(J) \cap h_n^{-1}(T_i(J))$, и поэтому согласно предложению 1.1 $\varphi \cdot h_n(y) = h'_n \cdot \varphi(y) \in h'_n(S_i(\gamma))$. Но $\varphi \cdot h_n(y) = \varphi(x) \in \varphi(T_i(J)) = S_i(\gamma)$. Таким образом, $\varphi \cdot h_n(y) \in h'_n(\gamma_i) \cap \gamma_i$, и тем самым $\gamma_i \cap h'_n(\gamma_i) \neq \varnothing$ для любого i.

Заметим, что для всякого подобия S_l из системы $\mathscr{S}$ и всякого подобия $g = S_{\mathbf{i}}^{-1} S_{\mathbf{j}}$ из семейства $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ подобие $S_l^{-k} g \cdot S_l^k = S_l^{-k} S_{\mathbf{i}}^{-1} S_{\mathbf{j}} S_l^k$ также лежит в семействе $\mathscr{F}(\mathscr{S})$.

Пусть $\{z_n\}$ — последовательность неподвижных точек преобразований h'_n. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, мы можем полагать, что последовательность $\{z_n\}$ имеет предел c, где c — конечная или бесконечно удаленная точка в $\overline{\mathbb{R}^d}$.

Рассмотрим два случая: (I) $c = a_0$; (II) $c \neq a_0$ — конечная точка в $\mathbb{R}^d$.

(I) Пусть $c = a_0$. Существует такое $i \in I$, что $S_i(a_0) \neq a_0$. Рассмотрим подобия $f_n = S_i^{-1} h'_n S_i$ и $f_n^{-1} = S_i^{-1} {h'_n}^{-1} S_i$, содержащиеся в семействе $\mathscr{F}(\mathscr{S})$. Неподвижной точкой каждого из них является точка $S_i^{-1} z_n$. При этом $f(\gamma) \cap \gamma = S_i^{-1} h'_n S_i(\gamma) \cap S_i^{-1} S_i(\gamma) = S_i^{-1}(h'_n(\gamma_i) \cap (\gamma_i) \neq \varnothing$, точно так же и $f^{-1}(\gamma) \cap \gamma \neq \varnothing$.

Поскольку h'_n сохраняет направление на γ, подобие f_n, будучи композицией $S_i^{-1}h'_nS_i$, также сохраняет направление на γ. То же самое справедливо и для f_n^{-1}.

Пусть отображение S_i сохраняет направление на γ. Из того, что h'_n сохраняет направление на γ, и из условия $\gamma_i \cap h'_n(\gamma_i) \neq \varnothing$ следует, что $h'_nS_i(a_0) > S_i(a_0)$. Поэтому $f_n(a_0) = S_i^{-1}h'_nS_i(a_0) > S_i^{-1}S_i(a_0) = a_0$. Если же отображение S_i обращает направление на γ, точно так же получаем, что $f_n^{-1}(a_0) > a_0$. В первом случае положим $h''_n = f_n$, а во втором — $h''_n = f_n^{-1}$. Тем самым получим последовательность $\{h''_n\} \subset \mathscr{F}(\mathscr{S})$, удовлетворяющую условиям (a1)–(a3) и такую, что последовательность неподвижных точек подобий h''_n имеет пределом точку $c \neq a_0$.

(II) Допустим, что $z_n \to c \neq a_0$. Учитывая утверждение (i) леммы 3.1, будем, не ограничивая общности, предполагать, что $S_*(a_0) = a_0$ для какого-то отображения S_* (равного либо S_i для некоторого $i \in I$, либо $S_{i_0i_1}$ для некоторых $i_0, i_1 \in I$).

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим последовательность $g_n^{(k)} = S_*^{-k}h'_nS_*^k$, $n = 1, 2, \ldots$. Все ее члены $g_n^{(k)}$ лежат в $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$, $g_n^{(k)} \to \mathrm{Id}$ при $n \to \infty$, в то время как неподвижными точками преобразований $g_n^{(k)}$ являются точки $S_*^{-k}(z_n)$. Покажем, что для каждого k найдется такое N_k, что при $n > N_k$ пересечение $g_n^{(k)}(\gamma) \cap \gamma$ есть невырожденная поддуга в γ. В самом деле, так как $h'_n(a_0) \to a_0$ и $h'_n(a_0) \in \gamma \setminus \{a_0, a_1\}$, для любого k существует такое N_k, что при $n > N_k$ будет $h'_n(a_0) \in S_*^k(\gamma \setminus \{a_0, a_1\})$. Поэтому $g_n^{(k)}(a_0) = S_*^{-k}h'_n(a_0) \in \gamma \setminus \{a_0, a_1\}$. Таким образом, $g_n^{(k)}(\gamma) \cap \gamma$ есть невырожденная поддуга в γ, и подобия $g_n^{(k)} = S_*^{-k}h'_nS_*^k$ сохраняют направление на γ.

Выберем такую диагональную последовательность $g'_k = g_{n_k}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, с индексами $n_k > N_k$, что $g'_k \to \mathrm{Id}$. В силу выбора этой последовательности для нее выполняются условия (a1)–(a3). В то же время последовательность неподвижных точек преобразований g'_k, равных $S_*^{-k}z_{n_k}$, стремится к ∞. Отбрасывая конечное число членов последовательности $\{g'_k\}$, мы можем полагать, что для всех $k \in \mathbb{N}$ неподвижные точки z_k преобразований g'_k лежат вне γ. Полученная последовательность удовлетворяет условиям (a1)–(a4). $\square$

§ 4. Локсодромы, порожденные подобиями в $\mathbb{R}^m$

Пусть T — сохраняющее ориентацию подобие в $\mathbb{R}^d$, отличное от изометрии. Пусть $T(x) = q\,\mathscr{O}\cdot(x - x_0) + x_0$ — представление T в виде композиции растяжения с коэффициентом q и ортогонального преобразования $\mathscr{O}$ с неподвижной точкой x_0. При надлежащем выборе ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^m$ матрица $\mathscr{O}$ приводится к клеточно-диагональному виду $\mathrm{diag}[\pm1, \ldots, \pm1, A_1, \ldots, A_k]$, где $A_j = \begin{vmatrix} \cos\alpha_j & \sin\alpha_j \\ -\sin\alpha_j & \cos\alpha_j \end{vmatrix}$, $\alpha_j \in (-\pi, \pi]$.

Будем считать, что координаты в $\mathbb{R}^d$ упорядочены так, что в представлении матрицы $\mathscr{O} = \mathrm{diag}[\pm1, \ldots, \pm1, A_1, \ldots, A_k]$ сначала идут все значения $+1$, затем -1 и наконец клетки A_k. Так как подобие T сохраняет ориентацию в $\mathbb{R}^d$, число значений -1 на диагонали в матрице $\mathscr{O}$ четно, и мы можем, собрав их в пары, каждую такую пару считать также клеткой A_j с $\alpha_j = \pi$. Также мы можем поступить и с парами единичных значений, положив $\alpha_j = 0$. Таким образом, при четном $d = 2m$ матрица $\mathscr{O}$ имеет вид $\mathrm{diag}[A_1, \ldots, A_m]$, а при нечетном $d = 2m - 1$ матрица $\mathscr{O}$ приводится к виду $\mathrm{diag}[+1, A_2, \ldots, A_m]$.

Обозначим через $\mathscr{O}^t$ клеточно-диагональную матрицу, в которой вместо клеток A_j стоят клетки $A_j^t = \begin{vmatrix} \cos\alpha_j t & \sin\alpha_j t \\ -\sin\alpha_j t & \cos\alpha_j t \end{vmatrix}$.

Для всякого действительного t положим $T^t(x) = q^t \cdot \mathscr{O}^t(x - x_0) + x_0$.

Определение 4.1. Кривую $L(T,x) = \{T^t(x), t \in \mathbb{R}\}$ будем называть *m-мерной локсодромой, ассоциированной с подобием* T; множество $\eta = \{T^t(x), t \in [0,h]\}$ — *дугой локсодромы* $L(T,x)$. *Углом искривления* ν *дуги локсодромы* η назовем наибольший из углов, образованных касательными векторами $\tau(t_1)$ и $\tau(t_2)$, $t_1, t_2 \in J$, к кривой η.

Лемма 4.2. *Пусть T — сохраняющее ориентацию подобие в $\mathbb{R}^d$ и a — точка в $\mathbb{R}^d$, не принадлежащая ни одному из осевых подпространств V_k подобия T. Пусть r_k — расстояние от точки a до осевого подпространства V_k. Пусть $\min\limits_k r_k = R$. Если $d(a,T(a)) = \delta < R/3$, то для дуги локсодромы $\eta = \{T^t(a), t \in [0,1]\}$ имеет место равенство* $\operatorname{diam}(\eta) = d(a,T(a))$, *а угол ν искривления дуги η не превосходит $\frac{\pi\delta}{3R}$.*

Доказательство. В случае, когда T — сжимающее отображение, т. е. при $q < 1$, мы можем рассматривать дугу $\eta = \{T^t(a), t \in [0,1]\}$ как дугу локсодромы $L(T^{-1}, b)$, где $b = T(a)$. При этом мы можем представить η как множество $\{(T^{-1})^t(b), t \in [0,1]\}$. Расстояние R' от точки b до ближайшего осевого подпространства преобразования T^{-1} удовлетворяет неравенству $R' = \min\limits_k r'_k \geq r - \delta \geq \frac{2R}{3}$. Поэтому $d(b, T^{-1}(b)) = \delta < R'/2$. Таким образом, достаточно доказать утверждение леммы при условии, что T — подобие с коэффициентом $q \geq 1$, а $d(a,T(a)) < R/2$.

Чтобы сделать выкладки менее громоздкими, перейдем к комплексным координатам. Пусть, как сказано выше, $m = d/2$ при четном d и $m = (d+1)/2$ при нечетном d. Рассмотрим такое изометрическое отображение $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^m$, биективное при четном d и являющееся композицией вложения $\mathbb{R}^d = \{0\} \times \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ и биекции $\mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{C}^m$ при нечетном d, что неподвижная точка x_0 преобразования T переходит в 0; собственные подпространства преобразования $\mathscr{O}$, соответствующие клеткам A_k, переходят в координатные оси; осевые подпространства V_k переходят в $(m-1)$-мерные координатные плоскости V_k^*; преобразование $T^* = \psi \cdot T \cdot \psi^{-1}$ имеет вид $T^*(z) = q\,\mathscr{O}^*(z)$, где $\mathscr{O}^* = \operatorname{diag}[e^{i\alpha_1 t}, \dots, e^{i\alpha_k t}]$.

Обозначим $a^* = \psi(a), \eta^* = \psi(\eta)$. Для локсодромы $\psi(L(T,a))$ справедливо представление

$$\psi(L(T,a)) = L(T^*, a^*) = \{(a_1^* q^t e^{it\alpha_1}, \dots, a_m^* q^t e^{it\alpha_m}),\ t \in \mathbb{R}\},$$

или, если положить $\lambda = \ln q$,

$$L(T^*, a^*) = \{(a_1^* e^{t(\lambda + i\alpha_1)}, \dots, a_m^* e^{t(\lambda + i\alpha_m)}),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

При таком представлении осевыми подпространствами V_j^* преобразования T^* будут $(m-1)$-мерные координатные плоскости $V_j = \{z \mid z_k = 0,\ k \neq j\}$ для всех тех j, для которых $\alpha_j \neq 0$.

Возьмем пару касательных векторов $\tau(t_1), \tau(t_2)$ к кривой η^*:

$$\tau(t_j) = \{(a_1^* e^{t_1(\lambda + i\alpha_1)}(\lambda + i\alpha_1), \dots, a_m^* e^{t_1(\lambda + i\alpha_m)}(\lambda + i\alpha_m)\}, \quad j = 1, 2.$$

Их разность $\tau(t_2) - \tau(t_1)$ — вектор с компонентами

$$a_k^*(e^{t_2(\lambda + i\alpha_k)} - e^{t_1(\lambda + i\alpha_k)})(\lambda + i\alpha_k), \quad k = 1, \dots, m.$$

Поскольку для пары векторов u, v в m-мерном пространстве

$$\frac{\|u\|}{\|v\|} \le \max_{k=1,\dots,m} \frac{|u_k|}{|v_k|},$$

имеем

$$\frac{\|\tau_2-\tau_1\|}{\|\tau_1\|} \le \max_k \frac{|a_k^*(e^{t_2(\lambda+i\alpha_k)}-e^{t_1(\lambda+i\alpha_k)})(\lambda+i\alpha_k)|}{|a_k^* e^{t_1(\lambda+i\alpha_k)}(\lambda+i\alpha_k)|}| \le \max_k |e^{(t_2-t_1)(\lambda+i\alpha_k)}-1|.$$

Так как $\|T(a^*)-a^*\| = \delta < R/2$, для каждой из компонент вектора $T(a^*)-a^*$ выполняется неравенство $(T(a^*)-a^*)_k = |a_k^*|\,|e^{\lambda+i\alpha_k}-1| \le \delta$. Поскольку $R = \min\limits_k |a_k^*|$, то $|e^{\lambda+i\alpha_k}-1| \le \delta/R < 1/2$. Из последнего неравенства следует, что $0 < \lambda \le \ln(1+\delta/R) < \delta/R$, тогда как $|\alpha_k| < \arcsin\delta/R < \frac{\pi\delta}{3R} < \frac{\pi}{6}$. При $\lambda \ge 0$, $|\alpha_k| < \frac{\pi}{6}$ функция $|e^{t(\lambda+i\alpha_k)}-1|$ монотонно возрастает при $t \in [0,1]$, поэтому максимум величины $|e^{(t_2-t_1)(\lambda+i\alpha_k)}-1|$ достигается при $t_2 = 1$, $t_1 = 0$ и равен $|e^{\lambda+i\alpha_k}-1| \le \frac{\delta}{R}$.

Таким образом, $\frac{\|\tau_2-\tau_1\|}{\|\tau_1\|} \le \frac{\delta}{R}$ для любой пары касательных векторов τ_1, τ_2.

Если два вектора u, v таковы, что $\|u-v\| < \|u\|/2$, угол между ними не превосходит $\frac{\pi\|u-v\|}{3\|u\|}$. Поэтому угол между векторами τ_2 и τ_1, а следовательно, и угол искривления η меньше $\frac{\pi\delta}{3R} = \frac{\pi\,\mathrm{diam}(\eta)}{3\min|a_k^*|}$. Поскольку этот угол не превосходит $\pi/6$, максимальное расстояние между различными точками дуги η достигается на концах дуги η. $\square$

§ 5. Доказательство основной теоремы

Определение 5.1. Пусть $\vec{\gamma}$ — ориентированная дуга. Последовательность $\sigma = \{x_1 < x_2 < \dots < x_m\}$ точек в γ назовем *ε-цепью в γ*, если σ есть ε-сеть в γ. *Углом искривления ν цепи σ* назовем наибольший из углов, образованных векторами $\overrightarrow{x_i x_j}$ и $\overrightarrow{x_k x_l}$, $i < j$, $k < l$.

Лемма 5.2. *Пусть $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ — система инъективных сжимающих подобий пространства $\mathbb{R}^d$, аттрактором которой является жорданова дуга γ. Пусть $\{g_n\}$ — последовательность подобий в $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \setminus \mathrm{Id}$, удовлетворяющая условиям* (a1)–(a4) *леммы* 3.3. *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при $m > N$ множество $\sigma_m = \{g_m^k(a_0)\}$ образует ε-цепь в γ.*

Доказательство. Пусть далее d_γ обозначает диаметр дуги γ. Заметим, что в силу выбора последовательности $\{g_n\}$ для каждого из ее членов существует такое M_n, что $g_n^{M_n+1}(\gamma) \cap \gamma = \varnothing$, а точки $b_k^{(n)} = g_n^k(a_0)$ лежат в γ при $k \le M_n$, при этом $a_0 < b_1^{(n)} < \dots < b_{M_n}^{(n)}$ и $\gamma \subset \bigcup\limits_{k=0}^{M_n} g_n^k\big([a_0, b_1^{(n)}]\big)$.

В самом деле, зафиксируем g_n и положим $\gamma_1^{(n)} = g_n(\gamma) \cap \gamma$ и $\gamma_{k+1}^{(n)} = g_n\big(\gamma_k^{(n)}\big) \cap \gamma$. Тогда в силу леммы 3.1 в случае если $\gamma_k^{(n)}$ — поддуга в γ и $g_n\big(\gamma_k^{(n)}\big) \cap \gamma \ne \varnothing$, то $g_n\big(\gamma_k^{(n)}\big) \cap \gamma \ne \varnothing$ также поддуга в γ. Кроме того, поскольку g_n сохраняет направление на γ, по индукции получаем, что $\gamma_k^{(n)} = \big[b_k^{(n)}, a_1\big]$. Тогда $\gamma_{k+1}^{(n)} \setminus \gamma_k^{(n)} = g_n^k\big([a_0, b_1^{(n)}]\big)$ при $k < M_n$, а $\gamma_{M_n}^{(n)} \subset g_n^{M_n}\big([a_0, b_1^{(n)}]\big)$. Пользуясь условием (a4) леммы 3.3, выберем такое N, что при $n > N$

1) расстояние $d(a_0, z_n)$ от начала дуги γ до неподвижной точки z_n подобия g_n больше $4d_\gamma$;

2) диаметр поддуги $[a_0, g_n(a_0)] \subset \gamma$ меньше $\varepsilon/2$.

Так как g_n^k является подобием, при $g_n^k(a_0) \in \gamma$ и $x \in [a_0, g_n(a_0)]$

$$\frac{d\big(g_n^k(a_0), g_n^k(x)\big)}{d(a_0, x)} = \frac{d\big(g_n^k(a_0), z_n\big)}{d(a_0, z_n)}. \tag{4}$$

Поскольку

$$3d_\gamma < d(a_0, z_n) - d\big(a_0, g_n^k(a_0)\big) < d\big(g_n^k(a_0), z_n\big) < d(a_0, z_n) - d\big(a_0, g_n^k(a_0)\big) < 5d_\gamma, \tag{5}$$

значение последней дроби лежит в промежутке $(3/4, 5/4)$. Поэтому

$$d\big(g_n^k(a_0), g_n^k(x)\big) < 5/4 d(a_0, x) < \varepsilon$$

и множество точек $\big\{g_n^k(a_0) : g_n^k(a_0) \in \gamma\big\}$ образует ε-цепь в γ. $\square$

Лемма 5.3. *Пусть $\mathscr{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ — система инъективных сжимающих подобий пространства $\mathbb{R}^d$, аттрактором которой является жорданова дуга γ. Пусть $\{g_n\}$ — последовательность подобий в $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \setminus \mathrm{Id}$, удовлетворяющая условиям* (a1)–(a4) *леммы* 3.3. *Тогда*

(1) *существует такая последовательность $\{g'_n\}$ подобий в $\mathscr{F}(\mathscr{S}) \setminus \mathrm{Id}$, удовлетворяющая условиям* (a1)–(a4), *что расстояние $\Delta(a_0, g'_n)$ от a_0 до ближайшего осевого подпространства подобия g'_n стремится к бесконечности при $n \to \infty$;*

(2) *для любых положительных ε, δ на дуге γ существует ε-цепь с углом искривления $\nu < \delta$.*

Доказательство. Пусть для каждого n через $W(n)$ обозначено то из осевых подпространств $V_j(g_n)$ для подобия g_n, для которого реализуется расстояние $\Delta(a_0, g_n)$. Допустим, что $\Delta(a_0, g_n) \to 0$, тогда из последовательности $\{W(n)\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что она совпадает с $\{W(n)\}$. Пусть W_0 — аффинное подпространство, к которому сходится последовательность $\{W(n)\}$. Обозначим через B_0 шар $B(a_0, d_\gamma)$.

Выберем $\varepsilon > 0$. Существует такое N, что при любом $n > N$ выполняются условия:

1) хаусдорфово расстояние $d_H(B_0 \cap W(n), B_0 \cap W_0)$ меньше $\varepsilon/2$;

2) $d(a_0, W(n)) < \varepsilon/8$;

3) $d(a_0, z_n) > 4d_\gamma$;

4) множество $\sigma_n = \big\{g_n^k(a_0) : g_n^k(a_0) \in \gamma\big\}$ есть $\varepsilon/4$-цепь в γ.

Поскольку преобразование g_n^k является подобием, выполняется равенство

$$\frac{d\big(g_n^k(a_0), W(n)\big)}{d(a_0, W(n))} = \frac{d\big(g_n^k(a_0), z_m\big)}{d(a_0, z_m)}.$$

В силу неравенства (5) значение последней дроби лежит в промежутке $(3/4, 5/4)$, поэтому для всех тех k, для которых $g_n^k(a_0) \in \gamma$,

$$d\big(g_n^k(a_0), W(n)\big) < 5/4 d(a_0, W(n)) < \varepsilon/4.$$

Тогда

$$d(x, W(n)) \le d(x, \sigma_n) + \max_{\sigma_n}\big(d(g_n^k(a_0), W(n)\big) < \varepsilon/2$$

для любого $x \in \gamma$. Поэтому для любых $x \in \gamma$ имеем $d(x, B_0 \cap W_0) < \varepsilon$. Устремив ε к 0, получим $\gamma \subset W_0$, а это противоречит тому, что аффинная размерность γ равна d. Таким образом, ни для какой последовательности $\{g_n\}$, удовлетворяющей условиям (a1)–(a4) леммы 3.3, значения $\Delta(a_0, g_n)$ не стремятся к 0.

Из вышесказанного следует, что для некоторого $h > 0$ существует такое N, что $d(a_0, W(n)) > h$ для любых $n > N$. Повторяя рассуждения п. (ii) в доказательстве леммы 3.3, рассмотрим двойную последовательность $g_n^{(k)} = S_*^{-k} g_n S_*^k$, для членов которой будет выполняться условие $\Delta\bigl(a_0, g_n^{(k)}\bigr) = \rho^{-k}\Delta(a_0, g_n) > \rho^{-k}h$, где $\rho = \mathrm{Lip}(S_*)$, и выберем в ней такую диагональную последовательность $g'_k = g_k^{(n_k)}$, $n_k > N_k$, что $g'_k \to \mathrm{Id}$. Тем самым получим последовательность $\{g'_k\}$, удовлетворяющую условиям (a1)–(a4) леммы 3.3 и такую, что последовательность $\{\Delta(a_0, g'_k)\}$ стремится к бесконечности. Итак, доказано утверждение (1) леммы.

Пользуясь (1), выберем такое N, что $\frac{d_\gamma}{\Delta(a_0, g_n)} < \frac{3\delta}{\pi}$ при $n > N$. В силу леммы 5.2 мы можем выбрать N также и таким, что при $n > N$ точки $\bigl\{g_n^j(a_0),\ j = 0, 1, \dots\bigr\}$ образуют ε-цепь в γ. Возьмем число $n > N$ и положим $k = \max\bigl\{j : g_n^j(a_0) \in \gamma\bigr\}$. Точки $\bigl\{g_n^j(a_0),\ j = 0, 1, \dots, k\bigr\}$ лежат на дуге η локсодромы $L\bigl(g_n^k, a_0\bigr)$ с концами $a_0, g_n^k(a_0)$ и образуют в силу вышеприведенных неравенств ε-цепь в η. Вследствие леммы 4.2 из неравенства $d\bigl(a_0, g_n^k(a_0)\bigr) \le d_\gamma < \frac{3\delta}{\pi}\Delta(a_0, g_n)$ следует, что угол искривления дуги η не превосходит δ. Поэтому и угол искривления цепи $\bigl\{g_n^j(a_0), j = 0, 1, \dots, k\bigr\}$ также не превосходит δ. $\square$

Доказательство теоремы 2.1. Пусть Id является предельной точкой для семейства $\mathscr{F}(\mathscr{T})$. Тогда в силу леммы 5.3 для всякого $\varepsilon > 0$ на кривой γ можно построить последовательность $\varepsilon/3$-цепей $\mathscr{C}_j$ (и соответствующих им дуг локсодром η_j), углы искривления которых стремятся к нулю при $j \to \infty$. Возьмем такое j, что угол ν_j искривления дуги η_j меньше $\operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{3d_\gamma}$. Тогда локсодрома η_j лежит в $\varepsilon/3$-окрестности прямолинейного отрезка l_j, соединяющего концы кривой η_j. Кривая γ содержится в $\varepsilon/3$-окрестности локсодромы η_j, а значит, и в ε-окрестности отрезка прямой l_j. В силу произвольности выбора ε кривая γ есть отрезок прямой.

Допустим, что $\mathrm{Id} \notin \overline{\mathscr{F}(\mathscr{T})}$. Покажем, что в этом случае для любых $i, j \in I$ множество $\gamma_i \cap \gamma_j$ содержит не более одной точки.

Предположим противное. Тогда существуют такие $i, j \in I$, что множество $\gamma_i \cap \gamma_j$ есть невырожденная поддуга в γ. Переходя к прообразам дуг γ_i, γ_j относительно структурного гомеоморфизма φ, получаем, что множество $\varphi^{-1}(\gamma_i \cap \gamma_j) = T_i(J) \cap T_j(J)$ является отрезком ненулевой длины в J. Это означает, что $\sum\limits_{i=1}^{m} \mathrm{diam}(T_i(J)) > 1$, поэтому хаусдорфова размерность и размерность подобия для системы $\mathscr{T}$ не совпадают. Тогда согласно [1, с. 996] $\mathrm{Id} \in \overline{\mathscr{F}(\mathscr{T})}$, что противоречит исходному предположению.

Если $\mathrm{Card}(\gamma_i \cap \gamma_j) \le 1$ для любых $i, j \in I$, то перенумеруем отображения S_i так, чтобы выполнялось условие 1.2.1. Тогда система $\mathscr{S}$ становится циппером с аттрактором γ. $\square$

§ 6. Пример, реализующий случай (3) теоремы 2.1

Следующий пример показывает, что описанная в п. 3 теоремы 2.1 ситуация может быть реализована для жордановых кривых, отличных от отрезка прямой.

Возьмем число $p \in (0, 1/4]$ и положим $q' = (1 - 2p)/(2 - p)$. Зададим на отрезке $J = [0, 1]$ набор точек $x_0 = 0$, $x_1 = p$, $x_2 = 1 - p - q'$, $x_3 = p + q'$, $x_4 = 1 - p$, $x_5 = 1$. При этом $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Пусть $\mathscr{T}$ — система сжимающих подобий на отрезке $[0, 1]$, заданная равенствами $T_1(x) = px$; $T_2(x) = -q'x + p + q'$;

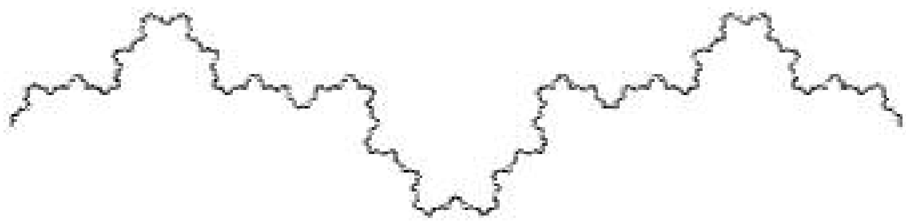

Рис. 1.

$T_3(x) = -q'x + 1 - p$; $T_4(x) = px + 1 - p$. Для такой системы выполняется соотношение $T_2 \cdot T_1 = T_3 \cdot T_4 = -pq'(x - 1/2) + 1/2$ и при этом

$$T_1(\{x_0, x_5\}) = \{x_0, x_1\}, \quad T_2(\{x_0, x_1, x_5\}) = \{x_3, x_2, x_1\},$$
$$T_3(\{x_0, x_4, x_5\}) = \{x_4, x_3, x_2\}, \quad T_4(\{x_0, x_5\}) = \{x_4, x_5\}. \tag{6}$$

Поэтому аттрактором этой системы является сам отрезок J.

Положим $q = (1 - 2p)/(2 - (1 + t^2)p)$ и зададим в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ набор точек $z_0 = 0$, $z_1 = p(1+it)$, $z_2 = 1-p(1-it)-q(1+it)$, $z_3 = p(1+it)+q(1-it)$, $z_4 = 1-p(1-it)$, $z_5 = 1$. Пусть $\mathscr{S}$ — система сжимающих подобий в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, заданная равенствами

$$S_1(z) = p(1 + it)z; \quad S_2(z) = -q(1 - it)z + p(1 + it) + q(1 - it);$$
$$S_3(z) = -q(1 + it)z + 1 - p(1 + it); \quad S_4(z) = 1 - p(1 - it) + p(1 - it)z.$$

Обозначим аттрактор системы $\mathscr{S}$ через γ (рис. 1).

Для системы $\mathscr{S}$ также выполняются соотношения, аналогичные (6):

$$S_2 \cdot S_1 = S_3 \cdot S_4 = -pq(1 + t^2)(z - \xi_0) + \xi_0,$$

где

$$\xi_0 = \frac{1}{2} + i\frac{t(1 - 4p + p^2(1 + t^2))}{2(-1 + p^2(1 + t^2))},$$

при этом

$$S_1(\{z_0, z_5\}) = \{z_0, z_1\}, \quad S_2(\{z_0, z_1, z_5\}) = \{z_3, z_2, z_1\},$$
$$S_3(\{z_0, z_4, z_5\}) = \{z_4, z_3, z_2\}, \quad S_4(\{z_0, z_5\}) = \{z_4, z_5\}.$$

Так как $S_4(z) = 1 - \overline{S_1(1 - \bar{z})}$ и $S_3(z) = 1 - \overline{S_2(1 - \bar{z})}$, множество γ симметрично относительно прямой $x = 1/2$.

Предложение 6.1. *Аттрактор γ системы $\mathscr{S}$ является жордановой кривой при $p = 1/4$, $t = 1/\sqrt{3}$, $q = 3/8$.*

Доказательство. Повторяя рассуждения доказательства леммы 1 из [4], приходим к выводу о существовании единственного непрерывного отображения φ промежутка J на аттрактор γ системы $\mathscr{S}$ такого, что $\varphi(x_k) = z_k$, $k = 0, 1, \ldots, 5$, и удовлетворяющего условию $g \cdot T_i = S_i \cdot g$ для любых $i \in I^*$.

Рассмотрим прямоугольник $P = [-0.1, 1.1] \times [-0.1, 0.2]$. Несложная проверка показывает, что $S_i(P) \subset P$ для любого $S_i \in \mathscr{S}$, поэтому $\gamma \subset P$. Так

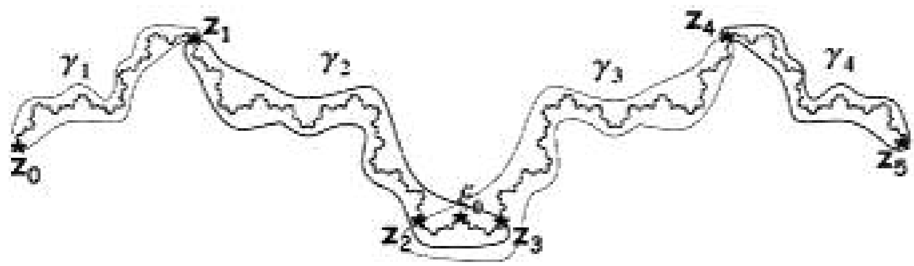

Рис. 2.

как преобразование S_{21} — подобие с неподвижной точкой $\xi_0 = (1/2 - i\sqrt{3}/24)$, континуум γ можно представить в виде

$$\gamma = \{\xi_0\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} S_{21}^n(\gamma \setminus S_{21}(\dot{\gamma})) \subset \{\xi_0\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} S_{21}^n(P^*),$$

$$P^* = \Big(\bigcup_{j,k=1,\dots,4} S_{jk}(P) \Big) \setminus S_{21}(P).$$

Прямоугольники $S_{1j}(P)$, $S_{24}(P)$, $S_{23}(P)$, $S_{22}(P)$, равно как и симметричные им $S_{4j}(P)$, $S_{31}(P)$, $S_{32}(P)$, $S_{33}(P)$, не пересекают ось симметрии $l_0 = \{x = 1/2\}$ множества γ, то же самое верно и для образов этих прямоугольников относительно подобий S_{21}^n. Поэтому пересечение γ с осью симметрии l_0 есть единственная точка ξ_0, которая является разделителем для γ; при этом одна из связных компонент $\gamma \setminus \{\xi_0\}$ содержит точку z_0, а другая — точку z_5 (рис. 2).

Такими же разделителями для γ служат точки z_1, z_2, z_3 и z_4. Покажем это для точки z_1. Она является неподвижной для преобразования $\sigma_1 = S_1 S_4 S_1^{-1} = S_2 S_4 S_2^{-1}$, и

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 = \{z_1\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma_1^n \Big(\bigcup_{j=1,2;k=1,2,3} S_{jk}(\gamma) \Big) \subset \{z_1\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma_1^n \Big(\bigcup_{j=1,2;k=1,2,3} S_{jk}(P) \Big).$$

Для любых $j, k = 1, 2, 3$ будет $S_{1j}(P) \cap S_{2k}(P) = \varnothing$, поэтому $\sigma_1^n \cdot S_{1j}(P) \cap \sigma_1^n \cdot S_{2k}(P) = \varnothing$. Это показывает, что точка z_1 разбивает множество $\gamma_1 \cup \gamma_2$; поскольку остальная часть $\gamma \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$ континуума γ лежит справа от прямой l_0, точка z_1 разбивает и весь континуум γ на две связные компоненты. Аналогичные рассуждения справедливы и для точек z_2, z_3, z_4.

Покажем, что для любого мультииндекса $\mathbf{i} \in I^*$ точка $\xi_{\mathbf{i}} = S_{\mathbf{i}}(\xi_0)$ разбивает континуум γ на две связные компоненты, одна из которых содержит точку z_0, а другая — точку z_5. Будем доказывать индукцией по длине k мультииндекса $\mathbf{i}$.

Так как для любых $i, j \in I$, $i \neq j$, пересечение $S_i(l_0 \cap P)$ и $S_j(P)$ пусто, доказываемое утверждение справедливо для каждой из точек $S_i(\xi_0)$, $i \in I^1$. Допустим, что оно справедливо для всех мультииндексов $\mathbf{i} \in I^k$. Возьмем $\mathbf{i} \in I^{k+1}$, $\mathbf{i} = i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}$. Согласно предположению индукции точка $S_{i_1}^{-1}(\xi_{\mathbf{i}}) = \xi_{i_2 i_3 \dots i_{k+1}}$ является разделителем в множестве γ, поэтому точка $\xi_{\mathbf{i}}$ — разделитель в множестве γ_{i_1}. Но тогда она будет разделителем и для γ.

Это очевидно при i_1, равном 1 или 4, поскольку $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{z_1\}$ (соответственно $\gamma_3 \cap \gamma_4 = \{z_4\}$). Если $i_1 = 2$, $i_2 = 2, 3, 4$, то точка $\xi_{\mathbf{i}}$ является разделителем в γ_2 и содержится в $\gamma_2 \setminus \gamma_3$. Это множество граничит с γ_3 по единственной точке z_2, а с γ_1 по точке z_1, так что точка $\xi_{\mathbf{i}}$ также разделитель в множестве γ. В случае, когда $i_1 = 2$, $i_2 = 1$, $\xi_{\mathbf{i}}$ содержится в $\gamma_2 \cap \gamma_3 = \gamma_{21}$ и, так как $S_{21}^{-1}(\xi_{\mathbf{i}}) = \xi_{i_3 \ldots i_{k+1}}$ — разделитель в множестве γ, является разделителем в множестве γ_{21}. Поскольку это последнее множество отделено от остальной части γ точками $z_2 = S_{21}(z_0)$ и $z_3 = S_{21}(z_5)$, точка $\xi_{\mathbf{i}}$ — разделитель в множестве γ.

Итак, образ относительно φ каждой из точек $T_{\mathbf{i}}(1/2)$, $\mathbf{i} \in I^*$, будет разделителем в γ. В силу того, что множество $\{T_{\mathbf{i}}(1/2), \mathbf{i} \in I^*\}$ плотно в J, образ каждой точки из J также разделитель в γ. Тогда согласно [6, § 51, теорема 1, с. 304] γ есть жорданова кривая. $\square$

Предложение 6.2. *Никакая неприводимая подсистема $\mathscr{S}' \subset \mathscr{S}^*$, имеющая аттрактором дугу γ, не является циппером.*

Доказательство. Покажем, что для любого набора мультииндексов $\mathbf{j}_1, \ldots, \mathbf{j}_l$ такого, что $\bigcup\limits_{k=1}^{l} S_{\mathbf{j}_k}(\gamma) = \gamma$ (а это и значит, что аттрактором системы $\mathscr{S}' = \{S_{\mathbf{j}_1}, \ldots, S_{\mathbf{j}_l}\}$ является дуга γ), найдутся такие $\mathbf{j}_{k_1}, \mathbf{j}_{k_2}$, что $S_{\mathbf{j}_{k_1}}(\gamma) \cap S_{\mathbf{j}_{k_2}}(\gamma)$ есть невырожденная поддуга в γ. Последнее означает, что система $\mathscr{S}'$ не является циппером.

Пусть Γ' — система поддуг $\{\gamma_{\mathbf{j}_k} = S_{\mathbf{j}_k}(\gamma), k = 1, \ldots, l\}$. По нашему предположению $\bigcup\limits_{k=1}^{l} \gamma_{\mathbf{j}_k} = \gamma$. Так как система $\mathscr{S}'$ неприводима, никакая собственная подсистема в Γ' не покрывает γ.

Заметим, что всякая система Γ' поддуг вида $S_{\mathbf{j}}(\gamma)$, в объединении дающая γ, всегда состоит из трех непересекающихся подсистем, дающих в объединении множества γ_1, $\gamma_2 \cup \gamma_3$, γ_4. Поэтому для Γ' справедливы следующие утверждения.

1. Либо (a1) $\Gamma' \ni \gamma_1$, либо (b1) $\Gamma'_1 = \{\gamma_{\mathbf{j}_k} : \gamma_{\mathbf{j}_k} \subset \gamma_1\}$ не содержит γ_1 и покрывает γ_1.

2. Либо (a2) $\Gamma' \ni \gamma_2$, либо (b2) существует подсистема Γ'_2, не содержащая γ_2 и покрывающая $\gamma_2 \setminus \gamma_{21}$.

3. Либо (a3) $\Gamma' \ni \gamma_3$, либо (b3) существует подсистема Γ'_3, не содержащая γ_3 и покрывающая $\gamma_3 \setminus \gamma_{21}$.

4. Либо (a4) $\Gamma' \ni \gamma_4$, либо (b4) $\Gamma'_4 = \{\gamma_{\mathbf{j}_k} : \gamma_{\mathbf{j}_k} \subset \gamma_4\}$ не содержит γ_4 и покрывает γ_4.

Пусть p — наибольшая длина мультииндексов $\mathbf{j}_k$, $k = 1, \ldots, l$. Мы будем доказывать утверждение «семейство Γ' содержит две дуги, пересечение которых содержит более одной точки» индукцией по p.

При $p = 1$ утверждение справедливо, поскольку $\gamma_2 \cap \gamma_3 = \gamma_{21}$. Допустим, что оно справедливо для некоторого $p - 1$ и максимальная длина мультииндекса для системы Γ' равна p. Поскольку при $p > 1$ утверждения (a1)–(a4) не могут выполняться одновременно, имеет место одно из утверждений (b1)–(b4). Пусть справедливо утверждение (b1). Рассмотрим систему $\Gamma'' = S_1^{-1}(\Gamma'_1)$. Поддуги, составляющие эту систему, дают в объединении γ, в то время как длина каждого из мультииндексов не превосходит $p - 1$. Поэтому Γ'' (а потому и Γ') содержит пару поддуг, пересечение которых содержит более одной точки.

Допустим, что справедливо утверждение (b2). Рассмотрим систему $\Gamma'' = S_2^{-1}(\Gamma'_2)$. Поддуги, составляющие эту систему, покрывают $\gamma \setminus \gamma_1$, а длина каждого из мультииндексов не превосходит $p - 1$. Поэтому система $\Gamma'' \cup \{\gamma_1\}$ покрывает γ и согласно предположению индукции содержит пару поддуг (отличных от γ_1), пересечение которых содержит более одной точки. Случаи (b3) и (b4) полностью аналогичны (b1) и (b2). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bandt Ch., Graf S.* Self-similar sets 7. A characterization of self-similar fractals with positive Hausdorff measure // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 114, N 4. P. 995–1001.

2. *Aseev V. V.* On the regularity of self-similar zippers // Materials of the 6th Russian–Korean Intern. Sympos. on Science and Technology, KORUS-2002, June 24–30, 2002. Novosibirsk State Techn. Univ. (Russia). Part 3 (Abstracts). P. 167.

3. *Astala K.* Self-similar zippers // Holomorph. funct. and Moduli: Proc. Workshop, March 13–19, 1986. New York, 1988. V. 1. P. 61–73.

4. *Асеев В. В., Тетенов А. В., Кравченко А. С.* О самоподобных жордановых кривых на плоскости // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 3. С. 481–492.

5. *Hutchinson J.* Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30, N 5. P. 713–747.

6. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.

7. *Falconer K. J.* Fractal geometry: mathematical foundations and applications. New York: J. Wiley and Sons, 1990.

Статья поступила 4 февраля 2004 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`btp@math.nsc.ru`

Тетенов Андрей Викторович
Горно-Алтайский гос. университет, ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 649000
`atet@gasu.ru`