From the Editorial Board:

The paper " *Reprezentari ale algebrei Lie sl(2)* " , authored by C. Ciobanu, is retracted because it has been a slight shortened translation from the book "Quantum Groups", Sections V.3-V.4, published by Professor Christian Kassel in GTM, vol 155, Springer Verlag, New York, 1995, xii + 531 pp., ISBN 0-387-94370-6.

We are very sorry that we did not know this before publishing the paper and we express our deep appologies for this situation to the author (C. Kassel), to the Editors of Graduate Texts in Mathematics at Springer Verlag, to our readers and to Mathematical Reviews and Zentralblatt fur Mathematik.

ANALELE ŞTIINŢIFICE

ale

UNIVERSITĂŢII "OVIDIUS" CONSTANŢA

Volumul VIII (2000), fascicola 1

PROCEEDINGS:

ANNUAL CONFERENCE OF ROMANIAN MATHEMATICAL SOCIETY

Seria MATEMATICĂ
UNIVERSITATEA "OVIDIUS" CONSTANŢA

Universitatea Ovidius – Constanţa, România,

Analele Ştiinţifice ale Universităţii Ovidius Constanţa,

Seria Matematică, volumul 8, fascicola 1, 2000

This journal is founded in 1993 and is devoted to pure and applied mathematics. Papers on theoretical physics, astronomy and informatics may be accepted if they present interesting mathematical results.

EDITORIAL BOARD

For subscriptions and submission of papers, use the following address:

Analele Ştiinţifice ale Universităţii Ovidius, Seria Matematică Constanţa,
Ovidius University, Mamaia Bd. 124 / Constanţa 8700 România.
e-mail: mirelast@univ-ovidius.ro

ADVISORY BOARD

Preface

The Conference of the Romanian Mathematical Society for 2000 was held at "Ovidius" University in Constantza, in the end of May. The organizers, members of the Department of Mathematics in the "Ovidius" University, one of them being the dean of our faculty, tried to do the conference going smoothly. It was a pleasure and a honor for us to organize this conference; Viviana Ene, Dan Pavel, Elena Popescu, Magda Stavrositu, Cristina Flaut, Alina Barbulescu have done a their best in preparing the conference. We decided to publish some of the papers (after a refereeing process) in our journal. Now we are accomplishing this task. The editors of the two volumes are dr. Viviana Ene, dr. Alina Barbulescu and dr. Mirela Stefanescu. As the diversity of the topics did not give us the possibility of putting papers in sections (in spite of the fact that the conference has had sections!), we rather liked the lexicographical ordering. This is always better for such situations! All the authors are, in fact, specialists in mathematics. Usually we publish in our journal papers in languages as English, French, German. This time we have done an exception, since we wanted to respect the choice of some Romanian authors to use their mother language and because of the readers of this volume, who are Romanians. Hoping that other colleagues will like the volumes, we are wishing the Romanian Mathematical Society a new century of successful activity.

Editors

CONTENTS

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 1–4

A PAIR OF JORDAN TRIPLE SYSTEMS OF JORDAN PAIR TYPE

Eduard Asadurian and Mirela Ştefănescu

Abstract

A Jordan pair $V = (V^+, V^-)$ ia a pair of modules over an unitary commutative associative ring K, together with a pair (Q_+, Q_-) of quadratic mappings $Q_\sigma : V^\sigma \to \mathrm{Hom}_K(V^{-\sigma}, V^\sigma)$, $\sigma = \pm$, so that the following identities and their liniarizations are fulfielld for $\sigma = \pm$:

JP1 $D_\sigma(x,y)Q_\sigma(x) = Q_\sigma(x)D_{-\sigma}(y,x)$

JP2 $D_\sigma(Q_\sigma(x)y,y) = D_\sigma(x, Q_{-\sigma}(y)x)$

JP3 $Q_\sigma(Q_\sigma(x)y) = Q_\sigma(x)Q_{-\sigma}(y)Q_\sigma(x)$.

Here, $D_\sigma(x,y)z = Q_\sigma(x,z)y := Q_\sigma(x+z)y - Q_\sigma(x)y - Q_\sigma(z)y$.

According to an example with quadratic mappings $Q_\sigma : V^\sigma \to \mathrm{End}\,(V^{-\sigma})$, we get a little different approach and we define the concept of a pair of Jordan Triple Systems of Jordan Pair type.

1 Introduction

Let D_n be the dihedral groups of degree n, more precisely

$$D_n =< a, b : \ |a| = n, \ |b| = 2, ba = a^{n-1}b > .$$

Usually, the elements of D_n are written in the form $a^i b^i$, $0 \le i \le n-1$, $0 \le j \le 1$, so that the underlying set of this group is

$$D_n =< a > \cup < a > b, \text{ if } n \text{ is an odd number,}$$

or

$$D_n =< a^2 > \cup < a^2 > a \cup < a^2 > b \cup < a^2 > ab, \text{ if } n \text{ is an even number.}$$

If we use the notation $p \oplus_m r$ for the sum modulo m in the abelian group $R_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$, then the multiplication in D_n is given by the rule:

$$\left(a^i b^j\right)\left(a^k b^l\right) = a^{i \oplus_n (-1)^j k} b^{l \oplus_2 j} \tag{1}$$

Indeed, because $ba^k = a^{(n-1)k}b = a^{-k}b = a^{n-k}b$, we obtain

$$
\begin{aligned}
\left(a^ib^j\right)\left(a^kb^l\right) &= \begin{cases} a^{i+k}b^l, & \text{if} \quad j=0, \\ a^{i-k}b^{l+1}, & \text{if} \quad j=1 \text{ and } i \geq k, \\ a^{n-k+i}b^{l+1}, & \text{if} \quad j=1 \text{ and } i<k, \end{cases} \\
&= \begin{cases} a^{i\oplus_n k}b^{l+0}, & \text{if} \quad j=0, \\ a^{i\oplus_n(-k)}b^{l+1}, & \text{if} \quad j=1 \end{cases} \\
&= a^{i\oplus_n(-1)^j k}b^{l\oplus_2 j}
\end{aligned}
$$

Therefore, $D_n \cong R_n \oplus R_2$, where the group structure on $R_n \oplus R_2$ is defined via the composition

$$(i,j)(k,l) = \left(i \oplus_n (-1)^j k, l \oplus_2 j\right).$$

2 Some properties of the group algebra of D_n

Let K be a field and let $K[D_n]$ be the group algebra of D_n over K. Then $K[D_n]$ is unitary associative algebra of dimension $2n$ over K, noncomutative if $n > 2$. A basis of $K[D_n]$ over K is the set of vectors $\left\{a^ib^j | 0 \leq i \leq n-1,\ 0 \leq j \leq 1\right\}$ with the multiplication (1).

If we look carefully the multiplication table of $K[D_n]$, we distinguish two cases, depending on n being an odd and an even number.

When n is an odd number, let T^+ be the K-vector subspace of $K[D_n]$ with the basis $< a >$, and let T^- be the K-vector subspace of $K[D_n]$ with the basis $< a > b$. Then the multiplication table in $K[D_n] = T^+ \oplus T^-$ is

$$
\begin{array}{c|c|c}
\cdot & T^+ & T^- \\
\hline
T^+ & T^+ & T^- \\
\hline
T^- & T^- & T^+
\end{array}. \tag{2}
$$

When n is an even number, let $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ and $\mathcal{A}_4$ the K-vector spaces of $K[D_n]$ with the bases $< a^2 >, < a^2 > a, < a^2 > b$ and $< a^2 > ab$, respectively. Then the multiplication table of the algebra $K[D_n] = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \mathcal{A}_3 \oplus \mathcal{A}_4$ is

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c}
\cdot & \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 & \mathcal{A}_4 \\
\hline
\mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 & \mathcal{A}_4 \\
\hline
\mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_4 & \mathcal{A}_3 \\
\hline
\mathcal{A}_3 & \mathcal{A}_3 & \mathcal{A}_4 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 \\
\hline
\mathcal{A}_4 & \mathcal{A}_4 & \mathcal{A}_3 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_1
\end{array} \tag{3}
$$

Denote $\{i, j, k\} = \{i, j, k\}$. Then the table (3) shows that $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_k = \mathcal{A}_j\mathcal{A}_i$, so that the multiplication table can be arranged in the following form:

$\cdot$	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_i$	$\mathcal{A}_j$	$\mathcal{A}_k$
$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_i$	$\mathcal{A}_j$	$\mathcal{A}_k$
$\mathcal{A}_i$	$\mathcal{A}_i$	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_k$	$\mathcal{A}_j$
$\mathcal{A}_j$	$\mathcal{A}_j$	$\mathcal{A}_k$	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_i$
$\mathcal{A}_k$	$\mathcal{A}_k$	$\mathcal{A}_j$	$\mathcal{A}_i$	$\mathcal{A}_1$

. (4)

Finally, if $T^+ = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_i$ and $T^- = \mathcal{A}_j \oplus \mathcal{A}_k$, then the table (4) becomes (2).

Therefore, except for the detailed table (3), the K-algebra $K[D_n]$ decompose in $K[D_n] = T^+ \oplus T^-$, with multiplication table (2).

3 A pair of Jordan Triple Systems

Let $T = (T^+, T^-)$ the pair of K-vector spaces defined in the previous section §2.

Unlikely the Jordan pairs, where we have to do with quadratic mappings $Q_\sigma : T^\sigma \to \mathrm{Hom}\,(T^{-\sigma}, T^\sigma)$, $\sigma = \pm$, the decomposition of $K[D_n] = T^+ \oplus T^-$, via table (2), leads to the quadratic mappings $Q_\sigma : T^\sigma \to \mathrm{End}\,(T^{-\sigma})$. More exactly, for any $x \in T^\sigma$ and $y \in T^{-\sigma}$, $\sigma = \pm$, the product $xyx \in T^{-\sigma}$. Thus the assignements $x \mapsto Q_\sigma(x) : y \mapsto xyx$, give rise to maps $Q_\sigma : T^\sigma \to \mathrm{End}\,(T^{-\sigma})$, $\sigma = \pm$. Does the pair $Q = (Q_+, Q_-)$, defined above, verify the conditions JP1-JP3? For, supposing the characteristic $\neq 2$, these conditions become the following linear identities:

JP1′ $\{xy\{xzx\}\} = \{x\{yxz\}x\}$,

JP2′ $\{\{xyx\}yz\} = \{x\{yxy\{z\}$,

JP3′ $\{\{xyx\}z\{xyx\}\} = \{x\{y\{xzx\}y\}x\}$.

for all $x, z \in T^\sigma$ and $y \in T^{-\sigma}$, where $\{xyz\} := Q_\sigma(x, z)y = D_\sigma(x, y)z = Q(x+z)y - Q(x)y - Q(z)y$. Studying the succesion of the signs in JP1′ and JP2′ we conclude that the pair $Q = (Q_+, Q_-)$ cannot satisfy these axioms or others of their type. Concerning JP3, the permited succesions of the signs in the JP3′ lead us to consider, in addition to products xyx, with $x \in T^\sigma$ and $y \in T^{-\sigma}$, the products xzx, with $x, z \in T^\sigma$. So, every K-vector space T^σ together with the quadratic applications $P_\sigma : T^\sigma \to \mathrm{End}(T^\sigma)$ defined by the assignments $x \to P_\sigma(x) : x \to xzx$, is a Jordan Triple System; that is, the following identities and their liniarizations hold:

JTS1 $L_\sigma(x, y)P_\sigma(x) = P_\sigma(x)L_\sigma(y, x)$,

JTS2 $L_\sigma\,(P_\sigma(x)y, y) = L_\sigma\,(x, P_\sigma(y)x)$,

JTS3 $P_\sigma\,(P_\sigma(x)y) = P_\sigma(x)P_\sigma(y)P_\sigma(x)$,

where $L_\sigma(x, y)z = P_\sigma(x, z)y = P_\sigma(x+z)y - P_\sigma(x)y - P_\sigma(z)y$.

Finally, the condition JP3 is replaced by the following three connective relations between the mapping P_σ and Q_σ:

(CR1) $Q_\sigma\left(P_\sigma(x)y\right) = Q_\sigma(x)Q_\sigma(y)Q_\sigma(x)$,
for all $x, y \in T^\sigma$;

(CR2) $P_\sigma\left(Q_{-\sigma}(x)y\right) = Q_{-\sigma}(x)Q_\sigma(y)Q_{-\sigma}(x)$,
for all $x \in T^{-\sigma}$, $y \in T^\sigma$;

(CR3) $Q_\sigma\left(Q_{-\sigma}(x)y\right) = P_\sigma(x)Q_{-\sigma}(y)P_\sigma(x)$,
for all $x \in T^{-\sigma}$, $y \in T^\sigma$.

In this way, we are led to the following definition.

Definition 3.1. *Let T^+ and T^- be two Jordan Triple Systems relative to the quadratic mapping $P_\sigma : T^\sigma \to End(T^\sigma)$, $\sigma = \pm$. Let $Q_\sigma : T^\sigma \to End(T^{-\sigma})$, $\sigma = \pm$, be two quadratic applications. We say that $T = (T^+, T^-)$ is a* **pair of Jordan Triple Systems of Jordan pair type** *if the connecting axioms CR1-CR3 and their liniarizations are fulfielled for $\sigma = \pm$.*

References

[1] E.,Asadurian and M.,Ştefănescu, *Algebre Jordan*, Ed. Niculescu, Bucureşti, 2001.

[2] O.,Loos, *Jordan Pairs*, Lect. Notes Math.**460**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

Department of Mathematics and Informatics,
University of Piteşti,
Str. Târgu din Vale, Nr.1,
0300, Piteşti,
Romania
e-mail: edi@linux.math.upit.ro

Department of Mathematics,
"Ovidius" University,
Bd. Mamaia 124,
Constanţa,
Romania
e-mail: mirelast@univ-ovidius.ro

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 5–16

SOME INTERPOLATION RESULTS FOR THE COMPLETELY BOUNDED OPERATORS

Cristina Antonescu

Abstract

Recently prof. N. Ţiţa had introduced the approximation numbers for completely bounded operators and he had considered some operator ideals on operator spaces, [11].

Using the K-real method of interpolation, [2], [6], [7], [13] we obtain some interpolation results for these approximation ideals.

1 Preliminaries

1.1 Lorentz and Lorentz-Zygmund sequence ideals and operator ideals

Since our constructions and implicit our results are closed related to the Lorentz and Lorentz-Zygmund sequence spaces we shall recall, for the begining, some notions and results related to these sequence spaces. We presume that the sequence spaces c_0, l_p, where $0 < p \leq \infty$, and the notion "**quasi-normed operator ideal**" are known. We use the usual notation $L(E, F)$ for the Banach space of all linear and bounded operator acting between the Banach spaces E, F, and L for $\bigcup\limits_{E,F \text{ Banach spaces}} L(E, F)$.

Definition 1 ([10])

$$\text{For } x = \{x_n\}_n \in l_\infty, \text{ let } s_n(x) := \inf\{\sigma \geq 0 : card\{i : |x_i| \geq \sigma\} < n\}.$$

Remark 1 ([10])

Key Words: Operator space, completely bounded map, approximation numbers of a completely bounded map, the K-real method of interpolation.

If the sequence $x = \{x_n\}_n \in l_\infty$ is ordered such that $|x_n| \geq |x_{n+1}|$, for any natural n, then $s_n(x) = |x_n|$.

Proposition 2 ([10])

The numbers $s_n(x)$ have the following properties:

1. $\|x\|_\infty = s_1(x) \geq s_2(x) \geq ... \geq 0,$ for all $x = \{x_n\}_n \in l_\infty$,

2. $$\begin{aligned} s_{n+m-1}(x+y) &\leq s_n(x) + s_m(y), \text{ for all } x = \{x_i\}_i \in l_\infty, y = \{y_i\}_i \in l_\infty, \\ \text{and } n, m &\in \{1, 2, ...\}, \text{ where } x + y = \{x_i + y_i\}_i, \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} s_{n+m-1}(x \cdot y) &\leq s_n(x) \cdot s_m(y), \text{ for all } x = \{x_i\}_i \in l_\infty, y = \{y_i\}_i \in l_\infty, \\ \text{and } n, m &\in \{1, 2, ...\}, \text{ where } x \cdot y = \{x_i \cdot y_i\}_i, \end{aligned}$$

4. If $x = \{x_i\}_i \in l_\infty$ and $card\{i : x_i \neq 0\} < n$ then $s_n(x) = 0$.

Let us remark the similarity between the definition of $s_n(x)$, where $x = \{x_n\}_n \in l_\infty$, and the definition of the n-th **approximation number** of a linear and bounded operator acting on Banach spaces, $T \in L(E, F)$.

Definition 3 ([8], [9])

Let E, F be Banach spaces and let $T \in L(E, F)$.. The n-**th approximation number** of T, $a_n(T)$, is defined by

$$a_n(T) := \inf\{\|T - S\| : S \in L(E, F), \ rank(S) < n\},$$

$n = 1, 2, ...$

Remark 2 ([8], [9])

There were proved the following properties for the sequence $\{a_n(T)\}_n$, properties similar to those of the sequence $\{s_n(x)\}_n$, [.], [.].

1. $\|T\| = a_1(T) \geq a_2(T) \geq ... \geq 0,$ for all $T \in L(E, F)$,

2. $$\begin{aligned} a_{n+m-1}(T+S) &\leq a_n(T) + a_m(S), \text{ for all } T, S \in L(E, F) \\ \text{and } n, m &\in \{1, 2, ...\}, \end{aligned}$$

3. $a_{n+m-1}(T\circ S) \leq a_n(T)\cdot a_m(S)$, for all $T\in L(F,F_0), S\in L(E,F)$ and $n,m \in \{1,2,...\}$,

4. $a_n(T)=0,\ \dim T<n,$

5. $a_n(I_E)=1,$ if $\dim E\geq n,$ where $I_E(x)=x,$ for all $x\in E.$

Definition 4 ([12])

Let $0<p,q\leq\infty$. The **Lorentz sequence spaces** are defined as follows $l_{p,q} := \left\{x=\{x_i\}_i \in c_0 : \|x\|_{p,q} := \sum\limits_{i=1}^{\infty}\left[i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\cdot s_i(x)\right]^q<\infty\right\}$, if $0<q<\infty$, respectively $l_{p,\infty} := \left\{x=\{x_i\}_i\in c_0 : \|x\|_{p,\infty} := \sup\limits_i i^{\frac{1}{p}}\cdot s_i(x)<\infty\right\}$, and the **Lorentz operator spaces** are defined by

$$L_{p,q}^{(a)} := \left\{T\in L : \|T\|_{p,q} := \sum_{i=1}^{\infty}\left[i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\cdot a_i(T)\right]^q<\infty\right\},$$

if $0<q<\infty$, respectively

$$L_{p,\infty}^{(a)} := \left\{T\in L : \|T\|_{p,\infty} := \sup_i i^{\frac{1}{p}}\cdot a_i(x)<\infty\right\}.$$

Definition 5 ([12])

Let $0<p<\infty$, $0<q\leq\infty$ and $-\infty<\gamma<\infty$. The **Lorentz-Zygmund sequence spaces** are defined by

$$l_{p,q,\gamma} := \left\{x\in c_0 : \|x\|_{p,q,\gamma} := \sum_{i=1}^{\infty}\left[i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(1+\log i)^{\gamma}\, s_i(x)\right]^q<\infty\right\},$$

if $0<q<\infty$, respectively

$$l_{p,\infty,\gamma} := \left\{x\in c_0 : \|x\|_{p,\infty,\gamma} := \sup_i i^{\frac{1}{p}}\cdot(1+\log i)^{\gamma}\cdot s_i(x)<\infty\right\},$$

and the **Lorentz-Zygmund operator spaces** are defined by

$$L_{p,q,\gamma}^{(a)} := \left\{T\in L : \|T\|_{p,q,\gamma} := \sum_{i=1}^{\infty}\left[i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(1+\log i)^{\gamma}\, a_i(x)\right]^q<\infty\right\},$$

if $0 < q < \infty$, respectively

$$L_{p,\infty,\gamma}^{(a)} := \left\{ T \in L : \|T\|_{p,\infty,\gamma} := \sup_i i^{\frac{1}{p}} \cdot (1+\log i)^{\gamma} \cdot a_i(x) < \infty \right\}.$$

Proposition 6 ([12])

We have the following inclusions: $l_{p_0,q_0} \subseteq l_{p_1,q_1}$, if $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1 \leq \infty$, respectively $l_{p,q_0} \subseteq l_{p,q_1}$, if $0 < p < \infty$, $0 < q_0 < q_1 \leq \infty$. (We say that the Lorentz sequence spaces are "lexicographic ordered".)

Proposition 7 ([12])

The following inclusions are true $l_{p_0,q,\gamma_0} \subseteq l_{p_1,q,\gamma_1}$, if $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $-\infty < \gamma_0, \gamma_1 < \infty$, $l_{p,q_0,\gamma} \subseteq l_{p,q_1,\gamma}$, if $0 < p < \infty$, $0 < q_0 < q_1 \leq \infty$, $\gamma > 0$ and $l_{p,q,\gamma_0} \subseteq l_{p,q,\gamma_1}$, if $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\gamma_0 > \gamma_1$. (We say that the Lorentz-Zygmund sequence spaces are "lexicografic ordered".)□

We continue by giving some basic facts about the classical real interpolation method, called the K-method, and the interpolation result proved for the sequence spaces above introduced.

An introduction on interpolation theory can be find, for example, in [2], [15], and for details on interpolation properties of Lorentz sequence spaces we recommend [6], [7], [12].

Definition 8 ([2], [8])

For a compatible couple (X_0, X_1), in the sense of the interpolation theory, of normed or quasi-normed spaces, and $t > 0$ consider the and the space $X_0 + X_1 := \{x : \text{there are } x_0 \in X_0,\ x_1 \in X_1 \text{ such that } x = x_0 + x_1\}$ and the functional:

$$K(t,x) := \inf \{\|x_0 \mid X_0\| + t \cdot \|x_1 \mid X_1\| : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i, i = 0,1\}.$$

Let $0 < \theta < 1$ and $0 < q \leq \infty$. The **interpolation space** $(X_0, X_1)_{\theta,q}$ is defined as follows:

$$(X_0, X_1)_{\theta,q} := \left\{ x \in X_0 + X_1 : \|x\|_{\theta,q} := \left(\int_0^{\infty} \left[t^{-\theta} K(t,x)\right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

if $q < \infty$, and

$$(X_0, X_1)_{\theta,\infty} := \left\{ x \in X_0 + X_1 : \|x\|_{\theta,\infty} := \sup_{t>0} t^{-\theta} \cdot K(t,x) < \infty \right\}.$$

It is easy to prove that $\|\cdot\|_{\theta,q}$ are quasi-norms, for any $0 < \theta < 1$ and $0 < q \leq \infty$.

Theorem 9 *(reiteration theorem)* ([6])

If (A_0, A_1) is a couple of quasi-normed spaces and (E_0, E_1) is a couple of interpolation spaces, where $E_i = (A_0, A_1)_{\theta_i, q_i}$, $0 < \theta_i < 1$, $\theta_0 \neq \theta_1$, $0 < q_i \leq \infty$, $i = 0, 1$, then $(E_0, E_1)_{\lambda,p} = (A_0, A_1)_{\theta,p}$ with equivalent quasi-norms. Here $\theta = (1 - \lambda) \cdot \theta_0 + \lambda \cdot \theta_1$, $0 < \lambda < 1$ and $0 < p \leq \infty$.

Proposition 10 ([6], *[12]*)

Let $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q \leq \infty$ and $0 < \theta < 1$. Then $(l_{p_0}, l_{p_1})_{\theta,q} = l_{p,q}$, where $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, the two quasi-norms being equivalent.

Proposition 11 ([6], [12])

Let $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$ and $0 < \theta < 1$. Then $(l_{p_0,q_0}, l_{p_1,q_1})_{\theta,q} = l_{p,q}$, where $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, the two quasi-norms being equivalent.

Proposition 12 ([14])

1. Let $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$, $0 < \gamma_0, \gamma_1 < \infty$ and $0 < \theta < 1$. Then $\left(l_{p_0,q_0,\gamma_0}, l_{p_1,q_1,\gamma_1}\right)_{\theta,q} \subseteq l_{p,q,\gamma}$, where $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ and $\gamma = (1 - \theta) \cdot \gamma_0 + \theta \cdot \gamma_1$.

1.2 Operator spaces. Completely bounded maps

The notion of "**operator space**" is intermediate between "**Banach space**" and "**C*-algebra**".

Definition 13 ([10], [11])

By an **operator space** we mean a closed subspace of $L(H)$, the space of all linear and bounded operators $T : H \to H$, for some Hilbert space H.□

We shall frequently invoke an abstract characterization of operator spaces which uses the notion of **matricial structure.**

We denote always by M_n the space of the complex $n \times n$ matrices equipped with the usual operator norm so M_n is identified with $L(l_2^n)$.

Definition 14 ([10], *[11]*)

By a **matricial structure** on a vector space E we mean that, for any natural n, we are given a norm on the space $M_n(E)$ of all $n \times n$ matrices with entries in E.

So in particular for $n = 1$ we have a norm on E.

We will say that it is complete if all these norms are complete.

Definition 15 ([10], [11])

Let E be a vector space endowed with a matricial structure. We say that we have an L_∞**−matricial structure** if these norms satisfy the following relations

1. $\|x \oplus y\|_{n+m} = \max\{\|x\|_n, \|y\|_m\}$,
2. $\|\alpha \cdot x \cdot \beta\|_n \leq \|\alpha\| \cdot \|x\|_n \cdot \|\beta\|$, for all $x \in M_n(E)$, $y \in M_m(E)$, $\alpha, \beta \in M_n$.□

Remark 3 ([10], [11])

It was proved that for any L_∞−matricial structure on a vector space E there is a Hilbert space H and an embedding of E into $L(H)$ such that the norm from the matricial structure on $M_n(E)$ coincides with the norm induced by the space $M_n(L(H))$. If the structure is complete the subspace of $L(H)$ will be closed.

Conversely every subspace E of $L(H)$ is equipped with a natural L_∞-matricial structure by giving to $M_n(E)$ the norm induced on it by $M_n(L(H))$.

Thus operator spaces can be viewed as vector spaces equipped with a complete L_∞−matricial structure.

Definition 16 ([10], [12])

Let $E \subset L(H_1)$ and $F \subset L(H_2)$ be operator spaces. Let $u : E \to F$ be a linear map and

$u_n : (x_{ij})_{ij} \in M_n(E) \to (u(x_{ij}))_{ij} \in M_n(F)$. We say that u is **completely bounded, c.b.,** if $\sup_n \|u_n\| < \infty$ and we define $\|u\|_{c.b.} := \sup_n \|u_n\|$.

Let $E \subset L(H_1)$ and $F \subset L(H_2)$ be operator spaces. We denote by $c.b.(E, F) := \{u : E \to F : u \text{ is completely bounded}\}$.

We shall always consider $c.b.(E, F)$ equipped with $\|\cdot\|_{c.b.}$.

We denote by $c.b. := \bigcup_{E,F \text{ operator spaces}} c.b.(E, F)$.

1.3 Approximation numbers of completely bounded operators. Operator ideals generated by the approximation numbers

Definition 17 ([12])

Let $E \subset L(H_1)$, $F \subset L(H_2)$ be operator spaces and let $u \in c.b.(E, F)$. The n**-th approximation number** of u, $a_n^{c.b.}(u)$, will be defined as follows $a_n^{c.b.}(u) := \inf\{\|u - a\|_{c.b.} : a \in c.b.(E, F),\ rank(a) < n\}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Remark 4 ([12])

From the definition it follows that $\|u\|_{c.b.} = a_1^{c.b.}(u) \geq a_2^{c.b.}(u) \geq ... \geq 0$.

Proposition 18 .

Let $E \subset L(H_1)$, $F \subset L(H_2)$ be operator spaces and let $u_1, u_2 \in c.b.(E,F)$. The following inequality is true for every $n, m = 1, 2, ...,$ $a_{n+m-1}^{c.b.}(u_1 + u_2) \leq a_n^{c.b.}(u_1) + a_m^{c.b.}(u_2)$.

Proof. Let $u_1, u_2 \in c.b.(E,F)$ and $m, n = 1, 2, ...$ We fix $\varepsilon > 0$ arbitrary. There are a_1, with $rank(a_1) < n$, and a_2, with $rank(a_2) < m$, such that $\|u_1 - a_1\|_{c.b.} \leq a_n^{c.b.}(u_1) + \frac{\varepsilon}{2}$, $\|u_2 - a_2\|_{c.b.} \leq a_m^{c.b.}(u_2) + \frac{\varepsilon}{2}$. We obtain

$$a_{n+m-1}^{c.b.}(u_1 + u_2) \leq$$
$$\leq \|(u_1 + u_2) - (a_1 + a_2)\|_{c.b.} \leq$$
$$\leq \|u_1 - a_1\|_{c.b.} + \|u_2 - a_2\|_{c.b.} \leq$$
$$\leq a_n^{c.b.}(u_1) + \frac{\varepsilon}{2} + a_m^{c.b.}(u_2) + \frac{\varepsilon}{2} \leq a_n^{c.b.}(u_1) + a_m^{c.b.}(u_2) + \varepsilon.$$

ε being arbitrary it follows that $a_{n+m-1}^{c.b.}(u_1 + u_2) \leq a_n^{c.b.}(u_1) + a_m^{c.b.}(u_2)$.□

Remark 5 .

In [12] N. Ţiţa had considered a subclass of $c.b.$, the quasi-normed operator ideal $\Phi - c.b. := \left\{ u \in c.b. : \|u\|_\Phi^{c.b.} := \Phi\left(\left\{a_n^{c.b.}(u)\right\}_n\right) < \infty \right\}$, Φ being a **symm norming function,** the construction being similar to that of the operator ideal $L_\Phi^{(a)}$.

We can introduce, also, other operator ideals similar to the operator ideals $L_{p,q}^{(a)}$, $L_{p,q,\gamma}^{(a)}$.

Definition 19 .

Let $E \subset L(H_1)$, $F \subset L(H_2)$ be operator spaces and $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $-\infty < \gamma < \infty$. We denote by

1.$c.b_{p,q}(E,F) :=$

$$= \left\{ u \in c.b.(E,F) : \|u\|_{p,q}^{c.b.} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot a_n^{c.b.}(u) \right]^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

if $0 < q < \infty$,

2.$c.b_{p,\infty}(E,F) := \left\{ u \in c.b.(E,F) : \|u\|_{p,\infty}^{c.b.} := \sup_n \left[n^{\frac{1}{p}} \cdot a_n^{c.b.}(u) \right] < \infty \right\}$

and $c.b_{p,q} := \bigcup_{E,F \text{ operator spaces}} c.b_{p,q}(E,F)$,respectively by

3.$c.b_{p,q,\gamma}(E,F) :=$

1. $\left\{u \in c.b.(E,F) : \|u\|^{c.b.}_{p,q,\gamma} := \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(1+\log n)^{\gamma} a_n^{c.b.}(u)\right]^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty\right\}$,
if $0 < q < \infty$,

4.$c.b_{p,\infty,\gamma}(E,F) :=$

1. $\left\{u \in c.b.(E,F) : \|u\|^{c.b.}_{p,\infty,\gamma} := \sup_n \left[n^{\frac{1}{p}} \cdot (1+\log n)^{\gamma} \cdot a_n^{c.b.}(u)\right] < \infty\right\}$, and
$c.b_{p,q,\gamma} := \bigcup_{E,F \text{ operator spaces}} c.b_{p,q,\gamma}(E,F)$.

Remark 6 .

Let $E \subset L(H_1)$, $F \subset L(H_2)$ be operator spaces and $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $-\infty < \gamma < \infty$, $u \in c.b.(E,F)$. Then $u \in c.b_{p,q}(E,F) \Leftrightarrow \{a_n^{c.b.}(u)\}_n \in l_{p,q}$, respectively $u \in c.b_{p,q,\gamma}(E,F) \Leftrightarrow \{a_n^{c.b.}(u)\}_n \in l_{p,q,\gamma}$.

Proposition 20 .

Let $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $-\infty < \gamma < \infty$. Then $\left(c.b_{p,q}, \|\cdot\|^{c.b.}_{p,q}\right)$, $\left(c.b_{p,q,\gamma}, \|u\|^{c.b.}_{p,q,\gamma}\right)$ are quasi-normed operator ideals.

Proof. Is similar to the proof of the fact that $L^{(a)}_{p,q}$, $L^{(a)}_{p,q,\gamma}$ the classical Lorentz operator ideal generated by the approximation numbers, are quasi-normed operator ideals ([8], [9], [12]).□ .

We shall establish here some properties useful for the interpolation results announced in the abstract, properties which are similar to the classical case of $L^{(a)}_{p,q}$, $L^{(a)}_{p,q,\gamma}$.

Theorem 21 .

The following inclusions are true: $c.b_{p_0,q_0} \subseteq c.b_{p_1,q_1}$ for $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1 \leq \infty$, respectively $c.b_{p,q_0} \subseteq c.b_{p,q_1}$ for $0 < p < \infty$, $0 < q_0 < q_1 \leq \infty$,and $\|u\|^{c.b.}_{p,q_1} \leq \|u\|^{c.b.}_{p,q_0}$ for any $u \in c.b_{p,q_0}$.

Proof. Let $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1 \leq \infty$. $u \in c.b_{p_0,q_0} \Leftrightarrow \{a_n^{c.b.}(u)\}_n \in l_{p_0,q_0} \subseteq l_{p_1,q_1} \Rightarrow \{a_n^{c.b.}(u)\}_n \in l_{p_1,q_1} \Leftrightarrow u \in c.b_{p_1,q_1}$. Similar result the second inclusion.□

Theorem 22 .

The following inclusions are true $c.b_{p_0,q,\gamma_0} \subseteq c.b_{p_1,q,\gamma_1}$ for $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q, \leq \infty$, and any γ_0, γ_1, respectively $c.b_{p,q_0,\gamma} \subseteq c.b_{p,q_1,\gamma}$ for $0 < p < \infty$, $0 < q_0 < q_1 \leq \infty$, $\gamma > 0$.

Proof. We follow the same idea with the previous theorem, this time using the lexicografic order of the Lorentz-Zygmund sequence spaces.□

Theorem 23 .

For any $0 < p,q \leq \infty$, $0 < \gamma$ the following equivalences are true:
$1.u \in c.b_{p,q} \Leftrightarrow \left\{a_n^{c.b.}(u)\right\}_n \in l_{p,q} \Leftrightarrow \left\{\frac{1}{n}\cdot \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{c.b.}(u)\right\}_n \in l_{p,q}$,

Proof. It results from the similar equivalence true for the Lorentz sequence space.□

2 Interpolation results for the completely bounded operators

Theorem 24 .

Let H_1, H_2 be Hilbert spaces and $E \subset L(H_1)$, $F \subset L(H_2)$ operator spaces. If $0 < p_0 < p_1 < \infty, 0 < q \leq \infty, 0 < \theta < 1$ then $\left(c.b_{p_0}(E,F), c.b_{p_1}(E,F)\right)_{\theta,q} = c.b_{p,q}(E,F)$, where $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, the quasi-norms being equivalent.
Proof. Let $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 \leq q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$. It is known that, For every $T \in L_{p_1}^{(a)}$, $K\left(t, T, L_{p_0}^{(a)}, L_{p_1}^{(a)}\right) \sim K\left(t, \{a_n(u)\}_n, l_{p_0}, l_{p_1}\right)$, where "$\sim$" indicates equivalence with constants that not depend on t, T, [1]. In the same way we can prove that, for every $u \in c.b_{p_1,q_1}$, $K\left(t, u, c.b_{p_0}, c.b_{p_1}\right) \sim K\left(t, \left\{a_n^{c.b.}(u)\right\}_n, l_{p_0}, l_{p_1}\right)$. Hence by the definition of the interpolation spaces $u \in \left(c.b_{p_0}(E,F), c.b_{p_1}(E,F)\right)_{\theta,q} \Leftrightarrow \left\{a_n^{c.b.}(u)\right\}_n \in \left(l_{p_0}, l_{p_1}\right)_{\theta,q}$. But $\left(l_{p_0}, l_{p_1}\right)_{\theta,q}$ $l_{p,q}$, where $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, with equivalent quasi-norms, so $\left\{a_n^{c.b.}(u)\right\}_n \in l_{p,q} \Leftrightarrow u \in c.b_{p,q}(E,F)$. In conclusion $u \in \left(c.b_{p_0}(E,F), c.b_{p_1}(E,F)\right)_{\theta,q} \Leftrightarrow u \in c.b_{p,q}(E,F)$, and we have equivalent quasi-norms .□

Corollary 25 .

Let H_1, H_2 be Hilbert spaces and $E \subset L(H_1)$, $F \subset L(H_2)$ operator spaces If $0 < p_0 < p_1 < \infty, 0 < q_0, q_1, q \leq \infty, 0 < \theta < 1$ then $\left(c.b_{p_0,q_0}(E,F), c.b_{p_1,q_1}(\right.$ $c.b_{p,q}(E,F)$, where $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, the quasi-norms being equivalent.
Proof. By the above theorem and the reiteration theorem.□

Theorem 26 .

Let H_1, H_2 be Hilbert spaces and $E \subset L(H_1)$, $F \subset L(H_2)$ operator spaces If $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$, $0 < \gamma_0, \gamma_1$, $0 < \theta < 1$ then $\left(c.b_{p_0,q_0,\gamma_0}(E,F), c.b_{p_1,q_1,\gamma_1}(E,F)\right)_{\theta,q} \subseteq c.b_{p,q,\gamma}(E,F)$, where $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ and $\gamma = (1-\theta)\cdot\gamma_0 + \theta\cdot\gamma_1$.
Proof. N. Tita had proved the following result:

Proposition 27 .

Let E, F be Banach spaces, $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$, $0 < \gamma_0, \gamma_1 < \infty$ and $0 < \theta < 1$. Then $\left(L^{(a)}_{p_0,q_0,\gamma_0}(E,F), L^{(a)}_{p_1,q_1,\gamma_1}(E,F)\right)_{\theta,q} \subseteq L^{(a)}_{p,q,\gamma}(E,F)$, where $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ and $\gamma = (1-\theta)\cdot\gamma_0 + \theta\cdot\gamma_1$.

Taking account of the similarity between $L^{(a)}_{p_0,q_0,\gamma_0}$ and $c.b_{p_0,q_0,\gamma_0}$ we can prove the inclusion from our theorem.□

Remark 7 .

1. Other interpolation results for the spaces $c.b_{p,q,\gamma}(E,F)$can be obtained by using the "**real interpolation method with functional parameter**" owed to C. Merucci. Results of this kind have been obtained by F. Cobos, for the ideals $L^{(a)}_{p_0,q_0,\gamma_0}$ in [4].

2. We have determined,by means of estimates of Claude Merucci interpolation method, some interpolation results for the sequence spaces of the type $l_{(\Phi_\alpha)_p}$, where $1 \leq p < \infty$,

$$l_{(\Phi_\alpha)_p} = \left\{ x = \{x_i\}_i \in l_\infty : \|x\|^{(p)}_{\Phi_\alpha} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot (s_i(x))^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

, $\alpha = \{\alpha_i\}_i$, being sequences of real numbers of a certain type, also, results, of the same kind, concerning the interpolation of the operator classes

$$L^{(a)}_{(\Phi_\alpha)_p}(E,F) = \left\{ T \in L(E,F) : \left\| T | L^{(a)}_{(\Phi_\alpha)_p} \right\| :\doteq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n(T)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

[1].

Using the same ideas we can, also, obtain similar results for the operator ideals $c.b_{(\Phi_\alpha)_p}$.

References

[1] C. Antonescu, A. Subţire, *Interpolation results using Claude Merucci's method,* Prezentată la Conferinţa Anuală a SSMR, Craiova, Mai 1998

[2] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction,* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1976.

[3] D. P. Blecher, V. I. Paulsen, *Tensor products of operator spaces,* J. Funct. Anal. **99** (1991), 262-292.

[4] F. Cobos, *On the Lorentz-Marcinkiewicz operator ideal*, Math. Nachr., **126**, 1986, 281-300.

[5] E. Effros, Z. J. Ruan, *On the caracterisation of operator spaces,* Proc. A.M.S. **119** (1993), 579-584.

[6] T. Holmstedt, *Interpolation of quasi-normed spaces*, Math. Scand., **26**, 1970, 177-199.

[7] H. König, *Interpolation of operator ideals with an application to eigenvalue distribution problems*, Math. Ann., **233**, 1978, 35-48.

[8] A. Pietsch, *Operator ideals,* North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1980.

[9] A. Pietsch, *Eigenvalues and s-numbers*, Cambridge Univ. Press, 1987.

[10] G.Pisier, *Operator spaces and similarity problems*, Documenta Math. (I.C.M. 1998), I-429-452

[11] G. Pisier, *The operator Hilbert space OH, complex interpolation and tensor norms*, Memoirs A.M.S. vol. **122**, number 585, 1996.

[12] N. Tiţa, *S-numbers operator ideals*, Ed. Univ. Transilvania, Braşov, 1998.

[13] N. Tiţa, *Some approximation ideals*, Preprint 1999.

[14] N. Tiţa, *Some properties of Lorentz-Zygmund ideals*, preprint, 1999.

[15] H. Triebel, *Interpolation theory, functions spaces, differential operators*, VEB, Deutscher Verlag der Wiss., Berlin, 1978.

"Dr. I. Meşotă" College,
2200 Braşov ,
Romania
e-mail: adiant@fx.ro

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 17–24

ABOUT THE POSITIVITY OF THE HAUSDORFF H - MEASURE

Alina Bărbulescu

Abstract

The purpose of this paper is to generalize the theorems 8.6. and 8.11. from [1], which give the estimation of the Hausdorff measure of a set.

1.Introduction

- We denote:

$$R^n = \underbrace{R \times R \times ... \times R}_{n}$$

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

the norm of x, $(\forall)\, x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$;

$$d(x,y) = \sup_{x,y \in E} |x - y|\,, (\forall) x, y \in R^n,$$

the distance between x and y;

$$d(E) = \sup_{x,y \in E} d(x,y), (\forall) E \subset R^n,$$

the diameter of E.

- If $E \subset R^n, s, \delta \in R_+$, let H^s_δ be the number

$$H^s_\delta = \inf \sum_{i=1}^{\infty} d(E_i)^s,$$

inf beeing over all the sets $\{E_i\}_{i \in N^*} \subset R^n$, with $d(E_i) < \delta$, covering all poins of E and:

$$H^s_*(E) = \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(E) = \sup_{\delta > 0} H^s_\delta(E),$$

the s-dimensional Hausdorff exterior measure of E.

The restriction of H^s_* on the field of the H^s_*-measurable sets, denoted by H^s, is called the **s-dimensional Hausdorff measure** of E

- If $E \subset R^n$, $s \in R_+$, the unique real number, denoted **dimE**, which satisfies:

$$H^s(E) = \infty if 0 \leq s < dimE \; and \; H^s(E) = 0 \; if \; dimE < s < \infty$$

is called the **Hausdorff dimension** of E.

A H^s-measurable set, $A \subset R^n$,such that $0 < H^s(E) < \infty$ is called a **s - set.**

Let E be a subset of R^n and $\delta > 0$. **A** δ **- parallel body of E** is the close set of the points situated at the distance δ from E, that is:

$$[E]_\delta = \left\{ x \in R^n : \inf_{y \in E} |x - y| \leq \delta \right\}.$$

The **Hausdorff metric** is defined on the set of all compact and nonvoid subsets of R^n :

$$\Delta(E, F) = \inf \{\delta : E \subset [F]_\delta \text{ and } F \subset [E]_\delta\}$$

Let $h(r)$ be a continuous function, defined on $[0, r_0)$, $(r_0 > 0)$, nondecreasing and such that $\lim_{r \to 0} h(r) = 0$, called **a measure function.**

Let $E \subset R^n$ be a bounded set, $\delta \in R_+$. If:

$$H_{h,\delta}(E) = \inf \sum_i h(\rho_i)$$

inf beeing over all coverings of E with a coutable number of spheres of radius $\rho_i \leq \delta$, we define **the Hausdorff h-measure** of E by:

$$H_h(E) = \lim_{\delta \to 0} H_{h,\delta}(E).$$

- Let $\varphi_1, \varphi_2 > 0$ be functions defined in a neighborhood of $0 \in R^n$. W denote by:
$$\varphi_1 \sim \varphi_2, for x \to 0,$$
if there is $r > 0$, $Q > 0$, satisfying:
$$\frac{1}{Q}\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq Q\varphi_1(x), (\forall) x \in R^n, |x| < r.$$

- A mapping $\psi : R^n \to R^n$ is called a **contraction** if $|\psi(x) - \psi(y)|$ $c\,|x - y|$, for all $x, y \in R^n$,where $c < 1$.

The **ratio** of the contraction is the infimum value of c for which thi inequality holds for all x,y.

A contraction that transforms every subset of R^n to a geometrically simila set is called a **similitude.**

- A set $E \subset R^n$ is called **invariant** for a set of contractions $\psi_1, \psi_2, ..., \psi$ if
$$E = \bigcup_{j=1}^{m} \psi_j(E).$$

- If $\{\psi_j\}_{j=1,2,\ldots,m}$ is a set of contractions, let denote the transformatio of subsets of R^n defined by: $\psi(F) = \bigcup_{j=1}^{m} \psi_j(F)$.

We denote the iterates of ψ by: $\psi^0(F) = F$ and $\psi^{k+1}(F) = \psi(\psi^k(F))$ fo $k \geq 0$.

- If V is a bounded open subset of R^n,an **osculatory packing** of V is sequence of closed balls $\{B_i\}_{i\in N^*}$ such that, for each j, B_j is the larges ball (or one of the largest) contained in $V - \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$.

The **Apollonian packing** is obtained if V is the interior of a curvilinia triangle in R^2.

$E = V - \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$ is a close set, named **the residual set** of the packing

2. Known results

Lemma 1 *Given a set of contractions* $\{\psi_j\}_{j=1,2,\ldots,m}$ *on* R^n *with contraction ratios* $r_j < 1$ *there exists a unique*

Fără dificultate se arată că dacă $x_k \in \mathbf{R}_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$, atunci

$$\sigma_r\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) = \frac{\sigma_{n-r}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \quad \forall r = \overline{0,n}, \tag{5}$$

şi că

$$\sigma\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) = \frac{\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{6}$$

Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $s = a + b \in \mathbf{R}$ şi funcţiile continue

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$, $k = \overline{1,n}$ cu proprietăţile

- există $c \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ astfel încât $f(s - x) = c \cdot f(x), \forall x \in [a, b]$, (7)

- $g_k(x) \cdot g_k(s - x) = 1, \forall x \in [a, b], \forall k = \overline{1, n}.$ (8)

În condiţiile enunţate mai sus demonstrăm :

Teorema 1. *Are loc egalitatea:*

$$\int_a^b f(x) \cdot \ln \sigma(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)) : dx =$$

$$= \frac{c}{c-1} \int_a^b f(x) \cdot \ln(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)) : dx = \tag{9}$$

$$= \frac{c}{c-1} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f(x) \cdot \ln g_k(x) : dx,$$

în condiţiile precizate anterior.

Demostraţie. Demonstrăm mai întâi următoarea :

Lemă. *Dacă $h : [a, b] \to \mathbf{R}$, este o funcţie integrabilă, atunci*

$$\int_a^b h(x) : dx = \int_a^b h(a + b - x) : dx. \tag{10}$$

Demonstraţia lemei. Facem schimbarea de variabilă

$t = \varphi(x) = a + b - x$, cu $\varphi'(x) = -1$, $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$ şi atunci :

$$\int_a^b h(x) : dx = -\int_b^a h(a + b - t) : dt = \int_a^b h(a + b - x) dx$$

ceea ce încheie demonstraţia lemei.

Să trecem acum la demonstraţia teoremei 1.

În relaţia (10) considerăm $h : [a,b] \to \mathbf{R}$,

$$h(x) = f(x) \cdot \ln \sigma(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$$

şi astfel obţinem :

$$I = \int_a^b f(x) \cdot \ln \sigma(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))\, dx =$$

$$= \int_a^b f(s-x) \cdot \ln \sigma(g_1(s-x), g_2(s-x), \dots, g_n(s-x))\, dx =$$

$$= c \cdot \int_a^b f(x) \cdot \ln \sigma\left(\frac{1}{g_1(x)}, \frac{1}{g_2(x)}, \dots, \frac{1}{g_n(x)}\right) dx =$$

$$= c \cdot \int_a^b f(x) \cdot \ln \frac{\sigma(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))}{\sigma_n(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))}\, dx =$$

$$= c \cdot \int_a^b f(x) \cdot \ln \sigma(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))\, dx -$$

$$-c \cdot \int_a^b f(x) \cdot \ln \sigma_n(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))\, dx =$$

$$= c \cdot I - c \cdot \int_a^b f(x) \cdot \ln \sigma_n(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)) dx =$$

$$= c \cdot I - c \cdot \int_a^b \left(f(x) \cdot \sum_{k=1}^n \ln g_k(x) \right) dx = c \cdot I - c \sum_{k=1}^n \int_a^b f(x) \cdot \ln g_k(x)\, dx$$

de unde rezultă că : $(c-1) \cdot I = c \cdot \sum_{k=1}^n \int_a^b f(x) \cdot \ln g_k(x)\, dx$ adică relaţia din enunţ.

Corolar 1.1 *Dacă $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă şi impară iar $g_k(x) = (k+1)^{u(x)}$, $k = \overline{1,n}$, atunci în condiţiile teoremei 1 avem:*

$$I = \int_a^b f(x) \cdot \ln \sigma(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)) dx = \frac{c}{c-1} \sum_{k=1}^n \int_a^b f(x) \cdot \ln(k+1)^{u(x)} dx =$$

$$= \frac{c}{c-1} \cdot \sum_{k=1}^n \int_a^b f(x) \cdot u(x) \cdot \ln(k+1) dx = \frac{c}{c-1} \cdot \sum_{k=1}^n \ln(k+1) \cdot \int_a^b f(x) \cdot u(x) dx =$$

$$= \frac{c \cdot \ln((n+1)!)}{c-1} \cdot \int_a^b f(x) \cdot u(x) dx. \tag{11}$$

Corolar 1.2. *Dacă $g_1(x) = g_2(x) := \ldots g_n(x) = g(x)$, unde $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ au proprietăţile cerute în teorema 1, atunci (9) devine :*

$$\int_a^b f(x) \cdot \ln(1+g(x))^n dx = \frac{c}{c-1} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \ln g^n(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \int_a^b f(x) \cdot \ln(1+g(x)) dx = \frac{c}{c-1} \cdot n \cdot \int_a^b f(x) \cdot \ln g(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x) \cdot \ln(1+g(x)) dx = \frac{c}{c-1} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \ln f(x) dx. \tag{12}$$

Aplicaţii

A.1.1. Dacă în corolarul 1.1 considerăm $a + b = 0$ şi $c = -1$ rezultă că f este o funcţie impară şi atunci :

$$\int_{-b}^b f(x) \cdot \ln \sigma(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \int_{-b}^b f(x) \cdot \ln g_k(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \ln((n+1)!) \int_{-b}^b f(x) \cdot u(x) dx \tag{13}$$

Dacă în (13) luăm $n = 2$, obţinem că

$$\int_{-b}^b f(x) \cdot \ln\left(1 + 2^{u(x)} + 3^{u(x)} + 6^{u(x)}\right) dx = \frac{1}{2} \cdot \ln 6 \cdot \int_{-b}^b f(x) \cdot u(x) dx. \tag{14}$$

În cazul în care $b = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \sin 2x$, $u(x) = \sin x$, din (14), rezultă

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot \ln\left(1 + 2^{\sin x} + 3^{\sin x} + 6^{\sin x}\right)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln 6 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot \sin x\, dx = \frac{2}{3} \cdot \ln 6.$$

Prin urmare am obţinut soluţia Problema 23271 propusă de *D.Acu* în Gazeta Matematică nr. 5/1995 pag 233.

A.1.2. Dacă în corolarul 1.2, $a + b = 0$, $b > 0$ şi $c = -1$ rezultă că f este impară şi atunci :

$$\int_{-b}^b f(x) \cdot \ln(1+g(x))\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-b}^b f(x) \cdot \ln g(x)\, dx. \tag{15}$$

Dacă în (15) luăm $g(x) = d^{u(x)}$, unde $d \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$ iar $u : [-b, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie impară , rezultă :

$$\int_{-b}^{b} f(x) \cdot \ln(1 + d^{u(x)})dx = \frac{1}{2} \cdot \ln d \cdot \int_{-b}^{b} f(x) \cdot u(x)dx. \tag{16}$$

Deoarece funcţia $f \cdot u : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţia pară din (16) deducem că :

$$\int_{-b}^{b} f(x) \cdot \ln(1 + d^{u(x)})\, dx = \ln d \cdot \int_{0}^{b} f(x) \cdot u(x)dx. \tag{17}$$

Pentru cazul $f = u$ din (17) obţinem :

$$\int_{-b}^{b} f(x) \cdot \ln(1 + d^{f(x)})\, dx = \ln d \cdot \int_{0}^{b} f^2(x)dx, \tag{18}$$

de unde, pentru $b = 1$, rezultă :

$$\int_{-1}^{1} f(x) \cdot \ln(1 + d^{f(x)})dx = \ln d \cdot \int_{0}^{1} f^2(x)\, dx. \tag{19}$$

Din (19), luând $f(x) = x$, obţinem că:

$$\int_{-1}^{1} x \cdot \ln(1 + d^{x})dx = \ln d \cdot \int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot \ln d.$$

Teorema 2. *În aceleaşi condiţii din teorema 1, are loc relaţia:*

$$\int_{a}^{b} f(x) \cdot \ln^2 \sigma(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))\, dx = \frac{2c}{c-1} \cdot$$

$$\cdot \int_{a}^{b} f(x) \cdot \ln \sigma(g_1(x), \ldots, g_n(x)) \cdot \ln \sigma_n(g_1(x), \ldots, g_n(x))\, dx -$$

$$-\frac{c}{c-1} \cdot \int_{a}^{b} f(x) \cdot \ln^2 \sigma_n(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))dx. \tag{20}$$

Demonstraţie. Notăm :

$$J = \int_{a}^{b} f(x) \cdot ln^2\sigma(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))\, dx$$

şi atunci, conform lemei, avem:

$$J = \int_{a}^{b} f(s-x) \cdot ln^2\sigma(g_1(s-x), g_2(s-x), \ldots, g_n(s-x))\, dx =$$

$$= c \cdot \int_a^b f(x) \cdot \ln^2 \frac{\sigma(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))}{\sigma_n \sigma(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))}\, dx =$$

$$= c \cdot \int_a^b f(x) \cdot (\ln \sigma(g_1(x), \ldots, g_n(x)) - \ln \sigma_n(g_1(x), \ldots, g_n(x)))^2\, dx =$$

$$= c \cdot \int_a^b f(x) \cdot \ln^2 \sigma(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))\, dx -$$

$$-2c \int_a^b f(x) \ln \sigma(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)) \sigma_n(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))\, dx +$$

$$+ c \cdot \int_a^b f(x) \cdot \ln^2 \sigma_n(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow J = \frac{c}{c-1} \left(2 \int_a^b f(x) \ln \sigma(g_1(x), \ldots, g_n(x)) \ln \sigma_n(g_1(x), \ldots, g_n(x) \right) dx -$$

$$- \int_a^b f(x) \cdot \ln^2 \sigma_n(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))\, dx$$

şi astfel teorema este demonstrată.

Corolar 2.1. *Dacă* $g_1(x) = g_2(x) = \ldots = g_n(x) = g(x)$, *atunci*

$$\left(\int_a^b f(x) \cdot \ln^2(1 + g(x) \right)^2 dx =$$

$$= \frac{c}{c-1} \left(2 \int_a^b f(x) \cdot \ln(1 + g(x)) \cdot \ln g(x) dx - \int_a^b f(x) \cdot \ln^2 g(x) \right) dx \quad (21)$$

Aplicaţia 2.1. Dacă în (21), $g(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ unde $u : [a, b] \to \mathbf{R}$ este continuă şi $u(s - x) = u(x)$, $\forall x \in [a, b]$, atunci :

$$\int_a^b f(x) \cdot \ln^2(1 + \mathrm{e}^{u(x)}) dx =$$

$$= \frac{c}{c-1} \cdot \left(2 \cdot \int_a^b f(x) \cdot \ln(1 + \mathrm{e}^{u(x)}) \cdot u(x) dx - \int_a^b f(x) \cdot u^2(x) \right) dx. \quad (22)$$

Dacă în (22), $a + b = 0$, $b > 0$ şi $f = u$, atunci f este impară şi prin urmare :

$$\int_{-b}^b f(x) \cdot \ln^2(1 + \mathrm{e}^{f(x)})\, dx = \int_{-b}^b f^2(x) \cdot \ln(1 + \mathrm{e}^{f(x)}) dx. \quad (23)$$

În sfârşit, dacă în (23), $b = 1$ şi $f(x) = x$, atunci

$$\int_{-1}^{1} x \cdot \ln^2(1 + e^x)\, dx = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \ln(1 + e^x)\, dx. \tag{24}$$

Bibliografie

[1] Bătineţu-Giurgiu M.D., (colectiv), *Exerciţii şi Probleme de Analiză matematică pentru clasele a XI-a şi a XII-a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1979.

[2] Bencze Mihály, *One integral type and Applications*, Octogon Mathematical Magazine, vol.6, Nr.2, October 1998, pag.121-127.

Calea 13 Septembrie 59-61,
bl.59-51, sc.2, ap.28, sector 5 ,
Bucureşti, 76117,
Romania

Str. Mărgeanului nr. 6A,
bl.M 69, sc.2, ap.58, sector 5,
Bucureşti, 76461,
Romania

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 33–38

ŞIRURI DE TIP EULER DEFINITE PRIN POLINOAME

D.M. Bătineţu - Giurgiu şi Augustin Semenescu

Fie $P \in \mathbf{R}_+[X]$, $grad : P = m \in \mathbf{N}^*$ un polinom de gradul n adică

$$P = a_0 X^m + a_1 \cdot X^{m-1} + a_2 \cdot X^{m-2} + \ldots + a_{m-1} X + a_m$$

cu $a_0 \in \mathbf{R}_+^*$.

Vom numi şir de tip *Euler* definit de polinomul P un şir

$$(x_n)_{n \geq 1},\ x_n = -\ln P(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P'(k)}{P(k)}, \tag{1}$$

unde

$$P' = m a_0 X^{m-1} + (m-1) a_1 \cdot X^{m-2} + (m-2) a_2 X^{m-3} + \ldots + 2 a_{m-2} X + a_{m-1}$$

este derivata polinomului P.

Teorema 1. *Oricare ar fi polinomul $P \in \mathbf{R}_+[X]$, $grad : P = m \in \mathbf{N}^*$ şirul de tip Euler $(x_n)_{n \geq 1}$ definit de polinomul P este convergent.*

Demonstraţie. Considerăm şirul constantei lui *Euler*

$$(\gamma_n)_{n \geq 1}, \gamma_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

despre care ştim că este convergent către celebra constantă a lui *Euler*, $\gamma = 0,577215664901532\ldots$.

Să mai considerăm şirul $(u_n)_{n \geq 1}$, $u_n = m \cdot \gamma_n - x_n$ despre care vom demonstra că este convergent adică există $u = \lim_{n \to \infty} u_n \in \mathbf{R}$, de unde va rezulta că există $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} (m \cdot \gamma_n - u_n) = m \cdot \gamma - u$, adică şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent, ceea ce va demonstra enunţul.

Este evident că :

$$u_n = m \cdot \gamma_n - x_n = \ln P(n) - \ln n^m + m \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{P'(k)}{P(k)} =$$

$$= \ln \frac{P(n)}{n^m} + \sum_{k=1}^{n} \frac{m \cdot P(k) - k \cdot P'(k)}{k \cdot P(k)}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*. \tag{2}$$

Prin urmare,

$$u_n = \ln : \frac{P(n)}{n^m} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{m \cdot a_0 \cdot k^m + m \cdot a_1 \cdot k^{m-1} + m \cdot a_2 \cdot k^{m-2} + ... + m \cdot a_{m-1} \cdot k + m \cdot a_m}{k \cdot P(k)} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{m \cdot a_0 \cdot k^m + (m-1) \cdot a_1 \cdot k^{m-1} + ... + 2a_{m-1} \cdot k^2 + a_{m-1} \cdot k}{k \cdot P(k)} =$$

$$= \ln : \frac{P(n)}{n^m} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1 \cdot a_1 \cdot k^{m-1} + 2 \cdot a_2 \cdot k^{m-2} + ... + (m-1) \cdot a_{m-1} \cdot k + m \cdot a_m}{k \cdot P(k)},$$

$$\forall n \in \mathbf{N}^*. \tag{3}$$

În continuare ţinem seama că $\lim_{n \to \infty} \frac{P(n)}{n^m} = a_0$ şi notăm

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\sum_{t=1}^{m} t \cdot a_t k^{m-t} \right) \cdot \frac{1}{k \cdot P(k)} \right), \quad n \in \mathbf{N}^*. \tag{4}$$

Este evident că $y_{n+1} > y_n, \forall n \in \mathbf{N}^*$ adică şirul $(y_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător. Totodată , să demonstrăm că :

$$0 < y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{t=1}^{m} t \cdot a_t \cdot k^{m-t}}{k \cdot P(k)} < \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{t=1}^{m} t \cdot a_t \cdot k^{m-t}}{a_0 \cdot k^{m+1}} =$$

$$= \frac{1}{a_0} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} t \cdot a_t \cdot \frac{1}{k^{t+1}} \right) \leq \frac{m}{a_0} \cdot \max_{1 \leq t \leq m} a_t \cdot \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{k^{t+1}} =$$

$$= \frac{m}{a_0} \cdot \max_{1 \leq t \leq m} a_t \cdot \sum_{t=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{t+1}} \right), \quad \forall n \in \mathbf{N}^*. \tag{5}$$

Dacă ţinem seama că şirul $(v_n)_{n\geq 1}$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{t+1}}$, $t > 0$, este convergent, rezultă că el este mărginit. Prin urmare, există $M > 0$ astfel încât $v_n < M$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Ţinând seama de marginea şirului $(v_n)_{n\geq 1}$, din relaţia (5), deducem că :

$$0 < y_n < \frac{m}{a_0} \cdot M \cdot \max_{a\leq t\leq m} a_t, \qquad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

adică şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior.

Deoarece $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi mărginit superior rezultă că el este convergent adică există $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \in \mathbf{R}$.

Conform relaţiei (3) avem :

$$u_n = \ln \frac{P(n)}{n^m} + y_n, \qquad \forall n \in \mathbf{N}^*. \tag{6}$$

Din (6), rezultă că există :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} y_n + \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{n^m}\right) = y + \ln a_0 \in \mathbf{R},$$

adică şirul $(u_n)_{n\geq a}$ este convergent.

Cu aceasta teorema 1 este demonstrată adică şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = m \cdot \gamma - y - \ln a_0 \in \mathbf{R}$.

În [7] prin aplicaţia 12, *Mihály Bencze* arată că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de termen general $x_n = -\ln\left(n + \sqrt{n^2+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ este convergent cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,498114385959\ldots$.

În continuare ne propunem să generalizăm acest rezultat.

Pentru aceasta fie $m \in \mathbf{R}_+^*$; $a, b \in \mathbf{R}_+$ şi funcţia

$$F\colon \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}, F(x) = \ln\left(\sqrt{x^m + a} + \sqrt{x^n + b}\right),$$

funcţie care este derivabilă cu derivata $f = F' : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{m}{2} \cdot \frac{x^{m-1}}{\sqrt{(x^m+a)(x^m+b)}}$.

Cu ajutorul acestor funcţii, construim şirul de numere reale, $(x_n)_{n\geq 1}$,

$$x_n = -F(n) + \sum_{k=1}^{n} f(k) = -\ln(\sqrt{n^m + a} + \sqrt{n^m + b}) +$$

$$+\frac{m}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{m-1}}{\sqrt{(n^m + a)(n^m + b)}}. \tag{7}$$

Să observăm că, dacă $a = b = 0$, atunci :

$$x_n = -\ln(2 \cdot \sqrt{n^m}) + \frac{m}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =$$

$$= -\ln 2 - \frac{m}{2}\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = -\ln 2 + \frac{m}{2} \cdot \gamma_n\,, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Prin urmare, în acest caz, şirul $(x_n)_{x \geq 1}$ este convergent şi

$$\lim_{n \to \infty} x_n = -\ln 2 + \frac{m}{2} \cdot \gamma\,. \tag{8}$$

În continuare vom considera $a \neq 0$ sau $b \neq 0$ şi vom demonstra:

Teorema 2. *Pentru orice $m > 0$ şi orice $a, b \in \mathbf{R}_+$ cu $a + b > 0$ şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin relaţia (7) este convergent.*

Demonstraţie. Fie $(y_n)_{n \geq 1}$ şirul de termen general

$$y_n = \frac{m}{2} \cdot \gamma_n - x_n = -\frac{m}{2} \cdot \ln n + \ln\left(\sqrt{n^m + a} + \sqrt{n^m + b}\right) +$$

$$+\frac{m}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{k^{m-1}}{\sqrt{k^m + a)(k^m + b)}}\right) = \ln \frac{\sqrt{n^m + a} + \sqrt{n^m + b}}{\sqrt{n^m}} +$$

$$+\frac{m}{a} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{k^{m-1}}{\sqrt{(k^m + a) \cdot (k^m + b)}}\right), \quad n \in \mathbf{N}^*. \tag{9}$$

Să observăm că $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^m + a} + \sqrt{n^m + b}}{\sqrt{n^m}} = 2$, de unde deducem că :

$$\lim_{n \to \infty} \ln \frac{\sqrt{n^m + a} + \sqrt{n^m + b}}{\sqrt{n^m}} = \ln 2. \tag{10}$$

Să notăm :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{k^{m-1}}{\sqrt{(k^m + a)(k^m + b)}}\right), \quad n \in \mathbf{N}^*. \tag{11}$$

şi atunci :

$$y_n = \ln \frac{\sqrt{n^m + a} + \sqrt{n^m + b}}{\sqrt{n^m}} + \frac{m}{2} \cdot u_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*. \tag{12}$$

Rezultă atunci că :

$$x_n = \frac{m}{2}\cdot\gamma_n - y_n = \frac{m}{2}\cdot(\gamma_n - u_n) - \ln\frac{\sqrt{n^m+a}+\sqrt{n^m+b}}{\sqrt{n^m}}. \tag{13}$$

Dacă vom arăta că şirul $(u_n)_{n\geq1}$ este convergent, din (12) rezultă că şirul $(y_n)_{n\geq1}$ este convergent iar din (13) deducem că şirul $(x_n)_{n\geq1}$ este convergent cu :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{m}{2}\cdot(\gamma - \lim_{n\to\infty} u_n) - \ln 2. \tag{14}$$

Deoarece , $\frac{1}{k} - \frac{k^{m-1}}{\sqrt{(k^m+a)(k^m+b)}} > \frac{1}{k} - \frac{k^{m-1}}{k^m} = 0$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$, rezultă că şirul $(u_n)_{n\geq1}$ este strict crescător.

Totodată avem :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{k^{m-1}}{\sqrt{(k^m+a)(k^m+b)}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{(k^m+a)\cdot(k^m+b)} - k^m}{k\cdot\sqrt{(k^m+a)(k^m+b)}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{(k^m+a)(k^m+b) - k^{2m}}{k\cdot\sqrt{(k^m+a)(k^m+b)}\cdot(\sqrt{(k^m+a)(k^m+b)}+k^m)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{(a+b)k^m + ab}{k\cdot\sqrt{(k^m+a)(k^m+b)}\cdot(\sqrt{(k^m+a)(k^m+b)}+k^m)} <$$

$$< \sum_{k=1}^{n}\frac{(a+b+ab)k^m}{k\cdot k^m\cdot 2\cdot k^m} < (a+b+ab)\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{m+1}}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*. \tag{15}$$

Deoarece $m+1 > 1$ rezultă că şirul $(h_n)_{n\geq1}$, $h_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{m+1}}$ este convergent şi atunci şirul $(h_n)_{n\geq1}$ este mărginit. Prin urmare există $A > 0$ astfel încât $h_n < A$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Din relaţia (11) deducem că $u_n < (a+b+ab)A = B$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Prin urmare există $B > 0$ astfel încât $u_n < B$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, ceea ce arată că şirul $(u_n)_{n\geq1}$ este mărginit superior.

Deoarece $(u_n)_{n\geq1}$ este strict crescător şi mărginit superior rezultă că el este convergent. Deci există $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \in \mathbf{R}_+^*$.

Din relaţia (14), obţinem că există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{m}{2}\cdot(\gamma - u) - \ln 2 \in \mathbf{R}$, ceea ce arată convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq1}$.

Cu aceasta teorema 2 este demonstrată.

Aplicaţie. Dacă $a = 0$, $b = 1$ atunci

$$x_n = -\ln(n+\sqrt{n^2+1}) + +\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}},\ m = 2$$

şi, conform teoremei 2, rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Am obţinut astfel aplicaţia 12 din [7].

Bibliografie

1. Bătineţu-Giurgiu M.D., *Asupra unor probleme ale lui Mihail Ghermănescu. Constante Euler-Ghermănescu*, Gazeta Matematică seria B, Nr.10/ 1993, pag.341-343.

2. Bătineţu-Giurgiu Maria, Bătineţu-Giurgiu M.D., *În legătură cu şirurile constantelor lui Euler şi A.G. Ioachimescu*, Gazeta Matematică seria B, Nr.9/1995, pag.430-441.

3. Bătineţu-Giurgiu Maria, Bătineţu-Giurgiu M.D., *Şiruri de tip Euler-Ioachimescu*, Lucrările Seminarului CREATIVITATE MATEMATICĂ, Universitatea de Nord din Baia Mare, Facultatea de Ştiinţe, vol.7 (1997-1998), pag.13-20.

4. Bătineţu-Giurgiu Maria, Bătineţu-Giurgiu M.D., *Convergenţa unor şiruri de tip Euler*, Gazeta Matematică seria A, Nr.4/1998, pag.266-273.

5. Bătineţu-Giurgiu M.D., *About Mihály Bencze sequence*, Octogon Mathematical Magazine, vol.8, Nr.1, April 2000, pag.195-197.

6. Bătineţu-Giurgiu M.D., Semenescu Augustin, *Asupra unor şiruri de tip Euler*, A treia Conferinţă Anuală a S.S.M.R., Universitatea din Craiova, mai 1999.

7. Bencze Mihály, *Generalization of Euler constant*, Octogon Mathematical Magazine, vol.6, Nr.2, October 1998, pag.98-100.

Colegiul Naţional "Matei Basarab",
Str.Matei Basarab 32,
sector 3, Bucureşti, 70096,
Romania

Politehnica Bucureşti,
Splaiul Independenţei 313, sector 6 ,
Bucureşti, 77206,
Romania

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 39–44

LINEAR FEEDBACK FOR OPTIMAL STABILIZATION BY BOUNDARY CONTROL OF SEMILINEAR HEAT EQUATION

Maria Bătineţu-Giurgiu

An optimal stabilization by boundary control problem attached to semilinear equations with analytic semigroups is considered. The case of semilinear heat equation is included and discussed. The optimal control, that stabilizes the evolution minimizing a quadratic performance index, is got and characterized under the feedback form.

Using [1] we give some results concerning the semilinear equations with analytic semigroups. For that we consider the initial value problem for a semilinear equation

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + Au(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

which occurs often in the applications. The operator $-A$ from (1) is the infinitesimal generator of an analytic semigroup $T(t)$, $t \geq 0$ on a Banach space X.

DEFINITION 1. *A function u which is differentiable almost everywhere on $[t_0, T]$ such that $u' \in L^1(0, T; X)$ is called a strong solution of the initial problem* (1) *if $u(t_0) = x_0$ and $u'(t) + Au(t) = f(t, u(t))$ a.e. on $[t_0, T]$.*

A continuous solution u of the integral equation

$$u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t - s)f(s, u(s))\mathrm{d}s, \tag{2}$$

will be called a mild solution of the initial value problem (1).

In the sequel we are going to assume conditions on the operator A, on the semigroup $T(t)$, $t \geq 0$ and on the function f such that we will be able to obtain unique global strong solution of the initial value problem (1).

So, through all our considerations we will assume that $-A$ is the infinitesimal generator of an analytic semigroup $T(t)$ on the Banach space X. For convenience we will also assume that $T(t)$ is bounded, that is $||T(t)|| \leq M$ for $t \geq 0$, and that $0 \in \rho(-A)$, i.e. $-A$ is invertible.

We note that if $-A$ is the infinitesimal generator of an analytic semigroup then $-A - \alpha I$ is invertible and generates a bounded analytic semigroup for $\alpha > 0$ large enough. This enables one to reduce the general case where $-A$ is the infinitesimal generator of an analytic semigroup to the case where the semigroup is bounded and $-A$ is invertible.

¿From our assumptions on A it follows see [1] Section 2.2.6 that A^α can be defined for $0 \leq \alpha \leq 1$ and A^α is a closed linear invertible operator with domain $D(A^\alpha)$ dense in X. The closedness of A^α implies that $D(A^\alpha)$ endowed with the graph norm of A^α, i.e. the norm $|||x||| = ||x|| + ||A^\alpha x||$, is a Banach space. Since A^α is invertible its graph norm $||| \cdot |||$ is equivalent to the norm $||x||_\alpha = ||A^\alpha x||$. Thus, $D(A^\alpha)$ equipped with the norm $|| \cdot ||_\alpha$ is a Banach space which we denote by X_α. From this definition it is clear that $0 < \alpha < \beta$ implies $X_\alpha \supset X_\beta$ and that the imbedding of X_β in X_α is continuous.

Assumption (F). *Let U be an open subset of $\mathbf{R} \times X_\alpha$. The function $f : U \to X$ satisfies the assumption (F) if for every $(t,x) \in U$ there is a neighborhood $V \subset U$ and constants $L \geq 0$, $0 < \gamma < 1$ such that*

$$||f(t_1,x_1) - f(t_2,x_2)|| \leq L(|t_1 - t_2|^\gamma + ||x_1 - x_2||_\alpha) \tag{3}$$

for all $(t_i, x_i) \in V$.

THEOREM 1. *Let $0 \in \rho(-A)$ and let $-A$ be the infinitesimal generator of an analytic semigroup $T(t)$ satisfying $||T(t)|| \leq M$ for $t \geq 0$. Let $f : [t_0, \infty) \times X_\alpha \to X$ satisfy (F). If there is a continuous nondecreasing real valued function $k(t)$ such that*

$$||f(t,x)|| \leq k(t)(1 + ||x||_\alpha) \quad \textit{for} \quad t \geq t_0,\ x \in X_\alpha \tag{4}$$

then for every $x_0 \in X_\alpha$ the initial value problem (1) has a unique solution u which exists for all $t \geq t_0$.

Next we restrict our attention to applications which are related to the solution of initial value problems for partial differential equations. In the applications of the abstract theory, it is usually shown that a given differential operator A is the infinitesimal generator of a C_0 semigroup in a certain concrete Banach space of functions X. Further on we will consider the case of parabolic equations.

DEFINITION 2. *Let Ω be a bounded domain in $\mathbf{R}^n$ with smooth boundary $\partial\Omega$. Consider the differential operator of order $2m$,*

$$A(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{5}$$

where the coefficients $a_\alpha(x)$ are sufficiently smooth complex-valued functions of x in Ω. The principal part $A'(x,D)$ of $A(x,D)$ is the operator

$$A(x,D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{5'}$$

The operator $A(x,D)$ is strongly elliptic if there exists a constant $c > 0$ such that

$$\mathrm{Re}\,(-1)^\alpha A'(x,\xi) \geq c|\xi|^{2m} \tag{6}$$

for all $x \in \bar{\Omega}$ and $\xi \in \mathbf{R}^n$.

DEFINITION 3. *Let $A = A(x,D)$ be a strongly elliptic operator of order $2m$ on Ω. We set A_p, $1 < p < \infty$, as being the operator associated with A defined by*

$$D(A_p) = W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega) \tag{7}$$

and

$$A_p u = A(x,D)u \quad \text{for} \quad u \in D(A_p). \tag{8}$$

We note that the domain $D(A_p)$ of A_p contains $C_0^\infty(\Omega)$ and it is therefore dense in $L^p(\Omega)$. Moreover A_p is a closed operator in $L^p(\Omega)$.

THEOREM 2. *Let $A(x,D)$ be a strongly elliptic operator of order $2m$ on a bounded domain Ω with smooth boundary $\partial\Omega$ in $\mathbf{R}^n$ and let $1 < p < \infty$. If A_p is the operator associated with A then $-A_p$ is the infinitesimal generator of an analytic semigroup on $L^p(\Omega)$.*

With these the problems considered in [4] and [5] could be treated as we have shown above. We just want to emphasize that in [4] the authors assumed that the nonlinear term f satisfies a suitable growth condition at ∞, that allows superlinear growth of $|f|$. For such a case the method of iterated logarithms is used.

Using the ideas from [2] and [3] the optimal stabilization by boundary control of a semilinear heat equation is studied. A feedback solution is obtained that stabilizes the evolution minimizing a quadratic performance index.

Let A, B, C be constant matrices of $m\times m$, $m\times k$, $2\times m$ type with A stable, G_2 a constant matrix, semipositive definite of $m\times m$ type, N a constant matrix, strictly positive definite of $k\times k$ type, $\mathcal{U} = \mathcal{L}^{\in}([\prime,\infty);\mathbf{R}^{\|})$, $\varphi(\cdot)\in\mathcal{C}([\prime,\infty];\mathbf{R})$, $z_0\in\mathbf{R}^m$, $K:[0,1]\times[0,1]\to\mathbf{R}$ integrable having the following property of positivity

$$\int_0^1\int_0^1 K(x,\xi)\chi(x)\chi(\xi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi \geq 0, \quad (\forall)\chi(\cdot)\in\mathcal{C}'([\prime,\infty];\mathbf{R}),$$

$$D = \{(t,x)|\ t\in[0,\infty), \quad x\in[0,1]\}.$$

Let us consider the following boundary value problem

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(t,y(t)) \\ v(t) = Cz(t),\ v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t)\end{pmatrix},\ (\forall)t\in[0,\infty) \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = Az + Bu(t),\ u\in\mathcal{U} \\ y(0,x) = \varphi(x),\ (\forall)x\in[0,1],\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{9}$$

The problem (9) can be transformed into a initial value problem for which one can apply T.1. About the function f from (9) we make the assumption that f satisfies the assumption **(F)**. Let $\begin{pmatrix} y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ be the solution of the problem (9) corresponding to the control $u(\cdot)$.

We associate to the problem (9) the following quadratic cost functional

$$J_{\begin{pmatrix}\varphi \\ z_0\end{pmatrix}}(u) = \int_0^\infty \mathcal{F}\left(\begin{pmatrix} y_u \\ z_u\end{pmatrix}, \sqcap\right)(\sqcup)\,\mathrm{d}\sqcup, \tag{10}$$

where

$$\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix} y_u \\ z_u\end{pmatrix}, \sqcap\right)(\sqcup) = \int_\prime^\infty\int_\prime^\infty \mathcal{K}(\S,\xi)\dagger_\sqcap(\sqcup,\S)\dagger_\sqcap(\sqcup,\xi)\mathrm{d}\S\,\mathrm{d}\xi +$$

$$+ < G_2(t)z(t), z(t) > + < Nu(t), u(t) > . \tag{11}$$

The optimal control problem consists of finding a control function $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ so that

$$J_{\begin{pmatrix} \varphi \\ z_0 \end{pmatrix}}(\tilde{u}) \leq J_{\begin{pmatrix} \varphi \\ z_0 \end{pmatrix}}(u), \ (\forall) u \in \mathcal{U}. \tag{12}$$

A straightforward calculation leads us to the following representation of the cost functional

$$J_{\begin{pmatrix} \varphi \\ z_0 \end{pmatrix}}(u) = < r\begin{pmatrix} \varphi \\ z_0 \end{pmatrix}, u > + < u, r\begin{pmatrix} \varphi \\ z_0 \end{pmatrix} > + \rho\left(\begin{pmatrix} \varphi \\ z_0 \end{pmatrix}\right) +$$

$$+ < u, Ru >, \tag{13}$$

where $R : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ is a selfadjoint operator and r, ρ have the following property: $r\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$, $\rho\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$.

¿From the hypothesis of positivity imposed to G_2, N, K it follows that

$$J_{\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ z_0 \end{pmatrix}}(u) = < u, Ru > \geq \delta ||u||^2, \quad \delta > 0. \tag{14}$$

¿From (14) using a theorem of minimizing coercive forms it follows the existence and uniqueness of the optimal control $\tilde{u}_{\begin{pmatrix} \varphi \\ z_0 \end{pmatrix}}(\cdot)$, for the problem (9), (12) and this admits the representation

$$\tilde{u}_{\begin{pmatrix} \varphi \\ z_0 \end{pmatrix}}(t) = -R^{-1} r\left(\begin{pmatrix} \varphi \\ z_0 \end{pmatrix}\right)(t). \tag{15}$$

Let $\mathcal{X} = \left\{ \begin{pmatrix} g \\ z \end{pmatrix} |\} \in C([/, \infty]; \mathbf{R}),\ \ddagger \in \mathbf{R}^{\backslash} \text{ a column vector} \right\}$. We endow the space $\mathcal{X}$ with the following scalar product:

$$< \begin{pmatrix} g_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_2 \\ z_2 \end{pmatrix} > = \int_0^1 g_1(x) g_2(x) \mathrm{d}x + < z_1, z_2 >_{\mathbf{R}^m}.$$

THEOREM 3. *Let* $V\left(\begin{pmatrix} \varphi \\ z_0 \end{pmatrix}\right)$ *be the optimal value of the cost functional* $V\left(\begin{pmatrix} \varphi \\ z_0 \end{pmatrix}\right) = J_{\begin{pmatrix} \varphi \\ z_0 \end{pmatrix}}\left(\tilde{u}_{\begin{pmatrix} \varphi \\ z_0 \end{pmatrix}}\right)$. *Then there exists* $H : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *a* *selfadjoint operator, so that* $V\left(\left(\begin{array}{c}\varphi\\ z_0\end{array}\right)\right) = < \left(\begin{array}{c}\varphi\\ z_0\end{array}\right), H\left(\begin{array}{c}\varphi\\ z_0\end{array}\right) >$.

The proof follows the ideas from [3].

THEOREM 4. *The optimal control* $\tilde{u}_{\left(\begin{array}{c}\varphi\\ z_0\end{array}\right)}$ *admits the representation under the feedback form*

$$\tilde{u}_{\left(\begin{array}{c}\varphi\\ z_0\end{array}\right)}(t) = -N^{-1}(O\ B^*)H\left(\begin{array}{c}\tilde{y}(t)\\ \tilde{z}(t)\end{array}\right)_{\left(\begin{array}{c}\varphi\\ z_0\end{array}\right)}.$$

For proof see [3].

References

[1] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, 44, 1983, Springer-Verlag, New York.

[2] V.A. Yakubovic, *Frequency-Domain Theorem for the case when State and Control are Hilbert Spaces and Applications to Feedback Solution of Some Control Problems*, I (in Russian). Sibirskii-Mat. Journal XV, 3(1974).

[3] Maria Bătineţu-Giurgiu, *Linear Feedback for Optimal Stabilization by Boundary Control of p-Caloric Equations,* $p > 1$, Qualitative Problems for Differential Equations and Control Theory, Editor C.Corduneanu, World Scientific 1995, pp. 147-156.

[4] P. Albano, P. Cannarsa and V. Komornik, *Well-posedness of Semilinear Heat Equations with Iterated Logarithms*, International Series of Numerical Mathematics, vol. 133, 1999 Birkhäuser Verlag Basel / Switzerland, pp. 1-11.

[5] C.A. Marinov and A. Lehtonen, *A Dissipative Operator in Distributed Parameter Network Dynamics*, Qualitative Problems for Differential Equations and Control Theory, Editor C. Corduneanu, World Scientific 1995, pp. 243-250.

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 45–48

ELABORAREA DE SOFTWARE APLICATIV INTELIGENT

Gheorghe Căpăţînă

În lucrare este expusă o tehnologie de elaborare a Sistemelor Informatice (SI) cu funcţionare în timp real, care permite utilizatorului final de sine stătător şi fără asistenţă din partea elaboratorului, pe de o parte, să formuleze şi să rezolve probleme noi din domeniul său de activitate, iar pe de altă parte, să efectueze modificările necesare ale produselor software în procesul exploatării SI, fără a afecta fiabilitatea acestora.

Produsele software aplicative, elaborate de autor şi implementate la diverse unităţi economice, satisfac aceste restricţii din motiv că, produsele software au o arhitectură originală şi sunt elaborate conform unei tehnologii informaţionale proprii.

Domeniu de Activitate - DA(t) este numită o totalitate de obiecte (esenţe) şi relaţiile dintre acestea, de proceduri de transformare ale acestor obiecte în procesul soluţionării problemelor din acest domeniu [1]. Elaborarea de software aplicativ pentru rezolvarea problemelor dintr-un oarecare $DA(t)$ este echivalentă cu realizarea modelului semantic a acestui domeniu pe calculator.

Vom numi *Universul unei (unui set de) Probleme - UProb(t)* o submulţime a $DA(t)$, folosită în procesul soluţionării pe calculator a problemei (setului de probleme) date.

Un $DA(t)$ constă din unul sau mai multe $UProb(t)$:

$$DA(t) = UProb_1(t)\ U...U\ UProb_n(t).$$

Notam prin $CONCEPTE$ mulţimea de obiecte şi relaţii ale $DA(t)$, pentru care se solicită elaborarea de software aplicativ :

$$CONCEPTE = \{OBIECTE, RELATII\}.$$

În baza mulţimii CONCEPTE se elaborează limbajul profesional numit *Limbajul Utilizatorului (LU)*. Acesta este un limbaj neprocedural, care permite utilizatorului final de sine stătător şi fără asistenţă din partea elaboratorului să formuleze şi să rezolve probleme din domeniul de activitate $DA(t)$. Software aplicativ, destinat rezolvării pe calculator a problemelor din $DA(t)$, este dotat cu un procesor al LU.

În mulţimea $CONCEPTE$ selectăm submulţimea

$CVAR(t) = \{Cvar_i(t) : i = 1, ..., i\}$ a căror semantică este variabilă, adică evoluează.

Conceptele acestei submulţimii pot fi reprezentate sub forma de reguli:

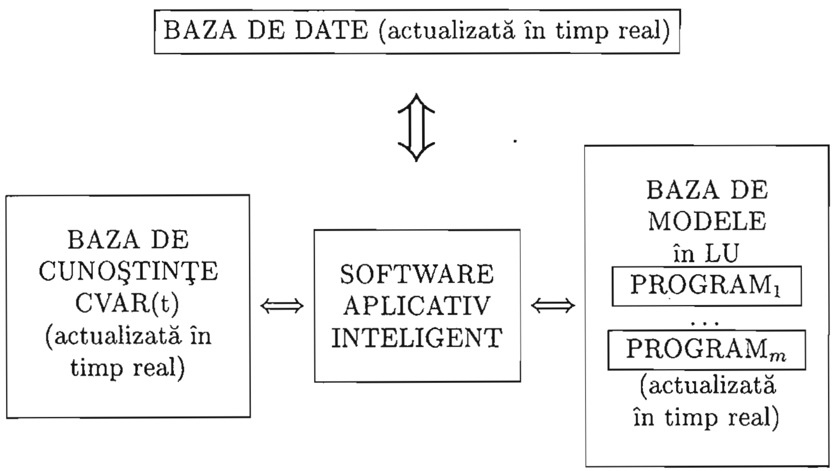
$$REGULA1 : IF\ Cvar_i(t)\ \&\ (t < t_2)\ THEN < semantica\ Cvar_i(t) >,$$
$$REGULA2 : IF\ Cvar_i(t)\ \&\ (t_1 < t < t_2)\ THEN < semantica\ Cvar_i(t) >,$$
$$REGULA3 : IF\ Cvar_i(t)\ \&\ (t_1 < t)\ THEN < semantica\ Cvar_i(t) >,$$

unde, t_1 şi t_2 sunt respectiv timpul iniţial şi cel final de valabilitate a versiunii date a semanticii conceptului. Descrierea semanticii fiecărui concept din mulţimea $CVAR(t)$ reprezintă un set de reguli, în care prima regulă, inclusă în baza de cunoştinţe, este de tipul REGULA1, după care urmează reguli de tipul REGULA2, iar ultima este de tipul REGULA3.

Elementele submulţimii $CVAR(t)$ sunt realizate utilizînd metoda interpretării, care permite utilizatorului final acces la modificarea semanticii conceptelor din această submulţime.

Celelalte concepte sunt realizate printr-o metodă care nu permite utilizatorului final acces la modificarea semanticii acestor concepte. Realizarea acestora poate fi efectuată utilizînd atît o tehnologie convenţională de programare, cît şi una originală pentru proiectarea unui procesor (motor inferenţial) cu o bază de cunoştinţe a $DA(t)$.

Un produs aplicativ inteligent, realizat cu contributia tehnologiei informationale propuse are următoarea structură:



$$\Updownarrow$$

$\boxed{\text{INTERFAŢA UTILIZATORULUI FINAL}}$

Produse de software inteligent (SI) au fost proiectate pentru obiecte ierarhizat În consecinţă, SI reprezintă un model ierarhizat dinamic cu "memorie" în care fiecare subsistem, la rîndul său, reprezintă un model dinamic cu "memorie" dotat cu un procesor al limbajului profesional corespunzător.

Lui SI deja realizat i se ataşează un model suplimentar, care exclude mutual zonele critice ale proceselor paralele de prelucrare a informaţiei în timp real şi care garantează, în cazuri excepţionale, restabilirea bazei de date din momentul repornirii calculatorului. În plus, un astfel de SI asigură o recalculare corectă pentru oricare interval de timp din trecut.

Tehnologia propusă permite programatorului de aplicaţii să rezolve unele probleme, care în tehnologiile informatice convenţionale ţineau de competenţa programatorului de sistem, iar utilizatorul final să rezolve unele probleme care ţineau de competenţa programatorului de aplicaţie.

Utilizarea pe scară largă a produselor de software aplicative inteligente, dotate cu procesor al limbajului profesional permite economisirea unor resurse intelectuale şi materiale, care în prezent sunt alocate în scopul asistenţei de software aplicativ, elaborat cu contribuţia tehnologiilor informatice convenţional

Bibliografie

1. Gaaze-Rapoport M.G., Pospelov D.A. - *Tolcovii slovari po iscusstvennomu intellectu. / Averkin A.N.,* Moskva: Padio i sviazi, 1992.

Universitatea Cooperatist-Comercială,
Moldova

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 49–52

CONDIŢII DE REDUCTIBILITATE PENTRU UN SISTEM DE ECUAŢII LINIARE CU DERIVATE PARŢIALE

P. Chirilov

Considerăm sistemul

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \Lambda grad_x U = H(t;x)U, \tag{1}$$

unde $H(t;x)$ e o matrice $m \times m$, $\Lambda = diag(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m)$, Λ_i sunt constante.

$$U = (U_1, U_2, \ldots, U_m) \in R^m, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n, t \in R.$$

Notăm prin $U(t;x)$ matricea, ale cărei coloane sunt soluţiile sistemului (1) ce verifică condiţia $U(0;x) = E$. Prin E s-a notat matricea unitate.

Matricea $U(t;x)$ este numită **matricea fundamentală** a sistemului (1).

Avem, deci,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \Lambda grad_x U = H(t;x)U, U(0;x) = E$$

Această matrice este inversabilă în orice punct $(a;b) \in R^{n+1}$,

$$(b = (b_1, b_2, \ldots, b_n), a \in R.)$$

deoarece

$$detU(a;b) = exp \int_0^a SpU(\tau; b - \Lambda a + \Lambda\tau)d\tau \neq 0.$$

Definiţie. Vom spune, că sistemul (1) este reductibil, dacă există o transformare liniară $U = L(t;x)v$, care reduce acest sistem la unul de forma

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda grad_x v = \Gamma(x - \Lambda t)v, \tag{2}$$

iar matricea $L(t;x)$ verifică condiţia

$$L(t;x) \in C^1(R^{n+1}), \quad \sup_{(t;x)\in R^{n+1}} \|L\| < \infty$$

$$\sup_{(t;x)\in R^{n+1}} \|\frac{\partial L}{\partial t}\| < \infty, \quad \sup_{(t;x)\in R^{n+1}} \|\frac{\partial L}{\partial x_i}\| < \infty, i = 1, 2, \dots, n;$$

$$|\det L(t;x)| \geq m > 0$$

Definiţie. Vom spune, că funcţia $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ e o **funcţie recursivă cu perioada** $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \omega_i \not= 0$, dacă

$$f(y_1 + \omega_1 y_2 + \omega_2) \dots (y_n + \omega_n) = f(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

pentru orice $(y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$.

Evident, orice funcţie $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ periodică în raport cu fiecare variabilă y_i cu perioada ω_i, e şi recursivă. În acest caz, continuitatea funcţiei f implică mărginirea ei în R^n.

Însă o funcţie recursivă şi continuă nu este neapărat mărginită în R^n.

Dacă funcţia $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ este recursivă cu perioada $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ şi periodică după toate variabilele y_i $(i \not= k)$, atunci ea este periodică după variabila y_k cu perioada ω_k.

Teorema 1. Fie, că matricea $H(t;x)$ e continuă şi periodică în raport cu variabila x_k cu perioda ω_k. Atunci matricea fundamentală $U(t;x)$ a sistemului (1) eeste de asemenea periodică în raport cu variabila x_k având aceiaşi perioadă.

Teorema 2. Fie că matricea $H(t;x)$ e recursivă cu perioada (ω_1, ω_2), unde $\omega_1 \not= 0$, iar $\omega_2 = \Lambda\omega_1$. Atunci există o transformare $U = L(t,x)v$, cu matricea $L(t,x)$ recursivă cu perioada (ω_1, ω_2), care reduce sistemul (1) la sistemul (2).

Dacă $H(t;x)$ este periodică în raport cu fiecare componentă x_k a vectorului x cu o perioadă corespunzătoare $\Lambda_k\omega_1$, atunci matricea $\Gamma(z)$ este periodică în raport cu fiecare componentă z_k a vectorului $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

În asemenea caz, matricea de transformare $L(t,x)$ este periodică după toate componentele vectorului (t,x) şi, deci, e mărginită în R^{n+1}.

Consecinţă. Dacă matricea $H(t,x)$ e periodică după variabila t cu perioada ω_1 şi după celelalte componente x_k ale vectorului x cu perioadele respective $\omega_2^k = \Lambda_k\omega_1$, atunci sistemul (1) este reductibil la sistemul (2) având matricea periodică $\Gamma(z)$.

Remarcă. Se poate demonstra, că dacă $H(t,x) = H(t)$ este periodică după variabila t cu perioada ω_1, atunci sistemul (1) este reductibil la sistemul (2) cu matricea constantă $\Gamma = \frac{1}{\omega_1} LnU(\omega_1)$, unde $U(t)$ este matricea fundamentală a soluţiilor sistemului de ecuaţii diferenţiale ordinare

$$\frac{dv}{dt} = H(t)v$$

Considerăm ecuaţia scalară

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \Lambda grad_x v = l(x - \Lambda t)v + f(t, x)$$

Fie, că $| Re\lambda(z) | \geq \delta > 0$ pentru orice $z \in R^n$, $f(t; x)$ e o funcţie continuă şi mărginită în R^{n+1}. Atunci există o singură soluţie mărginită dată de formula

$$V(t; x) = -sgnRel(x - \Lambda t) \int_{-\infty}^{+\infty} exp[-sgnRel(x - \Lambda t)(t - \tau)] \times$$

$$\times \theta[Rel(x - \Lambda t)(t - \tau) f(\tau, \Lambda(\tau - t)) + x] d\tau, \qquad (3)$$

unde

$$\theta(u) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } u \leq 0 \\ 1, & \text{dacă } u > 0. \end{cases}$$

În cazul când $l = const$, iar $f(t, x)$ e aproape periodică, unica soluţie mărginită, dată de formula (3) este de asemenea aproape periodică.

Bibliografie

1. I.Vulpe, P.Chirilov, *Despre regularitatea unui operator diferenţial în spaţiul funcţiilor aproape periodice*, *Studii în metode de analiză numerică şi optimizare*, Vol.1, N2, Chişinău 1999, pp.218-226.

2. Krasnoselischii M.A., Burd Ş.Z., Kolesov Iu.V., *Nelineinie pociti periodiceskie kolebania*, Moscva, Nauca, 1976.

3. Levitan B.M., Jidcov N.P., *Pociti periodiceskie functij i diferentialinie uravnenia*, Moscva, Izd-vo MGU, 1983.

Universitatea Cooperatist-Comercială,
Chişinău,
Moldova

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 53–58

ASUPRA REZOLVĂRII APROXIMATIVE A ECUAŢIILOR INTEGRALE DE SPEŢA A TREIA

Tudor Cibotaru

Abstract

Este elaborată schema de calcul a metodei de colocaţii pentru rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor integrale de speţa a treia definite pe contur neted şi închis al planului complex. Fundamentarea teoretică a acestei metode e obţinută în spaţiile funcţiilor generalizate.

1 Clase de funcţii şi spaţii definite de ele

1. Spaţiul $C\{m;z_0\}$. Fie Γ un contur neted şi închis ce mărgineşte un domeniu monoconex F^+ al planului complex . Vom considera că punctul $z=0$ aparţine domeniului F^+.

Prin $C(\Gamma)$ notăm spaţiul funcţiilor continue pe Γ cu norma

$$||g|| = \max_{t\in\Gamma} |g(t)|, \quad g(t) \in C(\Gamma).$$

Fie z_0 un punct arbitrar de pe conturul Γ şi $g(t)$ o funcţie din $C(\Gamma)$. Dacă există limita

$$m! \lim_{t\to z_0} \frac{g(t) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} g^{\{k\}}(z_0)(t-z_0)^k}{(t-z_0)^m}, \quad g^{\{0\}}(z_0) = g(z_0),$$

m (≥ 1) este un număr natural, atunci ea se numeşte (a se vedea [1, p.87]) derivata Taylor de ordin m a fucţiei $g(t)$ în p. z_0 şi se notează $g^{\{m\}}(z_0)$.

Mulţimea funcţiilor continue pe Γ şi care posedă derivată Taylor de ordin m în p. z_0 se notează prin $C\{m;z_0\}$. Prin $C\{0;z_0\}$ vom înţelege spaţiul $C(\Gamma)$.

Spaţiul $C\{m;z_0\}$ devine normat, dacă introducem norma astfel:

$$||g||_{C\{m;z_0\}} = ||T^{\{m\}}g|| + \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{r!} |g^{\{r\}}(z_0)|, \tag{1}$$

unde prin $T = T^{\{m\}}$ este notat operatorul

$$(T^{\{m\}}g)(t) = \frac{g(t) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} g^{\{k\}}(z_0)(t-z_0)^k}{(t-z_0)^m} \equiv G(t). \tag{2}$$

În monografia [1, p. 86] e demonstrat că funcţia $g(t)$ îi aparţine spaţiului $C\{m; z_0\}$ atunci şi numai atunci, când

$$g(t) = (t-z_0)^m G(t) + \sum_{k=0}^{m-1} a_k (t-z_0)^k, \tag{3}$$

$G(t)(\in C(\Gamma))$ are forma (2), iar $a_k = \frac{1}{k!} g^{\{k\}}(z_0)$, $k = \overline{0, m-1}$; prin urmare norma (1) se mai scrie şi sub forma

$$||g||_{\{C(m;z_0)\}} = ||G||_C + \sum_{k=0}^{m-1} |a_k|. \tag{4}$$

Spaţiul $C\{m; z_0\}$ cu norma (4) este spaţiu Banach.

2. Spaţiul $D\{m; z_0\}$. Definim mulţimea $D\{m; z_0\}$ de funcţii generalizate $u(t)$ de forma

$$u(t) = v(t) + \sum_{r=0}^{m-1} \omega_r \delta^{\{r\}}(t-z_0), \quad v(t) \in C(\Gamma), \tag{5}$$

unde ω_r sunt numere arbitrare, iar $\delta(t)$ şi $\delta^{\{r\}}(t)$ sunt delta- funcţia lui Dirac de variabilă complexă şi derivatele ei Taylor definite pe spaţiul $C\{m; z_0\}$ prin regula

$$(\delta^{\{r\}}; g(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \delta^{\{r\}}(\tau - z_0) g(\tau) d\tau \equiv (-1)^r g^{\{r\}}(z_0); \quad g(t) \in C\{m; z_0\}. \tag{6}$$

Spaţiul $D\{m; z_0\}$ devine spaţiu Banach cu norma

$$||u||_{D\{m;z_0\}} = ||v|| + \sum_{r=0}^{m-1} |\omega_r|. \tag{7}$$

2 Algoritmul metodei aproximative şi teorema de convergenţă

Cercetăm ecuaţia integrală de speţa a treia

$$(A\varphi \equiv)(t-z_0)^m\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} h(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{8}$$

în care $z_0 \in \Gamma$; $m \geq 1$, $h(t,\tau)$ şi $f(t)$ sunt funcţii cunoscute, ce verifică condiţiile:

$$\left\{\begin{array}{c} h(t,\tau) \in C\{m;z_0\} \times C\{m;z_0\}, h_\tau^{\{j\}}(t,\tau) \in C\{m;z_0\}, \\ j=\overline{1,m-1}, \theta(t,\tau) \equiv (T_t h)(t,\tau) \in C(\Gamma)\times C\{m;z_0\}, \\ f(t) \in C\{m;z_0\}. \end{array}\right. \tag{9}$$

Funcţia necunoscută $\varphi(t)$ o vom căuta în spaţiul $D\{m;z_0\}$.

Conform metodei de colocaţii soluţia aproximativă $\varphi_{n,m}(t)$ a ecuaţiei (8) o vom defini prin formula

$$\varphi_{n,m}(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k + \sum_{r=0}^{m-1} \alpha_{n+r+1}\delta^{\{r\}}(t-z_0); \tag{10}$$

necunoscutele α_k, $k=-n,\ldots,n,\ldots,n+m$ le vom determina din condiţia ca funcţia reziduală $A\varphi_{n,m}(t)-f(t)$ să se transforme în zero în $2n+m+1$ puncte distincte t_j, $j=\overline{0,2n+m}$ situate pe Γ :

$$A\varphi_{n,m}(t_j) - f(t_j) = 0, \quad j = \overline{0,2n+m}.$$

Aceste egalităţi din urmă ne definesc următorul sistem de ecuaţii algebrice liniare (SEAL)

$$(t_j-z_0)^m \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \left\{ t_j^k - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} h(t_j,\tau)\tau^k d\tau \right\} +$$
$$+\sum_{r=0}^{m-1} \alpha_{n+r+1}(-1)^r h_\tau^{\{r\}}(t_j,z_0) = f(t_j), \quad j = 0,2n+m. \tag{11}$$

Uşor se verifică, că SEAL (11) este echivalent ecuaţiei operatoriale

$$U_{n,m}A\varphi_{n,m} = U_{n,m}f, \quad \varphi_{n,m} \in Z_{n,m} \equiv R_n \bigoplus \left\{ \sum_{r=0}^{m-1} \beta_r \delta^{\{r\}}(t-z_0) \right\}, \tag{12}$$

studiată ca ecuaţie din $Z_{n,m}$ în $R_{n,m}$, $R_{n,m} = \{\sum_{k=-n}^{n+m} r_k t^k\}$, $R_n \equiv R_{n,0} = \{\sum_{k=-n}^{n} r_k t^k\}$, iar $U_{n,m}$ este operatorul de interpolare Lagrange pe nodurile t_j, $j = \overline{0, 2n+m}$:

$$(U_{n,m}g)(t) \equiv \sum_{j=0}^{2n+m} g(t_j) l_{j,m}(t),$$

$$l_{j,m}(t) = \left(\frac{t_j}{t}\right)^n \prod_{k=0,\quad k\neq j}^{2n+m} \frac{t - t_k}{t_j - t_k} \equiv \sum_{k=-n}^{n+m} \Lambda_{k,m}^{(j)} t^k.$$

Aşa cum subspaţiul $Z_{n,m}$ este invariant faţă de operatorul $U_{n.m}$, ecuaţia (12) se transformă în

$$A_{n,m}\varphi_{n,m} \equiv (t - z_0)^m \varphi_{n,m} + U_{n,m} H \varphi_{n,m} = U_{n,m} f, \tag{13}$$

unde H este operatorul integral cu nucleul $h(t, \tau)$.

Teoremă. *Fie că sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

1) *ecuaţia (8) are soluţie unică în $D\{m; z_0\}$ pentru orice parte dreaptă $f(t) \in C\{m; z_0\}$;*

2) *funcţiile $(T_\tau\theta)(t, \tau) = (T_t T_\tau h)(t, \tau)$ (faţă de variabila t), $g_r(t) = \theta_\tau^{\{r\}}(t, z_0)$, $r = \overline{0, m-1}$ şi $(Tf)(t)$ sunt continuu derivabile de m ori, $(T_\tau\theta)^{(m)}$ (după t, uniform faţă de τ), $g_r^{(m)}(t)$ şi $(Tf)^{(m)}(t)$ aparţin clasei Dini-Lipschitz. (Funcţia $g(t)$ aparţine clasei Dini-Lipschitz dacă modulul de continuitate al acestei funcţii $\omega(g; \delta)$ verifică relaţia $\lim_{\delta\to+0} \omega(g; \delta) ln\delta = 0$.)*

Dacă nodurile de discretizare formează o familie de noduri Feyér:

$$t_j = \psi\left(exp\frac{2\pi i}{2n+m+1} j + \theta i\right), \quad i^2 = -1, \quad j = \overline{0, 2n+m}, \theta \in [0; 2\pi),$$

$t = \psi(w)$ este funcţia Riemann a conturului Γ, atunci pentru valori destul de mari ale numărului n SEAL (11) are soluţie unică $\{\alpha_k\}_{k=-n}^{n+m}$.

Soluţiile aproximative (10) converg când $n \to \infty$ în norma spaţiului $D\{m; z_0\}$ către soluţia $\varphi^*(t) \in D\{m; z_0\}$ a ecuaţiei (8).

Eroarea soluţiei aproximative este estimată prin cantitatea

$$||\varphi^* - \varphi_{n,m}||_{D\{m;z_0\}} =$$

$$= d_1(\Gamma)\left[E_n^t(T\theta) + \sum_{r=0}^{m-1} E_n^t(\theta_\tau^{\{r\}}) + E_n(Tf)\right](n+m)^n \ln(n+m).$$

$E_n(\cdot)$ este cea mai bună aproximare uniformă a funcţiei $(\cdot)$ în clasa R_n, $d_1(\Gamma)$ este o constantă ce depinde de conturul Γ.

Demonstraţie Fie $H_{n,m}(t)$ $(\in R_{n,m})$ polinomul celei mai bune aproximări a funcţiei $H\varphi_{n,m}$ în norma (1):

$$\inf_{p_{n,m}\in R_{n,m}} ||H\varphi_{n,m} - p_{n,m}||_{C\{m;z_0\}} = ||H\varphi_{n,m} - H_{n,m}||_{C\{m,z_0\}} \equiv E_{n,m}(H\varphi_{n,m}).$$

În virtutea relaţiei (13),

$$||(A-A_{n,m})\varphi_{n,m}||_{C\{m;z_0\}} = ||H\varphi_{n,m} - H_{n,m} - U_{n,m}(H\varphi_{n,m} - H_{n,m})||_{C\{m;z_0\}} \leq$$

$$\leq (1+||U_{n,m}||)E_{n,m}(H\varphi_{n,m}); U_{n,m} : C\{m;z_0\} \to C\{m;z_0\}. \quad (14)$$

Se demonstrează că

$$E_{n,m}(H\varphi_{n,m}) = E_n(TH\varphi_{n,m}) \leq$$

$$\leq d_1(\Gamma)\left[E_n^t(T\theta) + \sum_{r=0}^{m-1} E_n^t(\theta_\tau^{\{r\}}) + E_n(Tf)\right] ||\varphi_{n,m}||_{D\{m;z_0\}},$$

şi

$$||U_{n,m}|| = O\left[(n+m)^n \ln(n+m)\right].$$

Din aceste relaţii şi din inegalitatea (14), utiliz^and teoremele Jakson şi Banach, obţinem justeţea teoremei.

Bibliografie

1. Z. Prösdorf- *Necotorâe classâ singulearnâh uravnenii.* M.:-Mir, 1979.-496 s. (Rus.)

Universitatea de Stat din Moldova,
Chişinău,
Moldova
e-mail: cibotaru@usm.md

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 59–66

REPREZENTĂRI ALE ALGEBREI LIE sl(2)

Camelia Ciobanu

În cele ce urmează K va reprezenta corpul numerelor complexe.

Notăm cu $gl(2) = \mathcal{L}(M_2(K))$ algebra Lie a matricelor pătratice de ordinul doi cu elemente în corpul numerelor complexe. Aceasta are dimensiunea patru iar cele patru matrice de mai jos formează o bază pentru ea.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se verifică imediat că

$$[A, B] = C, \; [C, A] = 2A, \; [C, B] = -2B \text{ şi}$$

$$[I, A] = [I, B] = [I, C] = 0 \quad (*).$$

Matricele de urmă zero în $gl(2)$ formează un subspaţiu pe care-l notăm cu $sl(2)$ şi este generat de baza $\{A, B, C\}$.

Relaţiile $(*)$ ne arată că $sl(2)$ este un ideal al lui $gl(2)$ şi deci avem izomorfismul de algebre Lie

$$gl(2) \cong sl(2) \oplus KI$$

care ne spune de fapt că studiul lui $gl(2)$ se poate reduce la cel al lui $sl(2)$.

Algebra anvelopantă $\mathcal{U} = \mathcal{U}(sl(2))$ a lui $sl(2)$ este izomorfă cu algebra generată de cele trei elemente A, B, C pentru care ştim că:

$$[A, B] = C, \; [C, A] = 2A, \; [C, B] = -2B.$$

Următoarea lemă dă câteva informaţii relative la $\mathcal{U}$.

Lema 1. [Ş.C.] În $\mathcal{U}$ au loc următoarele relaţii, pentru orice p, $q \in \mathbb{Z}$, $p, q \geq 0$

$$A^p C^q = (C - 2pI)^q A^p,$$

$$B^p C^q = (C + 2pI)^q B^p,$$

$$[A, B^p] = pB^{p-1}(C - (p+1)I) = p(C + (p-1)I)B^{p-1},$$
$$[A^p, B] = pA^{p-1}(C + (p-1)I) = p(C - (p-1)I)A^{p-1}. \ \square$$

De asemenea, conform teoremei Poincaré-Birkhoff-Witt, are loc şi următoarea afirmaţie:

Teorema 1 [**Ş.C.**]. *Mulţimea* $\{A^iB^jC^k\}_{i,j,k\in\mathbb{N}}$ *formează o bază pentru* $\mathcal{U}(sl(2))$. $\square$

Considerăm elementul Casimir C definit de relaţia
$C = AB + BA + C^2/2$, fiind un element situat în algebra anvelopantă $\mathcal{U}$.
Se poate arăta că următoarea afirmaţie este adevărată.

Lema 2 [**Ş.C.**]. *Elementul Casimir* C *aparţine centrului lui* $\mathcal{U}$. $\square$

În cele ce urmează vom determina toate $\mathcal{U}$-modulele finit dimensionale. Începem prin a defini conceptul de vector de pondere maximă.

Definiţia 1. Fie V un $\mathcal{U}$-modul şi λ un scalar. Se spune că un vector $v \neq 0$ din V este de *pondere* $\lambda \in K$, dacă $Cv = \lambda v$. Dacă, în plus, avem $Av = 0$, atunci spunem că v este un *vector de pondere maximă* pentru ponderea λ.

Propoziţia 1. *Orice* $\mathcal{U}$*-modul* V *nenul şi finit dimensional admite un vector de pondere maximă.*

Demonstraţie. Deoarece K este algebric închis şi V este finit dimensional, operatorul C admite un vector propriu $w \neq 0$ cu valoarea proprie α, deci: $Cw = \alpha w$. Dacă $Aw = 0$, atunci w este vectorul de pondere maximă, deci ceea ce căutam. Dacă nu, să considerăm şirul de vectori $A^n w$. Cu Lema 1, avem că

$$C(A^n W) = (\alpha + 2n)(A^n W).$$

Prin urmare, $(A^n w)_{n\geq 0}$ este un şir de vectori proprii pentru C cu valori proprii distincte. Cum V este finit dimensional, C nu poate avea decât un număr finit de valori proprii, prin urmare, există un $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^n w \neq 0$ şi $A^{n+1}w = 0$. Vectorul $A^n w$ este un vector de pondere maximă. $\square$

Lema 3. *Fie* v *vectorul de pondere maximă corespunzător ponderii* λ. *Pentru* $p \in N$ *considerăm* $v_p = \frac{1}{p!}B^p v$. *Atunci*

$$Cv_p = (\lambda - 2p)v_p, \quad Av_p = (\lambda - P + 1)v_{p-1}$$
$$Bv_p = (p+1)v_{p+1}.$$

Demonstraţie. Din Lema 1, obţinem

$$B^pC = (C + 2pI)B^p,$$

deci $B^P C = CB^P + 2pB^P$, adică $CB^P = B^P C - 2pB^P$.

Acum

$$Cv_p = C\frac{1}{p!}B^P v = \frac{1}{p!}CB^P v = \frac{1}{p!}(CB^P)v =$$

$$= \frac{1}{p!}B^P Cv - \frac{1}{p!}2pB^P v = \frac{1}{p!}B^P \lambda v - 2pv_p = (\lambda - 2p)\, v_p,$$

adică prima relaţie este adevărată.

Pentru cea de-a doua, folosind tot Lema 1, obţinem

$$Av_p = A\frac{1}{p!}B^P v = \frac{1}{p!}AB^P v.$$

Dar $AB^P = [A, B^P] + B^P A = pB^{P-1}(C - (p-1)I) + B^P A$.

Revenind,

$$Av_p = \frac{1}{p!}pB^{P-1}(C - (p-1)I)v + \frac{1}{p!}B^P Av =$$

$$= \frac{1}{(p-1)!}B^{p-1}\left(\lambda v - (p-1)v\right) = \frac{1}{(p-1)!}B^{P-1}(\lambda - p + 1)v = (\lambda - p + 1)v_{p-1}.$$

Ultima relaţie fiind trivială,

$$Bv_p = B\frac{1}{p!}B^P v = (p+1)\frac{1}{(p+1)!}B^{P+1}v = (p+1)v_{p+1}. \quad \square$$

Stabilim acum o teoremă ce descrie $\mathcal{U}$-modulele finit dimensionale.

Teorema 2. (a) *Fie V un $\mathcal{U}$-modul finit dimensional generat de un vector de pondere maximă corespunzător ponderii λ.*

Atunci

(i) Scalarul λ este un număr întreg şi $\lambda = \dim(V) - 1$.

(ii) Luând $v_p = \frac{1}{p!}B^P v$, avem $v_p = 0$ pentru $p > \lambda$ şi, în plus, $\{v = v_0, v_1, ..., v_\lambda\}$ este o bază în V.

(iii) Operatorul C este diagonalizabil, având $(\lambda + 1)$ valori proprii $\{\lambda, \lambda - 2, ..., \lambda - 2\lambda = -\lambda\}$.

(iv) Orice alt vector de pondere maximă în V este un multiplu scalar de v şi este de pondere λ.

(v) Modulul V este simplu.

(b) Orice $\mathcal{U}$-modul finit dimensional este generat de un vector de pondere maximă. Două $\mathcal{U}$-module generate de vectorii de pondere maximă corespunzător aceleiaşi ponderi λ sunt izomorfe.

Demonstraţie. (a) Conform Lemei anterioare, şirul $\{v_p\}_{p\geq 0}$ este un şir de vectori proprii pentru C pentru valori proprii distincte. Deoarece V este finit dimensional, rezultă că există un n întreg astfel încât $v_n \neq 0$ şi $v_{n+1} = 0$. Conform lemei, se arată c ă $v_m = 0$, pentru orice $m > n$ şi $v_m \neq 0$, pentru orice $m \leq n$. Avem $n = \lambda$, deoarece $0 = Av_{n+1} = (\lambda - n)v_n$ (lema anterioară). Familia $\{v = v_0, v_1, ..., v_\lambda\}$ este liberă, pentru că ea este formată din vectorii proprii nenuli ai lui C corespunzători valorilor proprii distincte. Ea generează V, deoarece relaţiile din lema anterioară arată că orice element al lui V care este generat de v ca un $\mathcal{U}$-modul, este o combinaţie liniară a elementelor mulţimii $\{v_i\}_i$, rezultând $\dim V = \lambda + 1$. Astfel am demonstrat (i) şi (ii). Afirmaţia (iii) este o consecinţă imediată a lemei anterioare.

(iv) Fie v' un alt vector de pondere maximă. El este un vector propriu pentru C; de aici este clar că el este un multiplu scalar pentru un vector v_i. Dar, din nou, cu lema anterioară, vectorul v_i este anulat de A, dacă şi numai dacă $i = 0$.

(v) Fie V' un $\mathcal{U}$-submodul al lui V şi fie v' un vector de pondere maximă al lui V'. Atunci v' este un vector de pondere maximă al lui V. Din (iv), v' este un multiplu scalar nenul al lui v. Prin urmare, v este în V'. Deoarece v generează V avem $V \subset V'$, deci $V' = V$ ceea ce arată că V este simplu.

(b) Fie v un vector de pondere maximă al lui V; dacă V este simplu, atunci submodulul generat de v este în mod necesar egal cu V. Prin urmare, V este generat de un vector de pondere maximă.

Dacă V şi V' sunt generate de vectorii de pondere maximă v şi v' cu aceeaşi pondere λ, atunci aplicaţia liniară ce duce v_i în v'_i, pentru orice i, este un izomorfism de $\mathcal{U}$-module. □

Până la un izomorfism, $\mathcal{U}$-modulele simple sunt clasificate de întregii nenegativi astfel: fiind dat un astfel de întreg n, există un unic (până la un izomorfism) $\mathcal{U}$-modul simplu de dimensiune $(n+1)$ generat de un vector de pondere maximă corespunzător ponderii n. Notăm acest modul cu $V(n)$ şi morfismul corespunzător de algebre Lie cu $\rho(n) : sl(2) \to gl(n+1)$.

Pentru început, avem $v(0) = K$ şi $\rho(0) = 0$, ceea ce înseamnă că modulul $V(0)$ este trivial, cum de altfel este cazul tuturor modulelor de dimensiune unu. Mai general, orice $\mathcal{U}$-modul trivial este izomorf cu o sumă directă de copii ale lui $V(0)$.

Să observăm că morfismul $\rho(1) : sl(2) \to gl(2)$ este scufundarea naturală a lui $sl(2)$ în $gl(2)$ şi faptul că modulul $V(2)$ este izomorf cu reprezentarea adjunctă a lui $sl(2)$ via aplicaţia ce duce vectorul de pondere maximă v_0 în A, v_1 în $-C$ şi v_2 în B.

La fel pentru modulul $V(n)$ de dimensiune maximă, generatorii A, B şi C acţionează ca operatori reprezentaţi de următoarele matrice în baza $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$:

$$\rho(n)(A) = \begin{pmatrix} 0 & n & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\rho(n)(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(n)(C) = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & -n+2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

Să determinăm acţiunea elementului Casimir pe modulul simplu $V(n)$.

Lema 4. *Orice element din centrul lui $\mathcal{U}$ acţionează printr-un scalar pe modulul simplu $V(n)$. În particular, elementul Casimir C acţionează pe $V(n)$ prin înmulţire cu scalarul $\frac{n(n+2)}{2}$, care este nenul dacă $n > 0$.*

Demonstraţie. Fie Z un element din centrul lui $\mathcal{U}$. Acesta comută cu C, iar C descompune $V(n)$ într-o sumă directă de spaţii proprii de dimensiune unu. Prin urmare operatorul Z este diagonal cu aceiaşi vectori proprii $\{v = v_0, ..., v_n\}$ ca şi C. În particular, există scalarii $\alpha_0, ..., \alpha_n$ astfel încât $Zv_p = \alpha_p v_p$ pentru orice p. Acum,

$$\alpha_{p+1} B v_p = \alpha_{p+1}(p+1)v_{p+1} = (p+1)Zv_{p+1} =$$

$$= ZBv_p = BZv_p = \alpha_p B v_p.$$

Aşadar, toţi scalarii α_p sunt egali, ceea ce arată că Z acţionează ca un scalar.

Pentru a determina acţiunea elementului Casimir pe $V(n)$, avem de calculat Cv pentru vectorul de pondere maximă v. Conform definiţiei elementului Casimir şi Lemei 3, avem

$$Cv = ABv + BAv + \frac{C^2}{2}v = nv + \frac{n^2}{2}v = \frac{n(n+2)}{2}v. \qquad \square$$

În final, vom arăta că orice $\mathcal{U}$-modul finit-dimensional este o sumă directă de $\mathcal{U}$-module simple.

Teorema 3. *Orice $\mathcal{U}$-modul finit dimensional este semisimplu.*

Demontraţie. Ştim că este suficient să arătăm că, pentru orice $\mathcal{U}$-modul finit dimensional V şi orice submodul V' al lui V, există un alt submodul V'' al lui V, astfel încât V să fie izomorf cu suma directă $V' \oplus V''$. Considerăm $\mathcal{L} = sl(2)$.

(1) Demonstrăm existenţa unui astfel de submodul V'' în cazul când V' este de dimensiune unu în V. Vom proceda prin inducţie după dimensiunea lui V'.

Dacă $\dim(V') = 0$, putem considera $V'' = V$. Dacă $\dim V' = 1$ atunci neapărat V' şi V/V' sunt reprezentări triviale de dimensiune unu. Aşadar există o bază $\{v_1 \in V', v_2\}$ a lui V astfel încât $\mathcal{L}v_1 = 0$ şi $\mathcal{L}v_2 \subset V' = Kv_1$. Prin urmare avem $[\mathcal{L}, \mathcal{L}]v_i = 0$ pentru $i = 1, 2$. Relaţiile $(*)$ arăta că acţiunea lui $\mathcal{L}$ pe V este trivială. Deci vom lua ca V'' orice subspaţiu suplimentar al lui V' în V.

Presupunem că $\dim(V') = p > 1$ şi că afirmaţia ce trebuie demonstrată e adevărată pentru orice dimensiune mai mică decât p. Atunci fiecare V' este simplu sau nu.

(1a) Să presupunem mai întâi că V' nu este simplu; atunci există un submodul V_1 al lui V' astfel încât $0 < \dim(V_1) < \dim(V') = p$. Fie π proiecţia canonică a lui V şi $\bar{V} = V/V_1$, $\pi : V \to \bar{V}$. Modulul $\bar{V} = \pi(V')$ este un submodul al lui $\bar{V}$ de codimensiune unu şi dimensiunea sa este mai mică decât p. Ţinând seama de aceasta, aplicăm ipoteza de inducţie şi găsim un submodul $\bar{V}''$ al lui $\bar{V}$ astfel încât $\bar{V} \cong \bar{V}' \oplus \bar{V}''$. Liftând acest izomorfism la V obţinem

$$V = V' + \pi^{-1}(\bar{V}'').$$

Acum, deoarece $\dim(\bar{V}'') = 1$, spaţiul vectorial V_1 este un submodul de codimensiune unu al lui $\pi^{-1}(\bar{V}'')$. Din nou aplicăm ipoteza de inducţie pentru a găsi submodulul V'' al lui $\pi^{-1}(\bar{V}'')$ astfel încât

$$\pi^{-1}(\bar{V}'') \cong V_1 \oplus V''.$$

Să demonstrăm că acest submodul V'' de dimensiune unu are proprietăţile cerute, şi anume $V \cong V \oplus V''$.

Într-adevăr, argumentul de mai sus, implică faptul că $V = V' + V_1 + V''$; acum V_1 este conţinut în V' ceea ce arată că V este suma lui V' cu V''. Relaţia $\dim(V) = \dim(V') + \dim(V'')$ implică faptul că suma este directă.

(1b). Dacă submodulul V' este simplu, de dimensiune mai mare ca unu, atunci, din Lema anterioară, rezultă că elementul Casimir acţionează pe V' ca un scalar $\alpha \neq 0$. Prin urmare, operatorul C/α este identitatea pe V'. Acum, V/V' este de dimensiune unu, prin urmare este modul trivial. Aşadar C duce V în submodulul V' ceea ce înseamnă că aplicaţia C/α este un proiector al lui V în V'. Deoarece C/α comută cu orice element din $\mathcal{U}$, aplicaţia C/α este un morfism de $\mathcal{U}$-module. Aşadar submodulul $V'' = Ker(C/\alpha)$ este suplimentar cu V'.

(2) Cazul general. Acum ni se dau două module finit dimensionale $V' \subset V$ fără nici o restricţie asupra codimensiunii. Vom reduce situaţia la cazul codimensiunii unu, considerând spaţiile vectoriale $W' \subset W$ definite după cum urmează: W (respectiv W') este subspaţiul tuturor aplicaţiilor liniare de la V la V' ale căror restricţie la V' este omotetie (respectiv nulă). Este clar că W' este de codimensiune unu în W. În ordine, pentru a reducere la (1) trebuie să înzestrăm W şi W' cu structura de $\mathcal{U}$-module. Dar $Hom(V, V')$ este înzestrat cu structura de $\mathcal{U}$-modul, deoarece

$$(xf)(v) = xf(v) - f(xv)$$

$$\rho(x)(f) = [\rho(x), f],$$

pentru $f \in Hom(V, V')$.

Să arătăm că W şi W' sunt $\mathcal{U}$-module. Pentru $f \in W$, fie α un scalar astfel încât $f(v) = \alpha v$ pentru orice $v \in V'$; atunci, pentru orice $x \in \mathcal{L}$, avem

$$(xf)(v) = xf(v) - f(xv) = x(\alpha v) - \alpha(xv) = 0.$$

Un argument similar demonstrează că este submodul.

Aplicând (1), găsim un submodul W'' de dimensiune unu astfel încât $W \cong W' \oplus W''$. Fie f un generator al lui W''. Prin definiţie, el acţionează pe V' ca un scalar $\alpha \neq 0$. Urmează că f/α este un proiector al lui V în V'. Pentru a concluziona, este suficient să arătăm că f (deci f/α) este un morfism de module. Acum, deoarece W'' este un submodul de dimensiune unu demonstraţia este banală. Prin urmare, avem $xf = 0$, pentru orice $x \in \mathcal{L}$, ceea ce, prin $(xf)(v) = xf(v) - f(xv)$, ne duce la $xf(v) - f(xv) = 0$, pentru orice $v \in V$, adică la ceea ce trebuia demonstrat. $\square$

BIBLIOGRAFIE

[Di] Dixmier J., "*Enveloping Algebras*", North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1977.

[F.H.] Fulton W., Harris J., "*Representation Theory*", Springer-Verlag, New York, 1991.

[Ho] Hochschild G.P., "*Basic Theory of Algebraic Groups and Lie Algebras*", Graduate Texts in Math., **75**, Springer-Verlag, New York, 1981.

[Hu] Humphreys J.E., "*Introduction to Lie Algebras and their Representation Theory*", Graduate Texts in Math., **9**, Springer-Verlag, New York, 1972.

[Ja] Jacobson N., "*Lie Algebras*", Dover Publ., New York, 1979.

[Ka] Kassel C., "*Quantum Groups*", Graduate Texts in Math., **155**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Ş.C] Ştefănescu M., Ciobanu C., "*Introducere în studiul algebrelor Lie*", Editura Academiei Navale "Mircea cel Bătrân", Constanţa, 2000.

Department of Mathematics and Informatics,
"Mircea cel Bătrân" Naval Academy,
Str. Fulgerului 1
8700 - Constantza
Romania

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 67–70

ASUPRA SERIEI ARMONICE GENERALIZATE $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

Constantin Costara

După cum se ştie, seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$, converge, dacă şi numai dacă $\alpha > 1$. În particular, seria diverge dacă $\alpha \in (0,1]$. În continuare ne propunem să arătăm că, dacă, pentru un număr natural nenul w, notăm cu $A \subseteq \mathbb{N}^*$ mulţimea numerelor naturale nenule pentru care w nu apare în scrierea lor în baza zece, atunci există un $\varepsilon \in (0,1)$, depinzând de w, astfel încât seria $\sum\limits_{n\in A} \frac{1}{n^\alpha}$ converge, $\forall \alpha > \varepsilon$. În particular va rezulta că seria $\sum\limits_{n\in A} \frac{1}{n}$ converge.

Vom folosi următoarea propoziţie:

Propoziţia 1. *Fie $N \geq 1$ un număr natural, $\alpha > 0$ un număr real, $(T_n)_{n\geq 1}$ un subşir al şirului numerelor naturale, şi $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ o funcţie continuă, strict crescătoare, cu $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$, astfel încât:*

(i) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(x\varphi(x))^\alpha} dx$ converge;

(ii) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi pentru orice $k \in (T_n - 1, T_{n+1} - 1]$, este adevărată relaţia:

$$\frac{T_{n+1}-1}{10^{nN}} \leq \frac{1}{(\varphi(k))^2}.$$

Atunci, pentru orice submulţime infinită $A \subseteq \mathbb{N}^*$, $A = \{a_1 < a_2 < .. < a_n < ..\}$, astfel încât

$$\left|A \cap \{1, 2, .., 10^{nN} - 1\}\right| < T_n, \; n \geq 1,$$

seria $\sum\limits_{n\in A} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Demonstraţie. Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq T_1$. Cum $T_1 < T_2 < .. < T_n < .. \to \infty$, va exista un unic $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $k \in (T_n - 1, T_{n+1} - 1]$. Deci $k \geq T_n$, şi $a_k \geq a_{T_n}$. Deoarece mulţimea $A \cap \{1, 2, .., 10^{nN} - 1\}$ are mai puţin de T_n elemente, va rezulta că $a_{T_n} \geq 10^{nN}$, şi atunci $a_k \geq 10^{nN}$. Mai mult

$$\frac{k}{a_k} \leq \frac{k}{10^{nN}} \leq \frac{T_{n+1} - 1}{10^{nN}} \leq \frac{1}{(\varphi(k))^2}, \forall k \geq T_1.$$

Atunci

$$\frac{k\varphi(k)}{a_k} \leq \frac{1}{\varphi(k)}, \forall k \geq T_1,$$

deci

$$\frac{\frac{1}{a_k}}{\frac{1}{k\varphi(k)}} \leq \frac{1}{\varphi(k)}, \forall k \geq T_1.$$

Ridicând la puterea $\alpha > 0$, vom obţine

$$\frac{\frac{1}{a_k^\alpha}}{\frac{1}{(k\varphi(k))^\alpha}} \leq \frac{1}{(\varphi(k))^\alpha}, \forall k \geq T_1.$$

Cum $\alpha > 0$, va rezulta că $\lim\limits_{k\to\infty} (\varphi(k))^\alpha = \infty$, şi deci $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{(\varphi(k))^\alpha} = 0$. Din criteriul raportului, dacă $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\varphi(k))^\alpha}$ converge, va rezulta că şi seria $\sum\limits_{k=T_1}^{\infty} \frac{1}{a_k^\alpha}$ converge, deci seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^\alpha}$ converge, adică enunţul. Dar funcţia $x \to \frac{1}{(x\varphi(x))^\alpha}$ este continuă, pozitivă şi descrescătoare pe $[1, \infty)$. Conform criteriului integral al lui Cauchy, deoarece $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(x\varphi(x))^\alpha} dx$ converge, rezultă că $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\varphi(k))^\alpha}$ converge. □

Folosind această propoziţie vom rezolva problema enunţată la început.

Propoziţia 2. *Fie $w \in \mathbb{N}^*$, şi notăm cu $A \subseteq \mathbb{N}^*$ mulţimea numerelor naturale nenule pentru care w nu apare în scrierea lor în baza zece. Dacă notăm cu $N \in \mathbb{N}^*$ numărul de cifre pentru w, atunci, pentru orice*

$$\alpha > \varepsilon = \frac{1}{1 - \frac{\ln\left(\frac{10^N - 1}{10^N}\right)}{2\ln(10^N - 1)}}, \textit{ seria } \sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha} \textit{ converge.}$$

Demonstraţie. Să observăm, în primul rând, că $\varepsilon \in (0, 1)$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ definim

$$\Psi : A \cap \{1, 2, .., 10^{nN} - 1\} \to \mathbb{R}^n,$$

$$\Psi\left(\overline{a_1..a_{nN}}\right) = \left(\overline{a_1..a_N}, \overline{a_{N+1}..a_{2N}}, .., \overline{a_{(n-1)N+1}..a_{nN}}\right).$$

Atunci Ψ este injectivă şi

$$\operatorname{Im}\Psi \subseteq \{\{0, 1, .., \underbrace{9..9}_{N}\}\backslash w\} \times .. \times \{\{0, 1, .., \underbrace{9..9}_{N}\}\backslash w\},$$

de unde rezultă că

$$\left|A \cap \{1, 2, .., 10^{nN} - 1\}\right| < \left(10^N - 1\right)^n,$$

deoarece $w \neq 0$. Definim atunci $T_n = \left(10^N - 1\right)^n$, $\forall n \geq 1$, şi am obţinut că

$$\left|A \cap \{1, 2, .., 10^{nN} - 1\}\right| < T_n, \forall n \geq 1.$$

Fie acum $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in (T_n - 1, T_{n+1} - 1]$. Atunci

$$\frac{T_{n+1} - 1}{10^{nN}} \leq \frac{\left(10^N - 1\right)^{n+1}}{10^{nN}} = \left(10^N - 1\right)\left(\frac{10^N - 1}{10^N}\right)^n = ba^n,$$

unde am notat cu $b = 10^N - 1$ şi cu $a = \frac{10^N - 1}{10^N}$, $a \in (0, 1)$, $b \in (1, \infty)$. Dar

$$k \leq T_{n+1} - 1 \Rightarrow k \leq b^{n+1} \Rightarrow \log_b k \leq n + 1 \Rightarrow n \geq \log_b k - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^n \leq a^{\log_b k - 1} \Rightarrow \frac{T_{n+1} - 1}{10^{nN}} \leq ba^{\log_b k - 1} = \left(\frac{1}{b^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{\log_b k - 1}{2}}}\right)^2.$$

Fie atunci $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, $\varphi(x) = b^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{\log_b x - 1}{2}}$, $\forall x \in [1, \infty)$. Atunci $\varphi(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{\ln a}{2 \ln b}}$, $\forall x \in [1, \infty)$. Evident, φ este continuă, crescătoare, iar $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = \infty$. Atunci $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in (T_n - 1, T_{n+1} - 1]$ este adevărată relaţia $\frac{T_{n+1} - 1}{10^{nN}} \leq \frac{1}{(\varphi(k))^2}$, adică (ii) de la Propoziţia 1. Mai trebuie arătat că integrala $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(x\varphi(x))^{\alpha}} dx$ converge. Avem:

$$\frac{1}{(x\varphi(x))^{\alpha}} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\alpha}{2}} x^{\alpha\left(1-\frac{\ln a}{2\ln b}\right)}},$$

şi, cum $\alpha\left(1-\frac{\ln a}{2\ln b}\right) > 1$, rezultă că $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x\varphi(x))^{\alpha}} dx < \infty$.
Aplicăm Propoziţia 1 şi obţinem enunţul.□

Corolar 3. *Fie $w \in \mathbb{N}^*$, şi fie $A \subseteq \mathbb{N}^*$ mulţimea numerelor naturale nenule pentru care w nu apare în scrierea lor în baza zece. Atunci seria $\sum\limits_{n\in A} \frac{1}{n}$ converge.*

Comentariu. Considerăm w un număr natural nenul cu N cifre şi fie A mulţimea de mai sus. A este infinită şi considerăm seria $\sum\limits_{n\in A} \frac{1}{n^{\alpha}}$, unde $\alpha > 0$. Conform Propoziţiei 2, există un $\varepsilon \in (0,1)$ astfel încât $\sum\limits_{n\in A} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge, $\forall \alpha \in (\varepsilon, \infty)$. Să notăm cu $\bar{\alpha} = \inf\{\alpha \in (0,\infty);\ \sum\limits_{n\in A} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty\}$. Atunci $\bar{\alpha} \in [0,\varepsilon]$, iar $\sum\limits_{n\in A} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge, dacă $\alpha > \bar{\alpha}$ şi diverge, dacă $\alpha < \bar{\alpha}$. Ar fi foarte interesant să se poată calcula valoarea lui $\bar{\alpha}$ şi să vedem cum depinde ea de w. Să observăm că $\bar{\alpha}$ ar putea să fie chiar zero.

"Ovidius" University,
Bd. Mamaia 124,
8700 Constanta,
Romania

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 71–76

O APLICAŢIE A RECIPROCEI LEMEI LUI SCHUR

Cristina Flaut

În cele ce urmează, ne propunem să prezentăm la un nivel oarecum elementar, particularizarea pentru grupuri a reciprocei lemei lui Schur.

Teoremă. *Fie $(G,.)$ un grup abelian finit astfel încât orice endomorfism f al său este sau automorfism sau $f(x) = e$, $\forall x \in G$, unde e este elementul neutru al grupului. Atunci grupul G este ciclic de ordin p^{α}, cu p număr prim, $\alpha \in \mathbb{N}^*$.*

Considerăm cunoscute noţiuni ca: ordinul unui element, grup factor al unui grup abelian în raport cu un subgrup al său, subgrup ciclic, nucleu al unui endomorfism de grupuri, şi proprietăţi ca teorema lui Lagrange şi faptul că singurele grupuri abeliene fără subgrupuri proprii sunt cele ciclice de ordine numere prime.

Vom demonstra, mai întâi, câteva teoreme (Cauchy, Sylow) în cazul particula al grupului finit abelian. (Aceste teoreme se demonstrează şi când grupul G este finit, dar necomutativ, demonstraţiile fiind mult mai complicate).

Propoziţia 1 (Cauchy). *Fie $(G,.)$ un grup finit abelian şi $p/o(G)$, unde p este un număr prim şi $o(G)$ este ordinul lui G. Atunci există un element $a \in G$, $a \neq e$ astfel ca $a^p = e$.*

Demonstraţia se face prin inducţie după $o(G)$. Presupunem că teorema este adevărată pentru orice grup abelian având ordin mai mic ca $o(G)$ (teorema este banal adevărată pentru grupuri cu un singur element).

Dacă G nu are subgrupuri proprii, atunci G este grup ciclic de ordin prim, deci $o(G) = p$ şi există în G $p-1$ elemente $a \neq e$ satisfăcând condiţia $a^p = a^{o(G)} = e$.

Presupunem că G are subgrupuri proprii $N \neq (e)$. Dacă $p/o(N)$, atunci, din ipoteza de inducţie, ştiind că $o(N) < o(G)$ şi că N este abelian, există $a \in N \subseteq G$, $a \neq e$, astfel încât $a^p = e$. Dacă $p \nmid o(N)$, cum G este abelian, G/N este grup abelian, $o(G/N) = \frac{o(G)}{o(N)} < o(G)$ (din teorema lui Lagrange) şi $p/\frac{o(G)}{o(N)}$. Din ipoteza de inducţie rezultă că există în G/N un element $\hat{x}$ satisfăcând condiţia $\hat{x}^p = \hat{e}$ şi $\hat{x} \neq \hat{e}$. Dar $\hat{x} = Nx$ şi $\hat{x}^p = (Nx)^p = Nx^p = \hat{e} = N$, deci $x^p \in N$ cu $x \notin N$. Cum $p \nmid o(N)$ şi p este prim, avem că $x^{o(N)} \neq e$. Dacă $x^{o(N)} = e$, cum c.m.m.d.c.$(p, o(N)) = 1$ rezultă că există $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\alpha p + \beta o(N) = 1$ şi $x = x^{\alpha p + \beta o(N)} = (x^p)^\alpha \cdot (x^{o(N)})^\beta = (x^p)^\alpha \in N$ în contradicţie cu ipoteza făcută. Din $x^p \in N$ rezultă $(x^p)^{o(N)} = e$, deci $(x^{o(N)})^p = e$. Atunci $a = x^{o(N)}$ ($a \neq e$, din cele de mai sus) este elementul căutat. □

Propoziţia 2. **(Sylow).** *Fie $(G, .)$ un grup abelian finit. Dacă p este un număr prim astfel încât $p^\alpha / o(G)$ şi $p^{\alpha+1} \nmid o(G)$, atunci G are un subgrup de ordin p^α. (Un astfel de subgrup se numeşte p-subgrup Sylow).*

Demonstraţie. Dacă $\alpha = 0$, subgrupul (e) satisface condiţia din teoremă. Presupunem $\alpha \neq 0$. Atunci $p/o(G)$ şi din teorema lui Cauchy, există în G un element $a \neq e$ astfel încât $a^p = e$. Fie $S = \{x \in G / x^{p^n} = e, n \in \mathbb{N}\}$ cum $a \in S$, rezultă că $S \neq (e)$. Vom demonstra că S este un subgrup al lui G. Fie $x, y \in S$, $x^{p^n} = e, y^{p^m} = e$, atunci $(xy)^{p^{m+n}} = x^{p^{m+n}} y^{p^{m+n}} = e$ şi deci $xy \in S$. Din Propoziţia 1, rezultă că $o(S) = p^\beta$ şi $0 < \beta \leq \alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Presupunem că $\beta < \alpha$ şi considerăm grupul abelian G/S. Cum $\beta < \alpha$ şi $o(G/S) = \frac{o(G)}{o(S)}$ rezultă că $p/o(G/S)$ şi deci există un element $\hat{y} \in G/S$ astfel ca $\hat{y} \neq \hat{e}$ şi $\hat{y}^p = \hat{e}$. Dar $\hat{y} = Sy$ cu $y \in G$, $y \notin S$ şi avem $(Sy)^p = S$, rezultă că $Sy^p = S$, deci $y^p \in S$ şi deci avem că $e = (y^p)^{o(S)} = (y^p)^{p^\beta} = y^{p^{\beta+1}}$, deci $y \in S$ şi $Sy = S$, ceea ce contrazice ipoteza. Urmează că $o(S) = p^\alpha$. □

Lema 3. *Fie $(G, .)$ un grup abelian şi H, K subgrupuri finite ale sale. Atunci $o(HK) = \frac{o(H)o(K)}{o(H \cap K)}$.*

Demonstraţie. $HK := \{x \in G / x = hk,\ h \in H,\ k \in K\}$.
Fie $\varphi : H \times K \to HK$, $\varphi(h, k) = hk, h \in H, k \in K$. Fie R relaţia de echivalenţă asociată lui $\varphi : (h, k)R(h', k') \Leftrightarrow \varphi(h, k) = \varphi(h', k')$.

Mulţimea factor $H \times K/R$ este în corespondenţă bijectivă cu HK prin $\psi : H \times K/R \to HK$

$$\psi(\widehat{(h, k)}) = \varphi(h, k) = hk.$$

ψ nu depinde de alegerea reprezentanţilor: fie $(h', k') \in \widehat{(h, k)}$ rezultă că $(h', k')R(h, k)$, adică $\varphi(h', k') = \varphi(h, k)$, deci $hk = h'k'$. Atunci

$$\psi(\widehat{(h', k')}) = \varphi(h', k') = h'k' = hk = \varphi(h, k) = \psi(\widehat{(h, k)}),$$

deci ψ este corect definită.

ψ este surjecţie din modul cum a fost definită.

ψ este injecţie: $\psi(\widehat{(h, k)}) = \psi(\widehat{(a, b)}) \Rightarrow hk = ab$, deci $(h, k) = (a, b)$.

Fie $(h,k) \in H \times K$ şi numărăm câte elemente are clasa sa de echivalenţă. Dacă $hk = h'k'$, atunci $h'^{-1}h = k'k^{-1} \in H \cap K$ şi deci $k' \in (H \cap K)k$, deci k' poate lua cel mult *card* $(H \cap K)$ valori. Dar fiecare element $k' \in (H \cap K)K$ defineşte în mod unic pe $h' = hkk'^{-1}$ şi rezultă clasa lui (h,k) are $card(H \cap K)$ elemente. Atunci avem

$$o(HK) = card(HK) = card\frac{H \times K}{R} = \frac{cardH\ cardK}{card(H \cap K)} = \frac{o(H)o(K)}{o(H \cap K)}. \ \square$$

Observaţia 4. Subgrupul S din teorema lui Sylow este unic. Presupunem că mai există T un subgrup al lui G astfel încât $o(T) = p^\alpha$. Cum G este abelian, avem că $ST = TS$. Din Lema 3, rezultă că $o(ST) = \frac{o(S)o(T)}{o(S \cap T)} = \frac{p^\alpha p^\alpha}{o(S \cap T)}$, dar $S \neq T$, deci $o(S \cap T) < p^\alpha$. Rezultă atunci că $o(ST) = p^\gamma$, cu $\gamma > \alpha$. Dar ST este subgrup al lui G şi atunci $o(ST)/o(G)$, adică $p^\gamma/o(G)$, în contradicţie cu ipoteza.

Definiţia 5. Fie $(G,.)$ grup abelian, $N_1, N_2, ..., N_n$ subgrupuri ale sale astfel încât:

1) $G = N_1N_2...N_n = \{x \in G / x = x_1x_2...x_n,\ x_i \in N_i,\ \forall i \in \overline{1,n}\}$.

2) Scrierea unui element arbitrar $g \in G$ sub forma $g = m_1m_2...m_n$, cu $m_i \in N_i$, este unică.

Spunem atunci că G este *produs direct (intern)* al subgrupurilor $N_1, N_2, ..., N$

Propoziţia 6. *Fie $(G,.)$ un grup finit abelian. Atunci G se poate scrie ca produs direct (intern) al subgrupurilor sale Sylow.*

Demonstraţie. Fie $o(G) = n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ şi fie N_i p_i-subgrupul Sylow al lui G. Notăm $q_i = \frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$. Cum $q_1, q_2, ..., q_k$ sunt numere prime între ele rezultă că c.m.m.d.c. $\{q_1, q_2, ..., q_k\} = 1$, deci există $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in Z$ astfel ca $\lambda_1q_1 + \lambda_2q_2 + ... + \lambda_kq_k = 1$. Pentru orice $x \in G$, $x = x^1 = x^{\lambda_1q_1+...+\lambda_kq_k} = (x^{q_1})^{\lambda_1}...(x^{q_k})^{\lambda_k}$. Notând $x_i = x^{q_i}$, găsim $x_i^{p_i^{\alpha_i}} = (x^{q_i})^{p_i^{\alpha_i}} = e$, de unde rezultă că $x_i \in N_i$. Atunci $x = x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}...x_k^{\lambda_k}$, deci orice element din G se scrie ca produs de elemente din N_i, $i = \overline{1,k}$. Această scriere este unică pentru că dacă avem $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}...x_k^{\lambda_k} = y_1^{\gamma_1}y_2^{\gamma_2}...y_k^{\gamma_k}$ două scrieri distincte ale unui element $x \in G$, atunci rezultă de exemplu $x_1^{\lambda_1}y_1^{-\gamma_1} = x_2^{-\lambda_2}y_2^{\gamma_2}...x_k^{-\lambda_k}y_k^{\gamma_k}$.

Cum $x_1^{\lambda_1}y_1^{-\gamma_1} \in N_1$ rezultă că $x_2^{-\lambda_2}y_2^{\gamma_2}...x_k^{-\lambda_k}y_k^{\gamma_k} \in N_1$ şi deci

$$(x_2^{-\lambda_2}y_2^{\gamma_2}...x_k^{-\lambda_k}y_k^{\gamma_k})^{p_1^{\alpha_1}} = e \text{ adică } o(x_2^{-\lambda_2}y_2^{\gamma_2}...x_k^{-\lambda_k}y_k^{\gamma_k})/p_1^{\alpha_1}$$

contradicţie pentru că $x_2^{-\lambda_2}y_2^{\gamma_2}...x_k^{-\lambda_k}y_k^{\gamma_k} \in N_2N_3...N_k$. $\square$

Propoziţia 7. *Orice grup finit abelian G se scrie ca produs direct intern de subgrupuri ciclice.*

Demonstraţie. Din Propoziţia 6 avem că G, se scrie ca produs direct al subgrupurilor sale Sylow care sunt grupuri ce au ordine de forma p^n, unde p este un număr prim.

Pentru a demonstra propoziţia, este suficient să arătăm că orice subgrup Sylow al lui G se scrie ca produs direct de subgrupuri ciclice, adică este suficient să demonstrăm rezultatul pentru grupuri abeliene de ordin p^n. Pentru aceasta vom găsi elementele $a_1, a_2, ..., a_k \in G$ astfel încât orice $x \in G$ să poată fi scris în mod unic sub forma $x = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} ... a_k^{\alpha_k}$. Facem observaţia că dacă aceste elemente există şi dacă $a_1, a_2, ..., a_k$ au ordinul $p^{n_1}, p^{n_2}, ..., p^{n_k}$ cu $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_k$, atunci cel mai mare ordin pe care poate să îl aibă un element din G este p^{n_1}. Pentru aceasta presupunem că există $x \in G$ astfel ca $o(x) = p^{\alpha}$ cu $\alpha > n_1$. Cum $x = a_1^{\beta_1} ... a_k^{\beta_k}$ (scriere unică) şi $o(a_i) = p^{n_i}$, avem că $x^{p^{n_1}} = (a_1^{p^{n_1}})^{\beta_1} ... (a_k^{p^{n_1}})^{\beta_k} = e$, pentru că $p^{n_1} \geq p^{n_i}$, $\forall i = \overline{1,k}$ de aici rezultând p^{α}/p^{n_1} cu $\alpha > n_1$, deci contradicţie.

Fie a_1 un element de ordin maxim din G, $o(a_1) = p^{n_1}$ şi $A_1 = (a_1)$ grupul ciclic generat de a_1. Fie $b_2 \in G$ astfel ca $\hat{b}_2$, imaginea lui b_2 în G/A_1, să aibă ordin maxim pe care-l notăm p^{n_2}. Cum $o(\hat{b}_2)$ divide ordinul lui b_2 şi cum $o(a_1)$ este maxim avem atunci că $n_1 \geq n_2$.

Pentru a avea produs direct intern între A_1 şi (b_2) trebuie să avem $A_1 \cap (b_2) = (e)$. Dacă acest lucru nu este adevărat pentru elementul b_2 găsit iniţial, va trebui să adaptăm elementul b_2. Presupunem că $A_1 \cap (b_2) \neq (e)$, atunci cum $\widehat{b_2^{p^{n_2}}} = \hat{e} = A_1$ avem că $b_2^{p^{n_2}} \in A_1$ şi că p^{n_2} este prima putere a lui b_2 astfel încât $b_2^{p^{n_2}} \in A_1$, deci $b_2^{p^{n_2}} = a_1^i$. Rezultă că $(a_1^i)^{p^{n_1 - n_2}} = = (b_2^{p^{n_2}})^{p^{n_1 - n_2}} = b_2^{p^{n_1}} = e$ (din alegerea lui p^{n_1} ca ordin maxim), deci $a_1^{ip^{n_1 - n_2}} = = e$ şi cum $o(a_1) = p^{n_1}$ rezultă $p^{n_1}/ip^{n_1 - n_2}$, deci p^{n_2}/i şi rezultă că $i = jp^{n_2}$. Atunci vom avea $b_2^{p^{n_2}} = a_1^i = a_1^{jp^{n_2}}$ şi luăm $a_2 = a_1^{-j} b_2$. Se observă că $a_2^{p^{n_2}} = a_1^{-jp^{n_2}} b_2^{p^{n_2}} = a_1^{-i} a_1^i = e$, deci a_2 este elementul căutat şi vom lua $A_2 = (a_2)$. Afirmăm că $A_1 \cap A_2 = (e)$. Pentru aceasta presupunem că $a_2^t \in A_1$, unde $a_2 = a_1^{-j} b_2$ găsit mai sus. Deci vom avea $(a_1^{-j} b_2)^t \in A_1$ şi rezultă că $b_2^t \in A_1$. Din alegerea lui b_2 rezultă că p^{n_2}/t şi deci $a_2^t = e$, adică $A_1 \cap A_2 = (e)$.

Continuăm demonstraţia cu încă un pas. Fie $b_3 \in G$ astfel ca $\hat{b}_3$, imaginea lui b_3 în $G/A_1 A_2$, să aibă ordin maxim p^{n_3} şi afirmăm că $n_3 \leq n_2 \leq n_1$. Acest lucru se întâmplă pentru că din alegerea lui n_2, $b_3^{p^{n_2}} \in A_1$, deci este şi în $A_1 A_2$ astfel că $n_3 \leq n_2$. Deoarece $b_3^{p^{n_3}} \in A_1 A_2$, $b_3^{p^{n_3}} = a_1^{i_1} a_2^{i_2}$, afirmăm că p^{n_3}/i_1 şi p^{n_3}/i_2. Pentru aceasta pornim de la faptul că $b_3^{p^{n_2}} \in A_1$, şi deci avem $(a_1^{i_1} a_2^{i_2})^{p^{n_2 - n_3}} = (b_3^{p^{n_3}})^{p^{n_2 - n_3}} = b_3^{p^{n_2}} \in A_1$. Acest lucru ne arată că $a_2^{i_2 p^{n_2 - n_3}} \in A_1$ şi deci $p^{n_2}/i_2 p^{n_2 - n_3}$, adică p^{n_2}/i_2 şi cum $n_3 \leq n_2$ rezultă p^{n_3}/i_2. Deoarece $b_3^{p^{n_1}} = e$ (din alegerea lui p^{n_1} ca cel mai mare ordin din G)

rezultă că $\left(a_1^{i_1} \cdot a_2^{i_2}\right)^{p^{n_1-n_3}} = b_3^{p^{n_1}} = e$, deci $a_1^{i_1 p^{n_1-n_3}} \in A_2 \cap A_1 = (e)$ adică $a_1^{i_1 p^{n_1-n_3}} = e$ şi atunci p^{n_3}/i_1.

Fie $i_1 = j_1 p^{n_3}$, $i_2 = j_2 p^{n_3}$ şi avem $b_3^{p^{n_3}} = a_1^{j_1 p^{n_3}} a_2^{j_2 p^{n_3}}$. Considerăm $a_3 = a_1^{-j_1} a_2^{-j_2} b_3$. Luăm $A_3 = (a_3)$ şi este evident că $a_3^{p^{n_3}} = e$.

Afirmăm că $A_3 \cap (A_1 A_2) = (e)$. Pentru aceasta presupunem că $a_3^t \in A_1 A_2$, deci $(a_1^{-j_1} a_2^{-j_2} b_3)^t \in A_1 A_2$, de unde rezultă că $b_3^t \in A_1 A_2$, dar atunci avem că p^{n_3}/t şi ştiind că $a_3^{p^{n_3}} = e$ avem că $a_3^t = e$, adică $A_3 \cap (A_1 A_2) = (e)$.

Continuând în acest mod, găsim subgrupurile ciclice $A_1 = (a_1)$, $A_2 = (a_2), \ldots, A_k = (a_k)$, de ordine $p^{n_1}, p^{n_2}, \ldots, p^{n_k}$, cu $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$, astfel ca $G = A_1 A_2 \ldots A_k$ şi pentru orice i, avem $A_i \cap (A_1 A_2 \ldots A_{i-1}) = (e)$. Aceasta ne arată că orice $x \in G$ are o unică reprezentare $x = a_1' a_2' \ldots a_k'$, cu $a_i' \in A_i$, $i = \overline{1,k}$, deci G este produs direct al subgrupurilor $A_1, A_2, \ldots, A_k$. $\square$

Suntem în măsură acum să demonstrăm teorema.

Demonstraţia teoremei: Fie $o(G) = n$. Din Propoziţia 6 avem că G se scrie ca produs direct de subgrupuri ciclice netriviale $G = H_1 H_2 \ldots H_r$. Fie H_i subgrup ciclic al lui G din descompunerea de mai sus şi fie $\Pi_i : G \to H_i$, $\Pi_i(x) = x_i$, unde $x = x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_r$, cu $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2, \ldots, x_r \in H_r$. Cum scrierea este unică avem că $x_i \in H_i$ este unic determinat pentru elementul x considerat, deci Π_i este bine definită.

Π_i este morfism surjectiv pentru că $\Pi_i(xy) = x_i y_i$ cu x_i, y_i unicele elemente din H_i ce apar în descompunerea lui x, y iar surjectivitatea rezultă din definiţie.

Fie $j_i : H_i \to G$, $j_i(x) = x$ injecţia canonică. Atunci $G \xrightarrow{\Pi_i} H_i \xrightarrow{j_i} G$, $f = j_i \circ \Pi_i$ este morfism de la G la G diferit de morfismul nul. Conform ipotezei, f este bijecţie, rezultă că Π_i este injecţie deci bijecţie. Avem atunci că $G = H_i$, cu H_i grup ciclic de ordin $p_i^{n_i}$, deci G este grup ciclic de ordin $p_i^{n_i}$. $\square$

Consecinţă. *Dacă $(G, .)$ este grup de ordin n, astfel încât n nu se divide cu pătratul nici unui număr prim şi satisface condiţiile teoremei, atunci G este ciclic de ordin prim.*

În acest caz teorema admite şi următoarea ***Reciprocă:*** *Fie $(G, .)$ grup ciclic de ordin prim, atunci orice endomorfism f al său este automorfism sau $f(x) = e$, $\forall x \in G$ unde e este elementul neutru al grupului. (Regăsim astfel lema lui Schur particularizată pentru grupuri).*

Demonstraţie. Fie $f : G \to G$ un morfism de grupuri şi $f(x) \neq e$ pentru măcar un $x \in G$, deci $Ker\ f \neq G$. Cum $Ker\ f$ este subgrup al lui G şi G este de ordin prim, avem $Ker\ f = (e)$,deci f este injecţie, adică bijecţie, pentru că G este finit, deci f este un automorfism. $\square$

BIBLIOGRAFIE

1. Toma Albu, N. Manolache, *19 Lecţii de teoria grupurilor,* Universitatea Bucureşti, 1988.

2. I. N. Hernstein, *Topics in Algebra,* Chicago, 1975.

3. Ion D. Ion, N. Radu, *Algebră,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1981.

4. A. I. Kostrikin, I.R. Shafarevich, *Algebra I, Basic Notions of Algebra.* Springer-Verlag, Berlin, 1990.

5. Neal H. McCoy, Thomas R. Berger, *Algebra: groups, rings and other topics,* Allyn and Bacon, Boston, 1977.

6. Derek J.S. Robinson, *A course in theory of groups,* Springer-Verlag, Berlin, 1993.

7. M. Ştefănescu, *Introducere în teoria grupurilor,* Editura Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, 1993.

"Ovidius" University,
Constanţa,
Romania

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 77–86

METODE NUMERICE PENTRU SISTEME HAMILTONIENE

Rodica Moga

Abstract

Lucrarea prezinta unele metode numerice folosite pentru discretizarea sistemelor hamiltoniene liniare si neliniare

1. Definiţii şi rezultate de bază

1.1. Aplicaţii simplectice si aplicaţii conservative

Fie $G : D \subset \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}^{2N}$ o aplicaţie de clasă C^1.

Fie $U_{n+1} = G(U_n), U_0 = U$ un sistem dinamic scris sub forma:

$$\begin{cases} P_{n+1} = A(P_n, Q_n), P_0 = P \\ Q_{n+1} = B(P_n, Q_n), Q_0 = Q, \end{cases} \tag{1}$$

unde $P_n, Q_n \in \mathbb{R}^N, U_n^T = \left(P_n^T, Q_n^T\right), G(U_n)^T = \left(A(P_n, Q_n)^T, B(P_n, Q_n)^T\right)$.

Fie $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, unde I este matricea unitate de ordin n, matricea numită "the skew symmetric matrix" (matricea strâmb-simetrică).

Definitie. Aplicaţia (1) se numeşte simplectică dacă $[dG(U)]^T J [dG(U)] = J$, pentru orice $U \in \mathbb{R}^{2N}$.

Observatie. Aplicaţiile $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ce conserva aria sunt aplicaţii simplectice. In acest caz $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Teorema 1 (Proprietatea fundamentala a aplicaţiilor simplectice)
Fie (1) un sistem dinamic discret (SSD) in $\mathbb{R}^{2N}$. Dacă el este simplectic, atunci suma proiecţiilor ariei in planele $\left(P^i, Q^i\right)$ este invariantă la acţiunea sistemului.

Exemplu. Pentru $\begin{cases} \dot{p} = q \\ \dot{q} = -p \end{cases}$, sistem având hamiltonianul $H(p,q) = \frac{1}{2}\left(p^2+q^2\right)$,
folosind metoda lui Euler obtinem

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} q_n \\ -p_n \end{pmatrix}, adic\breve{a} \begin{cases} p_{n+1} = p_n + \Delta t q_n \\ q_{n+1} = q_n - \Delta t p_n \end{cases}.$$

Calculele arată că $p_{n+1}^2 + q_{n+1}^2 = \left(1+(\Delta t)^2\right)\left(p_n^2+q_n^2\right)$, adică $H(p_n, q_n) \neq H(p_{n+1}, q_{n+1})$deci hamiltonianul nu este conservat.

Observaţie. Metoda Runge -Kutta implicită de ordinul doi nu conservă, în general, hamiltonianul.

Exemplu: Pentru $\begin{cases} \dot{p} = q \\ \dot{q} = -p \end{cases}$ sistem hamiltonian cu $H(p,q) = \frac{1}{2}\left(p^2+q^2\right)$, metoda prezentata în Exemplul 2 conduce la:

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} \frac{q_{n+1}+q_n}{2} \\ -\frac{p_{n+1}+p_n}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculele arată că:

$$p_{n+1}^2 + q_{n+1}^2 = \left(p_n^2+q_n^2\right)\frac{4+(\Delta t)^2}{4-(\Delta t)^2} +$$

$$+2\Delta t\left[\Delta t\left(p_n p_{n+1} + q_n q_{n+1}\right) + 2\left(p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n\right)\right]$$

deci, în general, $p_{n+1}^2 + q_{n+1}^2 \neq p_n^2 + q_n^2$, şi hamiltonianul nu este conservat de-a lungul traiectoriei.

Observatie. (Exemplu de conservare a hamiltonianului).
Fie $\begin{cases} \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$ un sistem în R^2.
Folosind metode tradiţionale de aproximare a derivatei, avem:

$$\begin{cases} p_{n+1} - p_n = \begin{cases} \Delta t \frac{H(p_n, q_{n+1}) - H(p_n, q_n)}{q_{n+1}-q_n} \text{ dacă } q_{n+1} \neq q_n \\ \Delta t \frac{\partial H}{\partial q}(p_n, q_n) \text{ dacă } q_{n+1} = q_n \end{cases} \\ q_{n+1} - q_n = \begin{cases} -\Delta t \frac{H(p_{n+1}, q_{n+1}) - H(p_n, q_{n+!})}{p_{n+1}-p_n} \text{ dacă } p_{n+1} \neq p_n \\ -\Delta t \frac{\partial H}{\partial p}(p_{n+1}, q_{n+1}) \text{ dacă } p_{n+1} = p_n \end{cases} \end{cases}$$

Această schemă constituie o aproximare a soluţiilor sistemului. Studiind patru cazuri

$$\left(\begin{cases} p_{n+1} \neq p_n \\ q_{n+1} \neq q_n \end{cases}, \begin{cases} p_{n+1} = p_n \\ q_{n+1} \neq q_n \end{cases} \begin{cases} p_{n+1} \neq p_n \\ q_{n+1} = q_n \end{cases} \begin{cases} p_{n+1} = p_n \\ q_{n+1} = q_n \end{cases}\right),$$

se arată prin calcul că $H(p_{n+1}, q_{n+1}) = H(p_n, q_n), \forall n \in N$. Rezultă că hamiltonianul este conservat de-a lungul traiectoriei.

In general, această metodă nu conduce la aplicaţii simplectice, după cum se poate observa din următorul exemplu:

Pentru $\begin{cases} \overset{\bullet}{p} = q \\ \overset{\bullet}{q} = -p \end{cases}$, metoda conduce la

$\begin{cases} p_{n+1} - p_n = \frac{\Delta t}{2}(q_{n+1} + q_n) \\ q_{n+1} - q_n = -\frac{\Delta t}{2}(p_{n+1} + p_n) \end{cases}$, care generează sistemul dinamic

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n \frac{1-\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2} + q_n \frac{1+\frac{\Delta t}{2}}{1+\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2} \\ q_{n+1} = p_n \frac{-\Delta t}{1+\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2} + \frac{1-\frac{\Delta t}{2}}{1+\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2} q_n \end{cases}. \tag{4}$$

Funcţia generatoare a acestui sistem este aplicaţia liniară

$$G(p,q) = \frac{1}{1+\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2} \begin{pmatrix} 1-\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 & 1+\frac{\Delta t}{2} \\ -\Delta t & 1-\frac{\Delta t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Dar $(dG)^T(p,q) \cdot J \cdot (dG)(p,q) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+\frac{\Delta t}{2}}{1+\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2} \\ -\frac{1+\frac{\Delta t}{2}}{1+\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2} & 0 \end{pmatrix} + J$

deci sistemul (4) nu are proprietăţi simplectice.

Se observă, deci, că metode numerice tradiţionale, aplicate unui sistem hamiltonian continuu nu conduc la sisteme discrete hamiltoniene. In particular, pierderea proprietăţii de conservare a ariei transformă în mod radical proprietăţile sistemului iniţial. De exemplu sistemele hamiltoniene, fiind conservative, nu au atractori.Sistemele discrete- de obicei disipative pentru Δt destul de mic- au atractori, deci, au proprietăţi dinamice fundamental diferite de cele ale sistemului initial. Astfel, studiul sistemului discret nu poate conduce deci la rezultate calitative transferabile sistemului continuu.

In general nu este posibil să se construiască scheme numerice care să conserve şi hamiltonianul şi proprietăţile simplectice, de aceea este de dorit să se stabilească proprietatea cea mai importantă şi apoi să se aplice o metodă corespunzătoare.

Deoarece din punct de vedere dinamic sunt mai importante proprietăţile simplectice, ne vom ocupa în continuare de descrierea unor metode ce conservă aceste proprietăţi.

3. Metode simplectice pentru sisteme hamiltoniene

3.1. Metode de tip Runge-Kutta pentru studiul sistemelor liniare

Forma generală a unei metode Runge-Kutta implicite de ordinul s pentru ecuaţia $\overset{\bullet}{u}= f(u)$ este

$$\begin{cases} Y_i = U_n + \Delta t \sum\limits_{j=1}^{s} a_{ij} \cdot f(Y_j), i = \overline{1,s} \\ U_{n+1} = U_n + \Delta t \sum\limits_{i=1}^{s} b_i f(Y_i) \end{cases}, \tag{5}$$

cu $A = \begin{pmatrix} a_{11}.. & ..a_{1s} \\ ... & ... \\ a_{s1}.. & ..a_{s1} \end{pmatrix}$ şi $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ : \\ b_s \end{pmatrix}$ dati. Pentru aceasta metoda funcţia de stabilitate va fi

$$R : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, R(z) = 1 + z \cdot b^T (I_s - zA)^{-1} 1_s, \tag{6}$$

unde $1_s = \begin{pmatrix} 1 \\ : \\ 1 \end{pmatrix}$. Ea este o funcţie raţională şi $R(0) = 1$.

Teorema 5. *Dacă metoda Runge-Kutta dată de (5) are funcţia de stabilitate $R(z)$ dată de (6) şi $R(z)R(-z) = 1$ pentru $z \in C$ cu $|z|$ suficient de mic, atunci metoda aplicată sistemului hamiltonian liniar $\overset{\bullet}{u}= Lu$ defineşte o aproximare numerică simplectică a soluţiei sistemului.*

Exemplu. In cazul $s = 2, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \beta \neq 0$, cu α şi β arbitrari, satisfac condiţia $R(z)R(-z) = 0$. Deci

$$\begin{cases} y_1 = u_n \\ y = u_n + \frac{\Delta t}{2} Ly \\ u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot \beta \cdot Ly, \end{cases} \tag{7}$$

cu β arbitrar, constituie o metoda simplectică de aproximare pentru sistemul $\overset{\bullet}{u}= Lu$. Să reamintim că sistemul $\overset{\bullet}{u}= Lu$ este hamiltonian dacă există $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ simetrică , astfel încât $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$.

Calcule simple arată că sistemul (7) conduce la

$$u_{n+1} = \left[I_2 + \Delta t \cdot \beta \cdot L \cdot \left(I_2 - \frac{\Delta t}{2} L \right)^{-1} \right] \cdot u_n, n \in N.$$

Deci aplicaţia $\widetilde{u} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \widetilde{u}(n) = u_n$ constituie o aproximare cu proprietăţi simplectice pentru valorile $u(n \cdot \Delta t), n \in \mathbb{N}$.

Observaţie. Să observăm că sistemele hamiltoniene liniare în dimensiune 2 sunt integrabile, deci se poate găsi soluţia exactă. Calculul anterior are doar rolul de a exemplifica aserţiunile teoremei din acest paragraf.

3.2 Metode tip Runge-Kutta pentru studiul sistemelor neliniare

Pentru determinarea unei condiţii necesare pentru ca o metoda de tip Runge-Kutta să conducă la o aplicaţie simplectică se împarte sistemul în două părţi: una care conţine ecuaţiile corespunzătoare lui $\dot{p}$ şi cealaltă conţinând ecuaţiile lui $\dot{q}$. Astfel soluţia la momentul n va fi $U_n = \begin{bmatrix} P_n \\ Q_n \end{bmatrix}$. Considerând vectorul $Y_i = \begin{bmatrix} Y_i^{(p)} \\ Y_i^{(q)} \end{bmatrix}$, metoda implicită Runge-Kutta aplicată sistemului $\dot{u} = J\nabla H(u)$ va fi

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} Y_i^{(p)} \\ Y_i^{(q)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_n \\ Q_n \end{bmatrix} + \Delta t \cdot \sum\limits_{j=1}^{s} a_{ij} \begin{bmatrix} H_q\left(Y_j^{(p)}, Y_j^{(q)}\right) \\ -H_p\left(Y_j^{(p)}, Y_j^{(q)}\right) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P_{n+1} \\ Q_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_n \\ Q_n \end{bmatrix} + \Delta t \cdot \sum\limits_{i=1}^{s} b_i \begin{bmatrix} H_q\left(Y_i^{(p)}, Y_i^{(q)}\right) \\ -H_p\left(Y_i^{(p)}, Y_i^{(q)}\right) \end{bmatrix} . \end{cases}$$

Deoarece părtile sistemului sunt independente se pot folosi coeficienţi diferiţi pentru fiecare parte, adică

$$\begin{cases} Y_i^{(p)} = P_n + \Delta t \cdot \sum\limits_{j=1}^{s} a_{ij} H_q\left(Y_j^{(p)}, Y_j^{(q)}\right) \\ P_{n+1} = P_n + \Delta t \cdot \sum\limits_{i=1}^{s} b_i \cdot H_q\left(Y_i^{(p)}, Y_i^{(q)}\right) \\ Y_i^{(q)} = Q_n - \Delta t \cdot \sum\limits_{j=1}^{s} \widetilde{a_{ij}} H_p\left(Y_j^{(p)}, Y_j^{(q)}\right) \\ Q_{n+1} = Q_n - \Delta t \cdot \sum\limits_{i=1}^{s} \widetilde{b_i} H_p\left(Y_i^{(p)}, Y_i^{(q)}\right) . \end{cases} \tag{8}$$

Este clar că dacă $\widetilde{a_{ij}} = a_{ij}$ şi $\widetilde{b_i} = b_i, \forall i, j \in \{1, .., n\}$ se obţine metoda Runge-Kutta clasică.O condiţie necesară pentru ca (8) să fie simplectică este dată de teorema:

Teorema 6. *Dacă* $b_i = \widetilde{b_i}$ *şi* $a_{ij}\widetilde{b_i} + \widetilde{a_{ji}}b_j - \widetilde{b_i}b_j = 0, \forall i, j \in \{1, .., n\}$, *atunci metoda (8) este simplectică.*

Corolar. Metoda clasică Runge-Kutta este simplectică dacă $a_{ij}b_i + a_{ji}b_j - b_ib_j = 0, \forall i, j \in \{1, .., n\}$.

Exemplu. In cazul bidimensional, metoda Runge-Kutta diagonal implicită ($a_{12} = 0, a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$) este simplectică dacă $a_{21} = 4a_{11}$, $b_1 = 2a_{11}$, $b_2 = 2a_{22}$ cu a_{11}, a_{22} arbitrare.

Pentru sistemul $\begin{cases} \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} \\ \\ \dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$, pentru a calcula P_{n+1}, Q_{n+1} se calculează Y_1, Z_1, Y_2, Z_2 din

$$\begin{cases} Y_1 = P_n + \Delta t a_{11} \frac{\partial H}{\partial q} (Y_1, Z_1) \\ \\ Z_1 = Q_n - \Delta t a_{11} \frac{\partial H}{\partial p} (Y_1, Z_1) \\ \\ Y_2 = P_n + \Delta t \left[4a_{11} \frac{\partial H}{\partial q} (Y_1, Z_1) + a_{22} \frac{\partial H}{\partial q} (Y_2, Z_2) \right] \\ \\ Z_2 = Q_n - \Delta t \left[4a_{11} \frac{\partial H}{\partial p} (Y_1, Z_1) + a_{22} \frac{\partial H}{\partial p} (Y_2, Z_2) \right] \end{cases}$$

3.3. Metoda Esterkin-Pilia

Pentru sistemul $\begin{cases} \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$, metoda numerică dată prin

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + \Delta t \frac{\partial H}{\partial q} (p_{n+1}, q_n) \\ q_{n+1} = q_n - \Delta t \frac{\partial H}{\partial p} (p_{n+1}, q_n) \end{cases} \tag{9}$$

conservă aria (este simplectică). Metoda (9) este dificil de aplicat pentru că presupune ca (9) să poată fi rezolvat în raport cu p_{n+1} şi q_{n+1}.

Metodele numerice care păstrează proprietăţile simplectice ale unui sistem hamiltonian pot fi folosite în studiul sistemelor hamiltoniene perturbate.

Bibliografie

1. A.M.Stuart and A.R.Humphries, *Dynamical Systems and Numerical Analysis,* Cambridge University Press, 1996.

2. N.S. Bakhvalov, *Numerical Methods*, Mir Publishers, Moskow, 1977

Facultatea de Matematică,
Universitatea din Craiova,
Romania

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 87–92

A CRITERION OF UNIVALENCE FOR ANALYTIC FUNCTIONS IN THE UNIT DISK

Nicolae N. Pascu and Nicoleta Aldea

Abstract

In this paper we obtain an univalence criterion for analytic functions in the unit disk.

1 Introduction

Let A be the class of analytic functions $f, f(0) = f'(0) - 1 = 0$, in the unit disk $U = \{ z : z \in \mathbf{C} , |z| < 1 \}$ and S be the subclass of the class A , consisting in univalent functions.

Definition 1.1 The function $f \in A$ is *subordinate* to the function $g \in S$ (we write $f \prec g$) if $f(U) \subset g(U)$.

Definition 1.2 The function $L : U \times I \to \mathbf{C}$, $I = [\, 0 \, , +\infty \,)$ is *Loewner chain* if for all t $\in I$ the functions L(z,t) is analytic and univalent in U for all $0 \leq$ s $<$ t we have L(z,s) $\prec$ L(z,t).

Definition 1.3 The function $F : U \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $F = F$(u,v) satisfies *Pommerenke's conditions* if :

a) the function L(z,t) $= F(e^{-t}z, e^t z)$ is analytic in U , for all t $\in I$, locally absolutely continuous in I , local uniformly with respect to U .

b) the function $\frac{\partial L(z,t)}{\partial t} / \frac{\partial L(z,t)}{\partial z}$ is analytic in $\bar{U}$ for t > 0 and analytic in U for t=0.

c) $\frac{\partial F(0,0)}{\partial v} \neq 0$ and $\frac{\partial F(0,0)}{\partial u} / \frac{\partial F(0,0)}{\partial v} \notin (-\infty, -1]$.

d) the family of functions

$$\left\{ F(e^{-t}z, e^t z) / \left[e^{-t} \frac{\partial F(0,0)}{\partial u} + e^t \frac{\partial F(0,0)}{\partial v} \right] \right\}_{t \in I}$$

forms a normal family in U .

Observation 1.1 If $F(e^{-t}z, e^t z) = a_1(t)z + a_2(t)z + ...$ then $a_1(t) = e^{-t}\frac{\partial F(0,0)}{\partial u} + e^t \frac{\partial F(0,0)}{\partial v}$ and from conditions c) and d) of Definition 1.3 it results that $a_1(t) \neq 0$ for t $\in$I , $\lim_{t\to\infty} |a_1(t)| = \infty$ and $\{L(z,t)/a_1(t)\}_{t\in I}$ forms a normal family in U ,were $L(z,t) = F(e^{-t}z, e^t z)$.

Theorem1.1 *Let $F : U \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $F = F(u,v)$, be a function with the property that $F(e^{-t}z, e^t z)$ satisfies Pommerenke's conditions. If*

$$|G(z,z)| < 1, \quad \forall z \in U, \tag{1}$$

$$|G(z, \frac{1}{\bar{z}})| \leq 1 \quad \forall z \in U \setminus \{0\}, \tag{2}$$

where

$$G(u,v) = u\frac{\partial F(u,v)}{\partial t} / v\frac{\partial F(u,v)}{\partial t} \tag{3}$$

then functions $F(z,z)$ is univalent in U.

2 Main results

We start from the Taylor polynomial of two degree and we consider

$$L(z,t) = F(e^{-t}z, e^t z) = f(e^{-t}z) + (e^t + e^{-t})zf'(e^{-t}z) + \frac{(e^t - e^{-t})z^2}{2} f''(e^{-t}z) \tag{4}$$

or

$$F(u,v) = f(u) + (v-u)f'(u) + \frac{(v-u)^2}{2} f''(u), \tag{5}$$

where $f \in A$. So, f has the following Taylor series

$$f(z) = z + b_2 z^2 + \dots \tag{6}$$

We shall determinate the conditions for the defined above F such that it is satisfies the Definition 1.3.

The function $L(z,t) = F(e^{-t}z, e^t z)$ defined in (4) or (6) is analytic function in U. Moreover, $L(0,t) = f(0) = 0$ .So, $L(z,t) = F(e^{-t}z, e^t z)$ has the Taylor series $F(e^{-t}$... $_1(t)z + a_2(t)z + \ldots$ According to Observation 1.1 we have

$$a_1(t) = e^{-t}\frac{\partial F(0,0)}{\partial u} + e^t\frac{\partial F(0,0)}{\partial v} =$$

$$= \{e^{-t}[f'(u) + (v-u)f''(u) - (v-u)f''(u) + \frac{(v-u)^2}{2}f^{(3)}(u)] +$$

$$e^t[f'(u) + (v-u)f''(u)]\}_{z=0} = e^t f'(0) = e^t.$$

So , a... $\neq 0, \forall t \in [0,+\infty)$ and $\lim\limits_{t\to\infty} |a_1(t)| = \infty$.
Now ...st determinate the conditions for which

$$|L(z,t)/a_1(t)| \leq K(r), |z| \leq r < 1,$$

where K... constant.
We ...

$$\left|\frac{L}{\cdot}\right| = \left|\frac{f(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})zf'(e^{-t}z) + \frac{(e^t-e^{-t})}{2}z^2 f''(e^{-t}z)}{e^t}\right| =$$

$$= |(e^{-t}z) + (1-e^{-2t})zf'(e^{-t}z) + \frac{(e^t - 2e^{-t} + e^{-3t})z^2}{2}f''(e^{-t}z)| \leq$$

$$\leq |e^{-t}f(e^{-t}z)| + |(1-e^{-2t})zf'(e^{-t}z)| + \frac{1}{2}\left|e^t z^2 f''(e^{-t}z)\right| +$$

$$+|e^{-t}z^2 f''(e^{-t}z)| + \frac{1}{2}\left|e^{-3t}z^2 f''(e^{-t}z)\right|. \tag{7}$$

... evidently that $|e^{-pt}| < 1, p > 0$ and $|1 - e^{-2t}| < 1$.
... $f^{(k)}, k \in \mathbf{N}$, is a continues function, because f is analytic function. Mo...ver, $f^{(k)}, k \in \mathbf{N}$, is continues on the compact set, so $f^{(k)}, k \in \mathbf{N}$ is bo...ded function .
...n this context, the above formula gives
$\left|\frac{L(z,t)}{a_1(t)}\right| \leq M(r) + \frac{1}{2}\left|e^t z^2 f''(e^{-t}z)\right|, |z| \leq r < 1$, where $M(r)$ is a constant.
By (7) we have

$$f'(z) = 1 + 2b_2 z + 3b_3 z^2 + \ldots$$
$$f''(z) = 2b_2 + 6b_3 z + \ldots$$

and

$$f''(e^{-t}z) = 2b_2 + 6b_3 z + \ldots$$

series $F(e^{-t}z, e^t z) = a_1(t)z + a_2(t)z + \ldots$ According to Observation 1.1 we have

$$a_1(t) = e^{-t}\frac{\partial F(0,0)}{\partial u} + e^t\frac{\partial F(0,0)}{\partial v} =$$

$$= \{e^{-t}[f'(u) - f'(u) + (v-u)f''(u) - (v-u)f''(u) + \frac{(v-u)^2}{2}f^{(3)}(u)] +$$

$$+ e^t[f'(u) + (v-u)f''(u)]\}_{z=0} = e^t f'(0) = e^t.$$

So , $a_1(t) = e^t \neq 0, \forall t \in [0, +\infty)$ and $\lim_{t\to\infty} |a_1(t)| = \infty$.

Now , we must determinate the conditions for which

$$|L(z,t)/a_1(t)| \leq K(r), |z| \leq r < 1,$$

where $K(r)$ is constant.

We have

$$\left|\frac{L(z,t)}{a_1(t)}\right| = \left|\frac{f(e^{-t}z) + (e^t - e^{-t})zf'(e^{-t}z) + \frac{(e^t-e^{-t})}{2}z^2 f''(e^{-t}z)}{e^t}\right| =$$

$$= |e^{-t}f(e^{-t}z) + (1 - e^{-2t})zf'(e^{-t}z) + \frac{(e^t - 2e^{-t} + e^{-3t})z^2}{2}f''(e^{-t}z)| \leq$$

$$\leq |e^{-t}f(e^{-t}z)| + |(1-e^{-2t})zf'(e^{-t}z)| + \frac{1}{2}\left|e^t z^2 f''(e^{-t}z)\right| +$$

$$+ |e^{-t}z^2 f''(e^{-t}z)| + \frac{1}{2}\left|e^{-3t}z^2 f''(e^{-t}z)\right|. \tag{7}$$

It is evidently that $|e^{-pt}| < 1, p > 0$ and $|1 - e^{-2t}| < 1$.

But $f^{(k)}, k \in \mathbf{N}$, is a continues function, because f is analytic function. Moreover, $f^{(k)}, k \in \mathbf{N}$, is continues on the compact set, so $f^{(k)}, k \in \mathbf{N}$ is bounded function .

In this context, the above formula gives $\left|\frac{L(z,t)}{a_1(t)}\right| \leq M(r) + \frac{1}{2}\left|e^t z^2 f''(e^{-t}z)\right|, |z| \leq r < 1$, where $M(r)$ is a constant.

By (7) we have

$$f'(z) = 1 + 2b_2 z + 3b_3 z^2 + \ldots$$
$$f''(z) = 2b_2 + 6b_3 z + \ldots$$

and

$$f''(e^{-t}z) = 2b_2 + 6b_3 z + \ldots$$

So,

$\left|e^t z^2 f''(e^{-t}z)\right| \leq N(r), |z| \leq r < 1$,where $N(r)$ is a constant, if $b_2 = 0$ i.e. $f''(0) = 0$.

Hence, $|L(z,t)/a_1(t)| \leq K(r), |z| \leq r < 1$, if $f''(0) = 0$.

So, F satisfies the conditions c) and d) from Theorem 1.1

Now, we must show that L(z,t) $= F(\ e^{-t}z, e^t z)$ satisfies the a) conditions of Theorem 1.1 ,i.e. L is derivable with respect to t on $[0,T]$, with $T > 0$, and $\left|\frac{\partial L(z,t)}{\partial t}\right| < M$ on $[0,T]$, where M is a constant .

It is evidently that L is derivable with respect to t on $[0,T]$ and

$\left|\frac{\partial L(z,t)}{\partial t}\right| = \left|(-ze^{-t})\frac{\partial F}{\partial u} + ze^{-t}\frac{\partial F}{\partial v}\right| = |(-ze^{-t})[f'(u)-f'(u)+(v-u)f''(u)-$

$-(v-u)f''(u) + \frac{(v-u)^2}{2}f^{(3)}(u)] + ze^t[f'(u) + (v-u)f''(u)]| =$

$= \left|-\frac{(e^t-2e^{-t}+e^{-3t})z^3}{2}f^{(3)}(e^{-t}z) + (1-e^{-2t})z^2 f''(e^{-t}z) + e^t z f'(e^{-t}z)\right| < M,$

because $|e^{-t}| < e^T, t \in [0,T]$.

It is clearly that the conditions c) of Definition 1.3 it satisfies because $|e^{-t}z| < 1$ for t>0.

We must show that there is a function $G(u,v) = u\frac{\partial F(u,v)}{\partial t}/v\frac{\partial F(u,v)}{\partial t}$ such that

$|G(z,z)| < 1$, $\forall z \in U$ and $|G(z,\frac{1}{z})| \leq 1, \forall z \in U \setminus\{0\}$.

$$G(u,v) = -\frac{u}{v}\frac{f'(u) - f'(u) + (v-u)f''(u) - (v-u)f''(u) + \frac{(v-u)^2}{2}f^{(3)}(u)}{f'(u) + (v-u)f''(u)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{u}{v}\frac{v^2\left(1-\frac{u}{v}\right)^2 f^{(3)}(u)}{f'(u) + v\left(1-\frac{u}{v}\right)f''(u)} =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{u}{v}\frac{v^2\left(1-\frac{u}{v}\right)^2\frac{f^{(3)}(u)}{f'(u)}}{1 + v\left(1-\frac{u}{v}\right)\frac{f''(u)}{f'(u)}},$$

if $f'(u) \neq 0$,$\forall u \in U$.

We have

$|G(z,z)| = 0 < 1$ in U and

$$|G(z,\frac{1}{z})| = \left|-\frac{1}{2}|z|^2\frac{\frac{1}{z^2}\left(1-|z|^2\right)^2\frac{f^{(3)}(z)}{f'(z)}}{1 + \frac{1}{z}\left(1-|z|^2\right)\frac{f''(z)}{f'(z)}}\right| \leq 1$$

in $U^* = U \setminus\{0\}$ is equivalent with

$$\left(1-|z|^2\right)^2\left|\frac{z^2 f^{(3)}(z)}{f'(z)}\right| \leq 2\left||z|^2+\left(1-|z|^2\right)\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|$$

in $U^* = U \setminus \{0\}$.

Moreover, $L(z,0) = F(z,z) = f(z)$. According to Theorem 1.1, we have proved:

Theorem 2.1 *If $f \in A$ and it is satisfies $f''(0) = 0, f'(z) \neq 0, \forall z \in U$ and*

$$\left(1-|z|^2\right)^2\left|\frac{z^2 f^{(3)}(z)}{f'(z)}\right| \leq 2\left||z|^2+\left(1-|z|^2\right)\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \text{ in } U^*,$$

then $f \in S$.

Bibliography

Pascu, N. , *Loewner Chains and Univalence Criteria*, MATHEMATICA,Tom 37(60), No 1-2, 1995, pp. 215-217.

"Transilvania" University,
Braşov,
Romania

"Transilvania" University,
Braşov,
Romania

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 93–100

COINCIDENCE THEOREMS AND APPLICATIONS

Adrian Petruşel

1. Introduction

In 1970, J. Peetre and I.A. Rus (see [8]) proved the following coincidence theorem:

Theorem 1. *Let f, g be two singlevalued mappings of a complete metric space (X, d) into a metric space (Y, ρ). Suppose that there exist two functions φ, ψ from $\mathbf{R}_+$ into itself and $M > 0$ satisfying the following conditions:*

(i) φ is monotonly increasing, $\varphi(M) < M$, $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(M) = 0$ and the sequence $\left(\sum_{i=1}^n \psi(\varphi^i(M))\right)_{n\in\mathbf{N}}$ is convergent ;

(ii) there exists $x_0 \in X$ such that $\rho(f(x_0), g(x_0)) \leq M$;

(iii) for every $x \in X$ satisfying $\rho(f(x), g(x)) \leq M$, there exists $z \in X$ such that

$$\rho(f(z), g(z)) < \varphi(M) \text{ and } d(x, z) < \psi(M);$$

(iv) f and g are continuous.

Then there exists a point $a \in X$ such that $f(a) = g(a)$.

On the other hand, T.L. Hicks (see [1]) gives in 1990 the following fixed point theorem:

Theorem 2. *Let (X, d) be a complete metric space and $f : X \to X$ be a continuous mapping, such that there exists a mapping $k : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ with the following properties:*

(i) $k(0) = 0$ and k is monotonly increasing;

(ii) there exists $x_0 \in X$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} k^n(d(f(x_0), x_0)) < \infty;$$

(iii) $d(f(x), f^2(x)) \leq k(d(f(x), x))$, *for every* $x \in X$.
Then there exists $a \in X$ *such that* $f(a) = a$.

There exist some others results of this type: coincidence theorems, fixed point theorems and surjectivity theorems for singlevalued and multivalued mappings (see [2], [3], [4], [5]).

The purpose of this paper is to prove two general coincidence theorems for multivalued mappings. Then, we obtain as consequences some results that extend theorems given in [1], [2], [3], [4], [8], by relaxing the continuity.

Let (X, d) and (Y, ρ) be two metric spaces. Let $f, g : X \to Y$ be two singlevalued mappings and $F, G : X \to Y$ *be* two multivalued mappings. Throughout this paper, we use the following symbols:

$$\begin{array}{rcl} F_f & = & \{a \in X |\ a = f(a)\}, \\ F_G & = & \{a \in X |\ a \in G(a)\}, \\ C(f,g) & = & \{a \in X |\ f(a) = g(a)\}, \\ C(F,G & = & \{a \in X |\ F(a) \cap G(a) \neq \emptyset\}. \end{array}$$

Definition 1. ([3]) Let φ, ψ be two functions of $\mathbf{R}_+$ into itself. We say that ψ is *φ-summable at* $t_0 \in \mathbf{R}_+$ if the sequence $(\varphi^n(t_0))_{n \in \mathbf{N}}$ converges to zero and the sequence $\left(\sum_{i=1}^n \psi(\varphi^i(t_0))\right)_{n \in \mathbf{N}}$ is convergent.

Definition 2. ψ is called *φ-summable* if it is φ-summable at each $t_0 \in \mathbf{R}_+$.

Definition 3. Two multivalued mappings F, G of X into Y are said to be *p-proximate* if there exist increasing functions φ, ψ of $\mathbf{R}_+$ into itself satisfying the following conditions:

(i) there exists $x_0 \in X$ such that ψ is φ-summable at $t_0 = D(F(x_0), G(x_0))$;

(ii) there exists a mapping $p : X \to X$ such that

$$d(x, p(x)) \leq \psi(D(F(x), G(x))$$

and

$$D(F(p(x), G(p(x))) \leq \varphi(D(F(x), G(x))), \ for\ every\ x \in X.$$

Definition 4. Two multivalued mappings F, G of X into Y are said to be *M-proximate* if there exist increasing functions φ, ψ from $\mathbf{R}_+$ into itself and $M > 0$ satisfying the following conditions:

(i) there exists $x_0 \in X$ such that $D(F(x_0), G(x_0)) \leq M$;

(ii) ψ is φ-summable;

(iii) there exists a mapping $p : X \to X$ such that

$$d(x, p(x)) \leq \psi(M)$$

and

$$D(F(p(x), G(p(x))) \leq \varphi(M), \text{ for each } x \in X.$$

2. Main results

We begin with some auxiliary results.

Lemma 1. *If F and G are p-proximate multivalued mappings of a complete metric space (X,d) into a metric space (Y,ρ) then there is a convergent sequence $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in X such that $D(F(x_n),G(x_n))$ converges to zero, as $n\to\infty$.*

Proof. There are increasing functions φ,ψ of $\mathbf{R}_+$ into itself satisfying the conditions (i) and (ii) of Definition 3.

Let $x_0\in X$ such that ψ is φ-summable at $t_0=D(F(x_0),G(x_0))$. We may assume $t_0>0$. From (ii), we have that there exists a mapping $p:X\to X$ such that:

$$d(x_0,p(x_0))\le\psi(D(F(x_0),G(x_0)))=\psi(t_0)$$

and

$$D(F(p(x_0)),G(p(x_0)))\le\varphi(D(F(x_0),G(x_0)))=\varphi(t_0).$$

Let $p(x_0)=x_1$ and so $d(x_0,x_1)\le\psi(t_0)$ and $D(F(x_1),G(x_1))\le\varphi(t_0)$. For this x_1, we use again Definition 3. It follows that:

$$d(x_1,p(x_1))\le\psi(D(F(x_1),G(x_1)))\le\psi(\varphi(t_0))$$

$$D(F(p(x_1),G(p(x_1)))\le\varphi(D(F(x_1),G(x_1)))\le\varphi^2(t_0).$$

Let $p(x_1)=x_2$. In this way, we obtain the sequence $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ with the following properties:

$$x_{n+1}=p(x_n),\quad n\in\mathbf{N};\tag{α}$$

$$d(x_n,x_{n+1})\le\psi(\varphi^n(t_0)),\quad n\in\mathbf{N};\tag{β}$$

$$D(F(x_n),G(x_n)\le\varphi^n(t_0),\quad n\in\mathbf{N}.\tag{γ}$$

From (β), it follows that $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ is a Cauchy sequence in X, hence $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converges to an $a\in X$. By using (γ), we have $D(F(x_n),G(x_n))\to 0$, as $n\to\infty$. The proof is complete.

Lemma 2. ([7]) *If F and G are M-proximate multivalued mappings of a complete metric space (X,d) into a metric space (Y,ρ), then there is a convergent sequence $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in X such that $D(F(x_n),G(x_n))\to 0$, as $n\to\infty$.*

The main result of this paper is the following theorem.

Theorem 3. *Let F,G be p-proximate multivalued mappings of a complete metric space (X,d) into a metric space (Y,ρ). If G is upper semicontinuous with compact values and F is closed, then $C(F,G)\neq\emptyset$.*

Proof. From Lemma 1, it follows that there is a convergent sequence $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in X such that $D(F(x_n), G(x_n)) \to 0$, as $n \to \infty$.

Let a be the element of X to which $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converges and $\varepsilon > 0$. Then, the upper semicontinuity of G guarantees the existence of a neighborhood V of a such that $x \in V$ and $y \in G(x)$ imply $D(G(a), y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Since $x_n \to a$ and $D(F(x_n), G(x_n)) \to 0$, as $n \to \infty$ we can find an $m \in \mathbf{N}$ such that $x_n \in V$ and $D(F(x_n), G(x_n)) < \frac{\varepsilon}{2}$, for every $n \geq m$. Hence, if $n \geq m$ we have $\rho(y, y') < \frac{\varepsilon}{2}$ for some $y \in F(x_n)$ and $y' \in G(x_n)$. On the other hand, since $x_n \in V$, we have $\rho(y', y'') < \frac{\varepsilon}{2}$ for some $y'' \in G(a)$ and consequently we obtain $\rho(y, y'') \leq \rho(y, y') + \rho(y', y'') < \varepsilon$, which implies $D(F(x_n), G(a)) < \varepsilon$. Hence there are an $a \in X$ and a sequence $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in X such that $x_n \to a$ and $D(F(x_n), G(a)) \to 0$, as $n \to \infty$. We can find a mapping k of $\mathbf{N}$ into itself such that $k(n) \geq n$ and $D(F(x_{k(n)}), G(a)) < \frac{1}{n}$. Consequently, the set

$$T(n) = \left\{(y, y') \in F(x_{k(n)}) \times G(a) |\ \rho(y, y') < \frac{1}{n}\right\}$$

is nonempty for each $n \in \mathbf{N}$.

Let s be a choice function for the family $\{T(n) |\ n \in \mathbf{N}\}$ and consider the projections p, q defined by $p(y, y') = y$ and $q(y, y') = y'$, for every $(y, y') \in Y \times Y$. Then, since $G(a)$ is compact, the sequence $(q(s(n)))_{n\in\mathbf{N}}$ in $G(a)$ has a subsequence $(q(s(n_i)))_{i\in\mathbf{N}}$ which converges to some $b \in G(a)$. Hence, for every $\varepsilon > 0$ there exists an $m \in \mathbf{N}$ such that $\rho(q(s(n_i)), b) < \frac{\varepsilon}{2}$ and $\frac{1}{n_i} < \frac{\varepsilon}{2}$, for all $i \geq m$. This shows that $p(s(n_i)) \to b$, as $i \to \infty$, since

$$\rho(p(s(n_i)), b) \leq \rho(p(s(n_i)), q(s(n_i))) + \rho(q(s(n_i)), b).$$

Therefore the sequences $x_n := (x_{k(n_i)})_{i\in\mathbf{N}}$ and $y_n := (p(s(n_i)))_{i\in\mathbf{N}}$ satisfy the conditions: $x_n \to a$, $y_n \to b$, as $n \to \infty$ and $y_n \in F(x_n)$, for every $n \in \mathbf{N}$. Since the graph of F is closed and the sequence $((x_n, y_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converges in $X \times Y$ to (a, b) under the product topology, we obtain that $(a, b) \in GraphF$ and so $b \in F(a) \cap G(a)$. The proof is complete.

Another result of this type is the following:

Theorem 4. ([7]) *Let F, G be M-proximate multivalued mappings of a complete metric space (X, d) into a metric space (Y, ρ). If G is upper semicontinuous with compact values and F is closed, then $C(F, G) \neq \emptyset$.*

These general coincidence theorems have some important consequences.

3. Consequences

We start from the following result:

Theorem 5. *Let $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_m$ be mappings of a complete metric space (X, d) into a metric space (Y, ρ). Suppose that there exist increasing functions φ, ψ of $\mathbf{R}_+$ into itself satisfying the following conditions:*

(i) there exists $x_0 \in X$ such that ψ is φ-summable at

$$t_0 = \sum_{i=1}^{m} \rho(f_i(x_0), g_i(x_0));$$

(ii) there exists a mapping $p : X \to X$ such that

$$d(x, p(x)) \leq \psi\left(\sum_{i=1}^{m} \rho(f_i(x), g_i(x))\right)$$

and

$$\sum_{i=1}^{m} \rho(f_i(p(x)), g_i(p(x))) \leq \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \rho(f_i(x), g_i(x))\right),$$

for each $x \in X$;

(iii) $g_1, \ldots, g_m$ are continuous and the graph of each $f_1, \ldots, f_m$ is closed. Then there exists $a \in X$ such that $f_i(a) = g_i(a)$, for each $i = 1, 2, \ldots, m$.

Proof. Consider the metric space (Y^m, ρ') with the metric ρ' defined by:

$$\rho'((y_1, \ldots, y_m), (y'_1, \ldots, y'_m)) = \sum_{i=1}^{m} \rho(y_i, y'_i),$$

for all $(y_1, \ldots, y_m)$, $(y'_1, \ldots, y'_m) \in Y^m$ and define two multivalued mappings F, G of X into Y^m by

$$F(x) = \{(f_1(x), \ldots, f_m(x))\}$$

$$G(x) = \{(g_1(x), \ldots, g_m(x))\},$$

for each $x \in X$.

The hypothesis of this theorem shows that F and G are p-proximate, G is upper semicontinuous and F is closed. Theorem 5 follows from Theorem 3.

A similar result is the following consequence of Theorem 4.

Theorem 6. ([7]) *Let $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_m$ be mappings of a complete metric space (X, d) into a metric space (Y, ρ).*

Suppose that there exist two increasing functions φ, ψ *of* $\mathbf{R}_+$ *into itself and* $M > 0$ *satisfying the following conditions:*
(i) ψ *is* φ*-summable;*
(ii) there exists $x_0 \in X$ *such that*

$$\sum_{i=1}^{m} \rho(f_i(x_0), g_i(x_0)) \leq M;$$

(iii) there exists a mapping $p : X \to X$ *such that*

$$d(x, p(x)) \leq \psi(M)$$

and

$$\sum_{i=1}^{m} \rho(f_i(p(x)), g_i(p(x))) \leq \varphi(M), \ \textit{for every } x \in X;$$

(iv) $g_1, \ldots, g_m$ *are continuous and the graph of each* $f_1, \ldots, f_m$ *are closed. Then there exists* $a \in X$ *such that* $f_i(a) = g_i(a)$, *for each* $i = 1, 2, \ldots, m$.

If in Theorem 6 we put $m = 1$, we obtain a result which extends the Theorem 1, namely below.

Theorem 7. *Let* f, g *be two singlevalued mappings of a complete metric space* (X, d) *into a metric space* (Y, ρ). *Suppose that there exist two increasing functions* φ, ψ *of* $\mathbf{R}_+$ *into itself and* $M > 0$ *satisfying the following conditions:*
(i) ψ *is* φ*-summable;*
(ii) there exists $x_0 \in X$ *such that*

$$\rho(f(x_0), g(x_0)) \leq M;$$

(iii) there exists a mapping $p : X \to X$ *such that*

$$d(x, p(x)) \leq \psi(M)$$

and

$$\rho(f(p(x)), g(p(x))) \leq \varphi(M), \ \textit{for all } x \in X;$$

(iv) g *is continuous and the graph of* f *is closed.*
Then $C(f, g) \neq \emptyset$.

From Theorem 5, one obtains also a fixed point theorem:

Theorem 8. *Let f be a mapping of a complete metric space (X, d) into itself. Suppose that there exist increasing functions φ, ψ of $\mathbf{R}_+$ into itself satisfying the following conditions:*

(i) there exists $x_0 \in X$ such that ψ is φ-summable at $t_0 = d(f(x_0), x_0)$;

(ii) there exists a mapping $p : X \to X$ such that

$$d(x, p(x)) \leq \psi(d(f(x), x))$$

and

$$d(f(p(x)), p(x)) \leq \varphi(d(f(x), x)), \text{ for every } x \in X;$$

(iii) the graph of f is closed.

Then $F_f \neq \emptyset$.

Theorem 8 extends Theorem 2 to the mappings with closed graph as can see from:

Theorem 9. *Let f be a mapping of a complete metric space (Y, ρ) into itself. Suppose that there exists an increasing function φ. of $\mathbf{R}_+$ into itself satisfying the following conditions:*

(i) there exists an $x_0 \in X$ such that:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^n(d(f(x_0), x_0)) < \infty;$$

(ii) $d(f(x), f^2(x)) \leq \varphi(x, f(x)))$, for all $x \in X$;

(iii) the graph of f is closed.

Then $F_f \neq \emptyset$.

Obviously one obtain the following theorem, which includes a known result (see [2]).

Theorem 10. *Let f be a mapping of a complete metric space into itself. Suppose that there exist increasing function φ, ψ of $\mathbf{R}_+$ into itself satisfying the following condition:*

(i) there exists $x_0 \in X$ such that ψ is φ-summable at $t_0 = d(f(x_0), x_0)$;

(ii) there exists $n \in \mathbf{N}$ such that

$$d(x, f^n(x)) \leq \psi(d(f(x), x))$$

and

$$d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq \varphi(d(f(x), x)), \text{for every } x \in X;$$

(iii) the graph of f is closed.
Then $F_f \neq \emptyset$.

One can state other coincidence theorems, fixed point theorems and surjectivity theorems of this type, which extend results given in [2]-[5] (see also [6] and [7]).

At the end of this paper, we make an observation.

It seems to be a matter of interest to study one of the following **open problems**:

A. To give direct proofs of Theorems 5-10.

B. Which are others results for singlevalued mappings that can be extended by passing through the multivalued case?

References

[1] T.L. Hicks, *Another view of fixed point theory*, Math. Japonica, 35(1990), 231-234.

[2] S. Kasahara, *Surjectivity and fixed point of nonlinear mappings*, Math. Sem. Notes, 2(1974), 119-126.

[3] S. Kasahara, *Fixed point theorems and some abstract equations in metric spaces*, Math. Japonica, 21(1976), 165-178.

[4] M. McCord, *A theorem on linear operators and the Tietze extension theorem*, Amer. Math. Monthly, 75(1968), 47-78.

[5] A. Petruşel, *Coincidence points, fixed points and surjectivity*, Seminar on Differential Equations, Cluj-Napoca University, Preprint nr.3, 1989, 165-173.

[6] A. Petruşel, *Coincidence theorems for p-proximate multivalued mappings*, Seminar on Fixed Point Theory, Cluj-Napoca University, Preprint nr.3, 1990, 21-29.

[7] A. Petruşel, *A generalization of Peetre-Rus theorem*, Studia Univ. "Babeş-Bolyai", 35(1990), 81-85.

[8] I.A. Rus, *Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

University "Babeş Bolyai",
Cluj-Napoca,
Romania
e-mail: petrusel@math.ubbcluj.ro

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 101–110

SISTEME LINIARE INCONSISTENTE

Elena Popescu şi Mirela Ştefănescu

Problemele teoretice şi practice care se modelează cu ajutorul sistemelor de ecuaţii şi inecuaţii liniare sunt foarte diverse. Deseori datele acestora reprezintă aproximaţii sau estimaţii ale unor valori reale. Informaţiile incomplete conduc uneori la sisteme cu mai puţine relaţii decât necunoscute (subdeterminate), alteori sistemele sunt supradeterminate, caz în care probabilitatea de a fi contradictorii (inconsistente) este mare.

Cei mai mulţi algoritmi de rezolvare a sistemelor liniare pornesc de la ipoteza că sistemul este consistent (are soluţie), fără să se cunoască exact modul lor de acţionare în cazul când ipoteza nu se verifică. De aceea se constată un interes crescut pentru algoritmii care nu presupun de la început că sistemul este consistent.

În practică apar deseori sisteme inconsistente. De exemplu modelele economice pot conţine restricţii contradictorii datorate resurselor limitate, directivelor neconcordante, planurilor nerealiste, inexactităţii informaţiilor economice, etc. În acest caz suntem interesaţi în găsirea unui vector $x \in \mathbf{R}^n$ care să verifice sistemul în sensul celor mai mici pătrate. Pentru sisteme de ecuaţii:

$$Ax = b\ , \tag{1}$$

unde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$ şi $b \in \mathbf{R}^m$, această problemă s-a bucurat întotdeauna de o mare atenţie din partea cercetătorilor. Pentru sisteme de inecuaţii liniare însă, problema nu a fost investigată aşa cum ar fi meritat.

În general pentru sisteme liniare inconsistente se rezolvă o problemă de tipul

$$min\ \Phi\left(Ax - b\right)$$

sau echivalent

$$min\left\{\Phi\left(h\right)/Ax = b + h,\ x \in \mathbf{R}^n,\ h \in \mathbf{R}^m\right\}. \tag{2}$$

De fapt se corectează vectorul termenilor liberi unde $\Phi\left(h\right)$ este *criteriul de corecţie* cu care se estimează calitatea corecţiei.

Dacă Φ este norma euclidiană $\Phi(h) = \|h\|_2^2$ atunci obţinem metoda clasică a celor mai mici pătrate. În afară de aceasta, există şi câteva tehnici pentru cazul când

$$\Phi(h) = \|h\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |h_i|$$

şi

$$\Phi(h) = \|h\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |h_i| ,$$

dar acestea sunt mai complicate pentru că funcţia

$$f(x) = \|Ax - b\|_p$$

nu este diferenţiabilă pentru $p = 1$ sau $p = \infty$.

Dintre lucrările româneşti referitoare la sisteme incosistente menţionăm articolele lui Maruşciac $[M1]$ şi $[M2]$. În $[M1]$ se dă un algoritm, bazat pe metoda Newton-Raphson, pentru cea mai bună $L_{p,w}$ - aproximaţie a soluţiei unui sistem de ecuaţii liniare inconsistent, adică soluţia problemei

$$\min_{x \in \mathbf{C}^n} \sum_{i=1}^{m} w_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right|^p ,$$

unde $w = (w_1, w_2, ..., w_m)^T \in \mathbf{R}_+^m$ şi $p > 2$.

Pentru un sistem de inecuaţii liniare

$$Ax \leq b , \tag{3}$$

o soluţie în sensul celor mai mici pătrate (Least Squares) este un vector care minimizează funcţia

$$f(x) = \|(Ax - b)_+\|_2^2 \tag{4}$$

unde $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{R})$, $b \in \mathbf{R}^m$, $x \in \mathbf{R}^n$ iar $(Ax - b)_+$ este m-vectorul a cărui componentă i este $\max\{(Ax - b)_i, 0\}$, $i = 1, 2, ..., m$.

Corectarea vectorului termenilor liberi după rezolvarea problemei (2) (de exemplu prin adăugarea resurselor deficiente) nu este întotdeauna posibilă în practică, fiind mult mai realistă corectarea unei submatrice a matricei extinse (A, b). Însă din punct de vedere matematic corectarea matricei restricţiilor este o problemă mai dificilă pentru care există numai câteva abordări $[Er]$, $[Va1]$ şi $[Va3]$.

Sistemului de inecuaţii:

$$\begin{cases} \langle a_i, x \rangle & \leq b_i, \; i \in M_0 \cup M_1 \\ x_j \geq 0, \; j = 1, ..., n , \end{cases}$$

unde a_i^T este linia i a matricei A, b_i este componenta i a lui b, M_0, M_1 sunt mulţimi de indici şi $\langle.,.\rangle$ este produsul scalar în $\mathbf{R}^n$, îi ataşăm *sistemul corectat*

$$\begin{cases} \langle a_i, x\rangle \ \le b_i, \ i \in M_0, \\ \langle a_i + h_i^{'}, x\rangle \ \le b_i - h_{i,n+1}, \ i \in M_1, \\ x_j \ge 0, \ j = 1, ..., n, \end{cases}$$

unde $h_i^{'} \in \mathbf{R}^n$ şi $h_{i,n+1} \in \mathbf{R}$. Notăm cu $h_i \in \mathbf{R}^{n+1}$ vectorul care corectează linia $i \in M_1 = \{1, ..., \mu\}$ a sistemului, adică $h_i = (h_i^{'}, h_{i,n+1}) = (h_{i1,...,}h_{i,n+1})$. Liniile $i \in M_0$ nu se corectează. De asemenea coloanele $j \in J_0 \subset \{1, ..., n+1\}$ ale matricei extinse (A, b) trebuie să rămână neschimbate. Pentru aceasta se ia

$$h_{ij} = 0, \ i \in M_1, \ j \in J_0.$$

Fie H matricea cu elementele h_{ij}, $i = 1, ..., \mu$, $j = 1, ..., n+1$.
Problema corectării sistemului de inecuaţii se formulează astfel:

$$min \ \{\Phi(H)/H \in S\},$$

unde
$S = \{H/ \ h_{ij} = 0, \ i \in M_1, \ j \in J_0$şi sistemul corectat este consistent$\}$,
iar $\Phi(H)$ este criteriul de corecţie.
În lucrarea $[Va2]$, Vatolin arată că pentru sisteme de ecuaţii, corectarea întregii matrice extinse (A, b) având drept criteriu de corecţie norma euclidiană, este o problemă echivalentă cu găsirea celei mai mici valori proprii (şi a vectorilor proprii corespunzători) a matricei $(-b, A)^T(-b, A)$. Atunci când o parte din restricţii trebuie să rămână neschimbate problema este şi mai complexă.

Corectarea, care are drept scop înlăturarea naturii contradictorii a sistemului $Ax \le b$ se face aşadar în două moduri: corectarea vectorului b al termenilor liberi prin metoda celor mai mici pătrate (LS) şi corectarea unei submatrice a matricei extinse (A, b).

Deşi problema LS pentru sisteme de inecuaţii liniare este o extensie naturală a problemei LS pentru sisteme de ecuaţii liniare, nu se pot aplica metodele de rezolvare a acesteia din urmă pentru că funcţia (4) nu este de două ori diferenţiabilă.În literatura de specialitate este cunoscută o singură metodă de determinare a unei soluţii LS pentru sisteme de inecuaţii liniare datorată lui Han $[Ha]$, care dă şi o caracterizare pentru aceste soluţii.

Minimizarea LS cu restricţii este o tehnică folosită ori de câte ori este necesară regularizarea soluţiei unei probleme LS obişnuite. Pentru sisteme de ecuaţii liniare se cunosc metode de rezolvare a problemei LS cu restricţii de tip interval asupra variabilelor, cu restricţii ecuaţii liniare şi cu restricţii inegalităţi pătratice. Pentru sisteme de inecuaţii liniare, în lucrarea $[Po3]$ sunt luate în considerare două tipuri de restricţii: ecuaţii liniare şi restricţii de tip interval asupra variabilelor.

Funcţia dată de (4) este convexă, însă numai de clasă C^1. Suntem astfel conduşi la problema mai generală:

$$\begin{cases} min\ f(x) \\ Bx = d \\ l_i \le x_i \le u_i \ (i = 1, ..., n) \end{cases}$$

unde funcţia obiectiv f este convexă continuu diferenţiabilă, $B \in \mathcal{M}_{r\times n}(\mathbf{R})$, $d \in \mathbf{R}^r$, $x \in \mathbf{R}^n$, l_i, $u_i \in \mathbf{R}$.
În lucrarea $[PM1]$, prezentăm o metodă şi un algoritm de rezolvare a acestei probleme. Metoda cuprinde o parte combinatorială de determinare a componentelor soluţiei optime care sunt egale cu una din marginile intervalului lor de variaţie. Este o metodă adaptivă de determinare a acestor componente şi se desfăşoară pe două nivele. La fiecare iteraţie de nivel superior se decide care variabile se fixează la unul din capetele intervalului lor de variaţie şi care rămân libere, adică strict între cele două limite.

La nivelul inferior, se rezolvă câte o subproblemă, numai în subspaţiul variabilelor libere. Numărul de subprobleme care trebuie rezolvate este finit. Algoritmul poate fi extrem de puternic dacă există o metodă eficientă de rezolvare a acestor subprobleme.

Dezvoltări recente în optimizarea generală neliniară, cu restricţii de tip interval impuse variabilelor, au avut drept rezultat o clasă de algoritmi pentru egalităţi de forma $c_i(x) = 0$, $i = 1, ..., r$, posibil neliniare, dar în care funcţiile $f(x)$ şi $c_i(x)$ sunt de două ori continuu diferenţiabile. În articolele lui Conn, Gould şi Toint $[CGT1]$ şi $[CGT2]$ partea algoritmului care controlează statutul variabilelor în raport cu marginile intervalului lor de variaţie, foloseşte informaţii date de proiecţia gradientului.

Metoda propusă în $[PM1]$ pentru cazul când $c_i(x)$ sunt funcţii liniare de forma $c_i(x) = b_i^T x - d_i$, $i = 1, ..., r$ (unde b_i^T este linia i a matricei B şi d_i componenta i a vectorului d) prezintă avantajul că se poate folosi şi în cazul când $f(x)$ este numai convexă continuu diferenţiabilă.

În lucrarea $[Po1]$ se rezolvă problema LS pentru sisteme de inecuaţii liniare cu restricţii de tip interval impuse variabilelor:

$$\begin{cases} min\ \frac{1}{2} \|(Ax - b)_+\|_2^2 \\ l_i \le x_i \le u_i \ (i = 1, ..., n). \end{cases} \tag{5}$$

Aplicând metoda din $[PM1]$, problema este redusă la un număr finit de subprobleme LS fără restricţii, pentru sisteme de inecuaţii de dimensiuni mai mici.

În $[P]$ se dă o aplicaţie a metodei la rezolvarea simultană a unui cuplu de probleme de programare liniară dual simetrice care este echivalentă cu rezolvarea unui sistem de inecuaţii. Introducerea condiţiilor de nenegativitate pentru variabilele primale şi duale în sistemul de inegalităţi ar dubla numărul de linii ale matricei sistemului. Dacă le considerăm însă cazuri particulare ale restricţiilor de tip interval, rezultă o problemă de forma (5). Când cele două probleme de programare liniară nu au soluţii admisibile se obţin soluţii în sensul celor mai mici pătrate care ne pot furniza informaţii utile chiar şi în acest caz.

Procedeul se poate aplica şi la testarea fezabilităţii sau găsirea unui punct admisibil iniţial pentru o problemă de programare neliniară cu restricţii liniare. Majoritatea metodelor iterative de rezolvare pornesc de la un astfel de punct.

Metoda $[PM1]$ se poate aplica şi la rezolvarea problemei LS pentru sisteme de ecuaţii cu restricţii de tip interval asupra variabilelor

$$\begin{cases} min \ \frac{1}{2}\|Ax-b\|_2^2 \\ l_i \le x_i \le u_i \ (i=1,\dots,n). \end{cases}$$

Spre deosebire de funcţia (4), funcţia $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax-b\|_2^2$ este de clasă C^∞ şi în consecinţă se pot adapta algoritmii iterativi descrişi în $[CGT1]$ şi $[CGT2]$. O astfel de adaptare este făcută de Bierlaire, Toint şi Tuyttens în lucrarea $[BTT]$. Aici subproblemele LS în variabile libere se rezolvă cu o metodă de tip gradienţi conjugaţi care este formal echivalentă cu descompunerea Lanczos a matricei A^TA urmată de factorizarea Cholesky a matricei tridiagonale rezultate. Aceşti algoritmi sunt eficienţi dacă matricea A este "bine condiţionată" sau se poate aplica o metodă de precondiţionare.

Pentru aceeaşi problemă Lötstedt $[Lö]$ determină soluţia de normă minimă folosind metoda gradientului conjugat cu precondiţionare. O metodă directă pentru sisteme de ecuaţii cu matricea rară (cu mai puţin de 1% elemente nenule) şi de dimensiuni mari se găseşte în $[Bj]$. Pentru aceste sisteme Björck foloseşte o descompunere Q-R parţială.

Dacă se doreşte atenuarea oscilaţiei excesive a unei funcţii din cauza datelor perturbate, se rezolvă o problemă de minimizare LS cu restricţii inegalităţi pătratice de forma:

$$\begin{cases} min \ \|Ax-b\|_2 \\ \|Bx\|_2 \le \alpha, \end{cases}$$

unde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ este o matrice nesingulară şi reprezintă operatorul discret asociat operatorului diferenţial de ordinul doi şi $\alpha \ge 0$. În $[GL]$, Golub şi Van Loan folosesc descompunerea după valori singulare generalizată (GSVD) la rezolvarea problemei mai generale

$$\begin{cases} min \; \|Ax-b\|_2 \\ \|Bx-d\|_2 \leq \alpha. \end{cases}$$

Pentru $\alpha = 0$, avem cazul particular de minimizare LS cu restricţiile sub forma unui sistem de ecuaţii liniare $Bx = d$.

Metodele LS care folosesc descompunerile SVD se bazează pe faptul că $\|.\|_2$ este invariantă la transformările ortogonale. Problema $min \; \|Ax-b\|_2$ poate fi înlocuită cu problema echivalentă $min \; \|(Q^T A)x-(Q^T b)\|_2$ unde matricea ortogonală Q se calculează astfel încât $Q^T A$ să aibă o formă "canonică". Din păcate problema LS pentru sisteme de inecuaţii $\min \|(Ax-b)_+\|_2$ nu poate fi transformată astfel.

Pentru sisteme de inecuaţii liniare, în [$Po3$], se consideră problema în sensul celor mai mici pătrate cu două tipuri de restricţii: ecuaţii liniare şi restricţii de tip interval pentru variabile

$$\begin{cases} min \; \frac{1}{2}\|(Ax-b)_+\|_2^2 \\ Bx = d \\ l_i \leq x_i \leq u_i \; (i = 1, ..., n), \end{cases}$$

unde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r\times n}(\mathbf{R})$, $b \in \mathbf{R}^m$, $d \in \mathbf{R}^r$ şi $rang(B) = r$. Aplicând metoda din [$PM1$], problema este redusă la un număr finit de subprobleme LS cu restricţii ecuaţii liniare peste un subspaţiu liniar:

$$\begin{cases} min \; \frac{1}{2}\|(Gz-h)_+\|_2^2 \\ Cz = f, \end{cases}$$

unde $G \in \mathcal{M}_{m\times q}(\mathbf{R})$, $C \in \mathcal{M}_{r\times q}(\mathbf{R})$, $z \in \mathbf{R}^q$, $h \in \mathbf{R}^m$, $f \in \mathbf{R}^r$ şi $q \leq n$.

Pentru aceste subprobleme în [SP] prezentăm o metodă directă, bazată pe descompunerea Q-R a matricei C^T cu o procedură de reactualizare a factorizării Q-R.

În [$Va1$] Vatolin arată că există o clasă de criterii de corecţie cu care problema corectării matricei restricţiilor şi a termenilor liberi se poate rezolva efectiv şi propune un algoritm în acest scop. Corectarea şi rezolvarea sistemului corectat se bazează pe un număr finit de probleme de programare liniară de dimensiuni comparabile cu sistemul iniţial. În [$Va2$], Vatolin foloseşte drept criteriu de corecţie, norma euclidiană. În lucrarea [$PM2$] se analizează problema corectării unui sistem liniar de inecuaţii inconsistent folosind două criterii particulare din clasa respectivă: $\|.\|_\infty$ şi $\|.\|_1$. Se arată că cele două norme fac parte din clasa propusă de Vatolin. Pentru fiecare dintre ele se determină forma problemelor de programare liniară necesare rezolvării sistemului corectat şi numărul lor. Astfel pentru $\|.\|_\infty$ este necesară o singură problemă, iar pentru $\|.\|_1$ sunt necesare un număr de probleme de programare liniară egal cu numărul coloanelor ce se corectează.

Datorită apariţiei supercalculatoarelor şi a variantelor lor vectoriale şi paralele, în ultimii ani s-a trecut la îmbunătăţirea unor metode mai vechi, la reconsiderarea unor metode clasice şi la adaptarea lor la modul de lucru al noilor generaţii de calculatoare.

Calculul paralel a devenit o direcţie importantă de cercetare începând cu anii '80, când au apărut primele calculatoare cu arhitectură paralelă. Pentru a exploata avantajele paralelismului au trebuit regândite atât limbajele de programare cât şi majoritatea algoritmilor secvenţiali clasici.

Metoda din $[Po2]$ se încadrează în aspectele menţionate mai sus. Algoritmul de programare pătratică Theil-Van de Panne $[TP]$ a fost adaptat pentru obţinerea soluţiei de normă minimă a unui sistem de inecuaţii liniare de mari dimensiuni:

$$\begin{cases} min\ \frac{1}{2}\|x\|_2^2 \\ Ax \leq b. \end{cases}$$

Acest algoritm are avantajul că furnizează soluţia exactă într-un număr finit de paşi sau dacă sistemul este inconsistent dă un mesaj adecvat. Modificările făcute au drept rezultat scăderea volumului de calcul şi posibilitatea folosirii sistemelor multiprocesor şi a calculului paralel.

Algoritmul este o metodă combinatorială de determinare a restricţiilor active (satisfăcute cu egalitate de soluţia de normă minimă) şi s-a avut în vedere îmbunătăţirea lui prin scăderea numărului de variante cercetate la fiecare iteraţie. În felul acesta calculele necesare verificării acestor variante se pot face în paralel dacă algoritmul este implementat pe un sistem multiprocesor.

Rezolvarea unei probleme în paralel impune de cele mai multe ori reconsiderarea tehnicii de rezolvare a problemei respective nefiind suficient numai un sistem cu arhitectură paralelă. Ideea de bază în programarea paralelă este descompunerea în subprobleme ce presupun un efort de calcul similar, în scopul tratării lor simultane. Există însă riscul ca numărul de procesoare să fie inferior numărului de subprobleme şi în acest caz unele dintre ele trebuie rezolvate în pseudo-paralelism. Pentru evitarea acestei situaţii este propusă o combinaţie între algoritmul original Theil-Van de Panne şi algoritmul Hildreth-D'Esopo modificat de Lent şi Censor $[LC1]$. Prin aceasta se restrânge numărul subproblemelor care trebuie tratate în paralel. De asemenea criteriul de optimalitate din algoritmul original, care presupunea calculul unor variante suplimentare în momentul aplicării lui, este înlocuit cu verificarea semnului variabilelor duale. Se demonstrează echivalenţa celor două criterii. Numărul de operaţii efectuate de fiecare procesor este micşorat prin stabilirea unei relaţii de recurenţă.

BIBLIOGRAFIE

[*Bj*] A Björck, *A direct method for sparse least squares problems with lower and upper bounds*, Numer. Math., **54** (1988), 19-32.

[*BTT*] M. Bierlaire, Ph. L. Toint and D. Tuyttens, *On iterative algorithms for linear least squares problems with bound constraints*, Linear Algebra Appl., **143** (1991), 111-143.

[*CGT*1] A. R. Conn, N.I.M. Gould, and Ph. L. Toint, *Global convergence of a class of trust region algorithms for optimization with simple bounds*, SIAM Journal of Numerical Analysis, **26** (1989), 764-767.

[*CGT*2] A. R. Conn, N.I.M. Gould, and Ph. L. Toint, *Testing a class of methods for solving minimization problems with simple bounds on the variables*, Mathematics of Computation, **50** (1988), 399-430.

[*Er*] I.I. Eremin, *Contradictory Models of Optimal Planning,* Nauka, Moskow, 1988(Russian).

[*GL*] G.H.Golub and C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, The John's Hopkins University Press, Maryland, 1989.

[*Ha*] S.P. Han, *Least-squares solution of linear inequalities*, Technical Report #2141, Mathematics Research Center, University of Wisconsin - Madison, (1980).

[*LC*1] A. Lent and Y. Censor, *Extensions of Hildreth's row-action method for Quadratic Programming*, SIAM J. Control and Optimization, **18** (1980), 444-454.

[*Lö*] P. Lötstedt, *Solving the minimal least squares problem subject to bounds on the variables*, BIT, **24** (1984), 206-224.

[*M*1] I. Maruşciac, *Best L_p-approximation of an inconsistent linear system*, Mathematica (Cluj), **16**(39) 2, (1974), 287-291.

[*M*2] I. Maruşciac, *Simplex-like method for the Pareto minimum solutions of an inconsistent system*, Studia Univ. Babes-Bolyai Math., **31** 4, (1986), 22-30.

[P] E. Popescu, *Structuri liniare şi aplicaţii. Metode de corectare a sistemelor inconsistente şi de rezolvare a sistemelor de inecuaţii liniare*, Teza de doctorat, 1999.

[$PM1$] E. Popescu and I. M. Stancu Minasian, *Algorithm for solving convex programs subject to box constraints* (to appear in An. Şt. Univ. Bucureşti).

[$PM2$] E. Popescu and I. M. Stancu Minasian, *Methods for correcting and solving inconsistent linear inequality systems*, The Seventh Conference on Nonlinear Analysis Numerical Analysis, Applied Mathematics and Computer Science, Eforie Nord, Proceedings, (1999), pg. 39-46.

[$Po1$] E. Popescu, *Least squares problem for linear inequalities with bounds on the variables* (to appear in Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation).

[$Po2$] E. Popescu, *An extension of the Theil-Van de Panne algorithm to systems of linear inequalities*, PAMM Bulletin for Applied and Computer Mathematics, **LXXXVI-B**, (1998), 77-84.

[$Po3$] E. Popescu, *Least squares problems for linear inequalities with linear equality constraints and simple bounds on the variables,* PAMM Bulletin for Applied and Computer Mathematics, **LXXXVIII**, (1999), 201-212.

[SP] M. Ştefănescu and E. Popescu, *A QR-factorization method for least-squares problems of linear inequalities with constraints,* 5-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées, Constantza, 28 août - 1er septembre, 2000.

[TP] H. Theil and C. Van de Panne, *Quadratic Programming as an Extension of Conventional Quadratic Maximization*, in "Management Science", **12**, 9(1966)

[$Va1$] A.A. Vatolin, *An LP-based algorithm for the correction of inconsistent linear equation and inequality systems*, Optimization, **24** (1992), 157-164.

[$Va2$] A.A. Vatolin, *Approximation of improper linear programs using Euclidean norm criterion*, Zh. Vichisl. Matem. i Matem. Phys. **24,** 12, (1984), 1907-1908 (Russian).

[$Va3$] A.A. Vatolin, *On the approximation of inconsistent linear equation and* *inequality systems*, Metody Approximatsii Nesobstvennih Zadach Matemati. cheskogo Programmirovanija, UNTS AN SSSR, Sverdlovsk, (1984), 39-54 (Russian).

Universitatea "Ovidius",
Bd. Mamaia 124,
Constanta,
Romania
e-mail: epopescu@univ-ovidius.ro

Universitatea "Ovidius",
Bd. Mamaia 124,
Constanta,
Romania
e-mail:
mirelast@univ-ovidius.ro

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 111–116

ON THE CONSERVATIVENESS OF THE FELLER SEMIGROUPS

Emil Popescu

Abstract

We give a necessary and sufficient condition for the conservativeness of Feller semigroups defined on a locally compact abelian group.

Let $(G,+)$ be a locally compact abelian group with the neutral element denoted 0. Let Γ be the dual group of G, i.e. the set of all continuous characters on G where the group operation is defined by

$$(\gamma_1+\gamma_2)(x)=\gamma_1(x)\cdot\gamma_2(x)$$

for all $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$ and $x\in G$. The neutral element in Γ is the character $x\longmapsto 1$, denoted 0. The inverse element of $\gamma\in\Gamma$ is the character $-\gamma : x\longmapsto\overline{\gamma(x)}$. We choose and fix a Haar measure on G, denoted ω_G or dx. For $f\in L^1(G)$ and $\gamma\in\Gamma$ we denote by $\widehat{f}$ the Fourier transformation of f :

$$\widehat{f}(\gamma)=\int\limits_G\overline{\gamma(x)}f(x)dx.$$

By $C_0(G)$, resp. $C_b(G)$, we denote the set of continuous complex functions on G which tend to zero at infinity, resp. which are bounded, and these spaces will be endowed with the topology of uniform convergence. The Haar measure ω_Γ (or just $d\gamma$) on Γ is the dual Haar measure to ω_G on G. We denote by $S(G)$ the set of all functions $u\in L^1(G)\cap C_b(G)$ with $\widehat{u}\in L^1(\Gamma)$.

A *Feller semigroup* on G is a strongly continuous contraction semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ on $C_0(G)$ for which all the operators P_t are positive, i.e. such that for all $t\geq 0$ and $f\in C_0^+(G)$ we have $P_tf\in C_0^+(G)$.

We present some results concerning the integral representation of the Feller semigroups on a locally compact abelian group G.

Theorem 1 ([5]). *Let $(P_t)_{t\geq 0}$ be a Feller semigroup on G. For every $t \geq 0$ there exists a function*

$$p_t : G \times \Gamma \to \mathbf{C}$$

continuous, bounded and such that for any $x \in G$,

$$\gamma \to p_t(x, \gamma)$$

is positive definite with the property that for all $u \in S(G)$ we have

$$P_t u(x) = \int_\Gamma \gamma(x)\ p_t(x,\gamma)\ \widehat{u}(\gamma) d\gamma.$$

Theorem 2 ([5]). *Let $(P_t)_{t\geq 0}$ be a Feller semigroup on G with the infinitesimal generator $(A, D(A))$. Suppose that $S(G) \subset D(A)$, the functions $x \to \gamma(x)$ belong to $D(A)$ for every $\gamma \in \Gamma$ and the functions $\gamma \to (A\gamma)(x) \cdot \widehat{u}(\gamma)$ belong to $L^1(\Gamma)$ for every $x \in G$ and $u \in S(G)$. Then for every $u \in S(G)$,*

$$Au(x) = \int_\Gamma \gamma(x)\ a(x,\gamma)\ \widehat{u}(\gamma)\ d\gamma,$$

where $a : G \times \Gamma \to \mathbf{C}$

$$a(x,\gamma) = \frac{d}{dt}\ p_t\ (x,\gamma)\ |_{t=0}\ .$$

From this results we observe that the functions $p_t\ (x, \gamma)$ and $a(x, \gamma)$, named *symbols,* characterize the semigroup $(P_t)_{t>0}$ and its infinitesimal generator A. Imposing conditions on the symbols we obtain new properties of the semigroup and conversely. For exemple, in [4] we studied a class of symbols which give $k-$elliptic operators on a locally compact abelian group. Now, using the above integral representation we obtain a necessary and sufficient condition for the conservativeness of a Feller semigroup in terms of associated symbols.

Definition. A Feller semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ on a locally compact abelian group G is said to be *conservative* if $P_t 1 = 1$ for all $t \geq 0$.

The intuitive meaning of conservativeness of the Feller semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ on $\mathbf{R}^n$ can be given with the help of the associated stochastic processes $\{X_t\}_{t\geq 0}$. The relation between them is given by

$$P_t 1_B\ (x) = E^x\ (X_t \in B)\,,$$

for all $x \in \mathbf{R}^n$ and all Borel sets $B \subset \mathbf{R}^n$. Therefore,

$$1 = P_t 1\ (x) = E^x 1 = E^x\ (X_t \in \mathbf{R}^n) \qquad a.s.$$

and the conservative process $\{X_t\}_{t\geq 0}$ has *a.s. infinite life-time.*

Let $(S_t)_{t\geq 0}$ be the *convolution semigroup* on $\mathbf{R}^n$,

$$S_t u(x) = (2\pi)^{-(n/2)} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi} e^{-ta(\xi)} \widehat{u}(\xi)\, d\xi, \quad u \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

where a is the continuous negative definite function described by the *Levy-Khinchine formula*

$$a(\xi) = c + ib\cdot\xi + q(\xi) + \int_{R^n\setminus\{0\}} \left[1 - e^{-i\xi\cdot y} - i\frac{\xi\cdot y}{1+\|y\|^2}\right] \frac{1+\|y\|^2}{\|y\|^2} d\nu(y)$$

with $c \geq 0$, $b \in \mathbf{R}^n$, q a continuous non-negative definite quadratic form on $\mathbf{R}^n$ and ν a non-negative finite measure on $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. The infinitesimal generator of $(S_t)_{t\geq 0}$ is

$$Au(x) = -(2\pi)^{-(n/2)} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi} a(\xi) \widehat{u}(\xi)\, d\xi, \quad u \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

We observe that $(S_t)_{t\geq 0}$ is conservative if and only if $a(0) = 0$. Obviously, if we put, for exemple, $a(\xi) = \|\xi\|^2 + 1$ we obtain a semigroup which is not conservative.

In the following we consider that the assumptions of Theorem 2 are true.

Theorem 3. *The Feller semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ is conservative if and only if $a(x,0) = 0$ holds for all $x \in G$.*

Proof. We suppose $P_t 1 = 1$ for every $t \geq 0$. Then

$$A1 = \lim_{t\to 0} \frac{P_t 1 - 1}{t} = 0.$$

Since

$$a : G \times \Gamma \to \mathbf{C}, \;\; a(x,\gamma) = \overline{\gamma(x)}\,(A\gamma)(x)$$

it follows that

$$a(x,0) = A0(x) = 0,$$

for all $x \in G$.

Conversely, if $a(x,0) = 0$ for every $x \in G$ then we have

$$\frac{d}{dt} p_t(x,\gamma)\,|_{t=0} = 0,$$

for every $x \in G$. By Taylor's formula,

$$p_t(x,\gamma) - p_0(x,\gamma) = \int_0^t \frac{d}{ds}\, p_s(x,\gamma)\, ds.$$

We obtain

$$\begin{aligned} p_t(x,\gamma) - 1 &= t\int_0^1 \frac{d}{ds}\, p_s(x,\gamma)\, |_{s=\rho t}\, d\rho \\ &= t\int_0^1 \frac{d}{ds}\, \left[\overline{\gamma(x)}\,(P_s\gamma)(x)\right] |_{s=\rho t}\, d\rho. \end{aligned}$$

Since

$$\frac{d}{ds}\, P_s u = P_s A u,$$

it follows that

$$\begin{aligned} p_t(x,\gamma) - 1 &= t\int_0^1 \overline{\gamma(x)}\,(P_{\rho t}A\gamma)(x)\, d\rho \\ &= -t\int_0^1 \overline{\gamma(x)} P_{\rho t}\,(a(\cdot,\gamma)\,\gamma(\cdot))\,(x)\, d\rho. \end{aligned}$$

Thus we find for $\gamma = 0$:

$$p_t(x,0) = 1,$$

for every $x \in G$. Since

$$p_t(x,\gamma) = \overline{\gamma(x)}\,(P_t\gamma)(x)\,,$$

we obtain

$$1 = P_t 1\,(x)\,,$$

for every $x \in G$, i.e. $P_t 1 = 1$ and $(P_t)_{t\geq 0}$ is conservative.□

Using the integral representation of the operators which form different Feller semigroups ([5]) we present some exemples of conservativeness.

The Ornstein-Uhlenbeck semigroup is defined, for each $t > 0$, by

$$U_t f(x) = \int f(xe^{-t/2} + y\sqrt{1-e^{-t}})\mu(dy),$$

where μ is the Gaussian measure on $\mathbf{R}^n$, whose Fourier transformation is $\widehat{\mu}(u) = e^{-|u|^2/2}$. On $S(\mathbf{R}^n)$, we have from [5]:

$$U_t f(x) = (2\pi)^{-(n/2)} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi} p_t(x,\xi) \widehat{f}(\xi)\, d\xi,$$

where

$$p_t(x,\xi) = e^{i(e^{-t/2}-1)x\cdot\xi-(1-e^{-t})\cdot|\xi|^2/2}.$$

Since

$$a(x,\gamma) = \frac{d}{dt} p_t(x,\gamma)\,|_{t=0} = -\frac{1}{2} ix\cdot\xi - \frac{|\,\xi\,|^2}{2}$$

and $a(x,0) = 0$ holds for all $x \in \mathbf{R}^n$, it follows that $(U_t)_{t>0}$ is conservative.

The brownian semigroup $(\Lambda_t)_{t>0}$ on the compact abelian group given by the unit circle $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, is

$$\Lambda_t f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} e^{-tn^2/2} \widehat{f}(n).$$

If $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ $(f \in S(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}))$, then

$$\Lambda_t f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-tn^2/2} e^{in\theta},$$

where $p_t(\theta,n) = e^{-tn^2/2}$. Thus,

$$a(\theta,n) = \frac{d}{dt} p_t(\theta,n)\,|_{t=0} = -\frac{n^2}{2} e^{-tn^2/2}.$$

We observe that $a(\theta,0) = 0$ and $(\Lambda_t)_{t>0}$ is conservative.

In the context of the infinite-dimensional group $G = \mathbf{R}^m \times \mathbf{T}^\infty$ with the dual group $\Gamma = \mathbf{R}^m \times \mathbf{Z}^{(\infty)}$, let X be a space-homogeneous Markov process on G with almost surely continuous trajectories, the transition function being invariant with respect to the action of the group (in the terminology of A. Bendikov). The semigroup $(P_t)_{t>0}$ of the process X is a Feller semigroup and the formula of Teorema 2 is valid on a set $\mathcal{D}$ of cylindrical infinitely differentiable functions with compact supports with

$$p_t(x,\gamma) = \exp\{-t[\Psi(\gamma) - i\ell(\gamma)]\},\ \gamma \in \Gamma,$$

where $\Psi(\gamma) \geq 0$ is a quadratic form and $\ell(\gamma)$ is a linear form on Γ. Here

$$a(x, \gamma) = -\Psi(\gamma) + i\ell(\gamma)$$

and $a(x,0) = 0$, hence $(P_t)_{t>0}$ is conservative.

REFERENCES

1. A. Bendikov, *Potential theory on infinite-dimensional abelian groups.* Walter de Gruyter, 1995.

2. C.Berg and G.Forst, *Potential theory on locally compact abelian groups.* Springer, 1975.

3. N. Jacob, *Characteristic functions and symbols in the theory of Feller processes.* Potential Analysis **8** (1998), 61-68.

4. E.Popescu, *PD-opérateurs k-elliptiques sur les groupes abéliens local compacts.* Rev.Roumaine Math. Pures Appl. **39** (1994), 487-499.

5. E. Popescu, *On the symbols associated with a semigroup of operators.* (to appear in Rev. Roumaine de Math. Pures et Appl.).

6. Schilling, R. L., *Conservativeness of semigroups generated by pseudodifferential operators.* Potential Analysis **9** (1998), 91-104.

Technical Military Academy,
Bucharest,
Romania

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 117–120

MULTI-CRITERIA OPTIMIZATION ON MANIFOLDS

Cristina Liliana Pripoae

Abstract

In [1] we defined the notion of Pareto manifolds, as a tool for generalizing classical methods of multi-criteria optimization to the framework of modern Differential geometry. The present paper contains more details and examples of Pareto manifolds, and of Pareto maxima on manifolds.

1 Introduction

Differential geometric techniques in multicriteria optimization problems were considered only recently [1]. The situation contrasts with the case of single-criteria optimization, where the geometric modelization is much more advanced ([2], [3]). The main difficulty for generalizing the notions and results from the classical multi-criteria theory (see, for example, the monograph [4])) to manifolds consists in the non-covariant character of efficiency (Pareto maxima, etc) and of order relations. For a differentiable function $f : M \to N$ (where M and N are differentiable manifolds), we introduced an analogue of the (classical) Pareto maximum. For covariance, we restricted ourselves ([1]) to some special class of target manifolds N (called Pareto manifolds): these manifolds were characterized by the existence of an adapted atlas, with "order preserving" coordinates changes.

In this paper, we give a characterization of an adapted atlas of a Pareto manifold. Then, we find a sufficient condition for immersed submanifolds in $\mathbf{R}^p$ to be Pareto manifolds.

Finally, we present two new examples: a function between manifolds, admitting two Pareto maxima, and a function admitting no Pareto maxima.

Key Words: multi-criteria optimization, Pareto maximum, Pareto manifolds
Mathematical Reviews subject classification: 49M10, 90C30, 53C10

2 New examples of Pareto manifolds

We say a vector $v \in \mathbf{R}^n$ is non-negative (notation $v \geq 0$) if each of its components is non-negative.

An n-dimensional differentiable manifold. M is said ([1]) to be a Pareto manifold if there exists a compatible atlas $\mathcal{A}$ on M such that for any two overlaping charts (U, φ) and (V, ψ) from $\mathcal{A}$, the following property holds:

$$if \quad v, w \in \varphi(U \bigcap V) \quad , \quad v \geq w \quad then \quad \psi \circ \varphi^{-1}(v) \geq \psi \circ \varphi^{-1}(w)$$

Such an atlas is called an adapted atlas on M.

Proposition. *A is an adapted atlas on a Pareto manifold if and only if for any two charts (U, φ) and (V, h) of A, the components of $\varphi \circ h^{-1}$ are all non-decreasing on their domain of definition.*

In [1], several examples of Pareto manifolds were given (open sets in $\mathbf{R}^n$; the 2-dimensional torus; a well known 2-dimensional non-Hausdorff manifold; any product of Pareto manifolds).

Obviously, any manifold admitting a one-chart atlas is a Pareto manifold.

Remark. Consider N an n-dimensional immersed submanifold in $\mathbf{R}^p$, $(n < p)$. For any point $x \in N$, there exist an open neighbourhood V in $\mathbf{R}^p$ and a diffeomorphism (onto its image) $\Phi : V \to \mathbf{R}^p$ such that $\Phi(V \cap N) \subset \mathbf{R}^n \times 0_{p-n}$. Then (by eventually restricting the domain V) there exists a chart (U, φ) of N around x, with $U = V \cap N$, such that $i \circ \varphi = \Phi$ (here i means the inclusion of $\mathbf{R}^n$ into $\mathbf{R}^p$). We say that the pairs (V, Φ) and (U, φ) are correlated.

The following result gives a sufficient condition for a submanifold to be a Pareto manifold, in terms of hypothesis concerning the ambient space.

Theorem. *Let N be an immersed submanifold of $\mathbf{R}^p$, $(p \geq 2)$. Suppose that for any $x \in N$, and any two correlated pairs (V, Φ), (U, φ) and $(\tilde{V}, \tilde{\Phi})$, $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ (respectively) around x, the function $\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}$ is non- decreasing.*

Then N admits a Pareto structure, and the charts (U, φ) form an adapted atlas for it.

Proof. With the notations and constructions from the previous remark, we see that, in particular, for any $z \in \varphi(U \cap \tilde{U})$, we have

$$\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}(z, 0) = \tilde{\Phi}(\varphi^{-1}(z)) = (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}(z), 0)$$

The non-decreasing property of the function $\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}$ implies that $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ is also non- decreasing.

This proves that the charts on N form an adapted atlas for a Pareto structure on the submanifold. □

3 Pareto maximum points on manifolds

Consider M a Pareto manifold, (U, h) an adapted chart and $x, y \in U$. We say ([1]) $x \geq y$ if $h(x) \geq h(y)$. Due to the property of adapted atlases, the relationship " $\geq$ " is independent of the choice of the adapted chart around x and y.

Definition.([1]) Consider M a differentiable manifold, N a Pareto manifold and $f : M \to N$ a *continuous* function. We say $x_0 \in M$ is a (local) Pareto point for f if there exist a chart (V, φ) of M around x_0 and an adapted chart (U, h) of N around $f(x_0)$, an open set $V_0 \subset V$ around x_0 such that $f(V) \subseteq U$ and for every $x \in V_0$ with $f(x) \geq f(x_0)$ we have $f(x) = f(x_0)$.

In [1] we proved that the notion of Pareto points is covariant.

Example. Let M be the two-dimensional standard sphere and N be the paraboloide of revolution, given by

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$$

The function $f : M \to N$, given by

$$f(x, y, z) = (x, y, -x^2 - y^2)$$

is a continuous one. The target set N is a Pareto manifold (see §2); we choose the adapted atlas with only one chart, given by the orthogonal projection along the z-axis. We remark that the "North pole" (0,0,1) and the "South pole" (0,0,-1) are (the only) Pareto points of the function f.

As a coincidence, the same conclusion holds also if the target manifold of f is supposed to be $\mathbf{R}^3$, with the canonical atlas. The reason is that the inclusion of the paraboloide into the three-dimensional Euclidean space is "order preserving".

Example. Consider $M = N = T^2$ the 2-dimensional torus and $f : M \to N$ the function

$$f(cos\alpha, sin\alpha, cos\beta, sin\beta) = (cos\alpha, sin\alpha, 1, 0)$$

With respect to the canonical 6-chart atlas, the torus is a Pareto manifold. Considering the respective atlas as an adapted one, one remarks that the function f do not admit any Pareto maximum point.

References

[1] C.L. Pripoae - *Pareto Maxima as Maximum Points for Weighted Real Valued Functions*, Proc. Conference Diff. Geom., Lie Algebras, General relativity (Salonic 1999), Gr. Tsagas (ed.), Geom. Balkan Press (to appear)

[2] T. Rapcsak - *Smooth Nonlinear Optimization in* $\mathbf{R}^n$, Kluwer Acad. Publ., 1997

[3] C. Udriste - *Convex Functions and Optimization Methods on Riemannian Manifolds*, Math. Appl. no.297, Kluwer Acad. Publ., 1994

[4] P.L. Yu - *Multiple-Criteria Decision Making*, Plenum Press, N.Y., 1985

Academy Of Economic Studies,
Department of Mathematics,
Piata Romana nr. 6,
70167 Bucharest ,
Romania
e-mail: gpripoae@math.math.unibuc.ro

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 121–132

CONFORMAL METRICAL STRUCTURES IN THE LAGRANGE GEOMETRY OF ORDER k

Monica Purcaru, Mirela Tîrnoveanu and Nicoleta Aldea

Abstract

The purpose of the present paper is to introduce the concept of conformal metrical d-structure in a higher order Lagrange space as a straightforward extension of that in a Lagrange geometry of order 2. One studies some properties of this notion.

One defines the conformal metrical N-linear connection notion on $\tilde{E} = \widetilde{Osc^k M}$ and one solves the problem of determining the set of all conformal metrical N-linear connections which preserve the nonlinear connection N.

One deals with some special classes of conformal metrical N-linear connections and one analyzes the role of $T_{(0)}, S_{(\alpha)}$, $(\alpha = 1, 2, ..., k)$ torsion d-tensor fields in this theory, special focus being on the semi-symmetric conformal metrical N-linear connections which preserve the nonlinear connection N.

Finally one finds the group of transformations of conformal metrical N-linear connections, which preserve the nonlinear connection N.

1. Introduction

The literature on the higher order Lagrange spaces geometry highlights the theoretical and practical importance of these spaces: [2], [3] – [6].

Motivated by concrete problems in variational calculation, higher order Lagrange geometry, based on the $k-$osculator bundle notion, has witnessed a wide acknowledgment due to the papers [2], [3] – [6], published by Radu Miron and Gheorghe Atanasiu.

Key Words: k-osculator bundle, conformal metrical N -linear connection, conformal metrical d-structure, torsion.

Mathematical Reviews subject classification: 53C05

The geometry of k-osculator spaces presents not only a special theoretical interest, but also an applicative one.

Due to its content, the present paper continues a trend of interest with a long tradition in the modern differential geometry, i.e. the study of remarkable geometrical structures.

In the present paper we introduce the concept of conformal metrical d-structure in a higher order Lagrange space $L^{(k)n} = (M, L)$, (§2).

We define the conformal metrical N-linear connection notion on $\tilde{E} = Os\tilde{c}^k M$, (§3), and we determine the set of all these connections, which preserve the nonlinear connection N (§4).

We treat also some special classes of conformal metrical N-linear connections, (§5), and we find the group of transformations of these connections, which preserve the nonlinear connection N (§6).

This paper is a generalization of the papers [9] – [11]. Concerning the terminology and notations, we use those from [2], [8], which are essentially based on M.Matsumoto's book [1].

2. The notion of conformal metrical d-structure in the Lagrange geometry of order k

Let M be a real n-dimensional C^∞-differentiable manifold and $(Osc^k M, \pi, M), k \in N^*$, its k-osculator bundle. The local coordinates on the total space $E = Osc^k M$ are denoted by $(x^i, y^{(1)i}, y^{(2)i}, ..., y^{(k)i})$. Let L be a C^∞-regular Lagrangian of order k, $k \in N^*$, that is a map $L : Osc^k M \to \mathbf{R}$ of the class C^∞ on

$$\tilde{E} = Os\tilde{c}^k M = \{u = (x, y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(k)}) \in E | rank||y^{(1)i}|| = 1\}$$

and continuous in the points $(x, 0, y^{(2)}, ..., y^{(k)})$ of the manifold E. Let g_{ij} be the fundamental or metric tensor field of the space $L^{(k)n} = (M, L)$, where L is the fundamental function defined above. g_{ij} is given by:

$$g_{ij}(x, y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(k)}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial y^{(k)i} \partial y^{(k)j}}, \tag{2.1}$$

with the property: rank $||g_{ij}(x, y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(k)})|| = n$ on $\tilde{E}$.
$g_{ij}(x, y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(k)})$ is a d-tensor field, covariant of type (0,2), symmetric on $\tilde{E}$, [2].

Let $\mathcal{S}_2(\tilde{E})$ be the set of all symmetric d-tensor fields of the type (0,2) on $\tilde{E}$. It is easily to show that the relations for $a_{ij}, b_{ij} \in \mathcal{S}_2(\tilde{E})$ defined by:

$$a_{ij} \sim b_{ij} \Leftrightarrow \exists \rho(x, y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(k)}) \in \mathcal{F}(\tilde{E}) / a_{ij} = e^{2\rho} b_{ij}, \tag{2.2}$$

where $\mathcal{F}(\tilde{E})$ is the ring of all differentiable functions on $\tilde{E}$, is an equivalent relation on $\mathcal{S}_2(\tilde{E})$.

Definition 1. The equivalence class $\hat{g}$ of $\mathcal{S}_2(\tilde{E})/\sim$ to which the fundamenta d-tensor field g_{ij} belongs is called a *conformal metrical d-structure on* $\tilde{E}$.

Each $g'_{ij} \in \hat{g}$ is a d-tensor symmetric and nondegenerate field, expressed by:

$$g'_{ij} = e^{2\rho} g_{ij}. \tag{2.3}$$

So, the d-tensor field g'_{ij} of the conformal metrical d-structure $\hat{g}$ of the Lagrange space $L^{(k)n}$ is the fundamental tensor field of some Lagrange space $L'^{(k)n}$.

We associate to this d-structure Obata's operators:

$$\Omega^{ir}_{sj} = \frac{1}{2}(\delta^i_s\delta^r_j - g_{sj}g^{ir}), \Omega^{*ir}_{sj} = \frac{1}{2}(\delta^i_s\delta^r_j + g_{sj}g^{ir}), \tag{2.4}$$

where (g^{ij}) is the inverse matrix of (g_{ij})

$$g_{ij}g^{jk} = \delta^i_j. \tag{2.5}$$

Obata's operators have the same properties as the ones associated with a Finsler space [7].

Obata's operators are defined for $g'_{ij} \in \hat{g}$ by putting $(g'^{ij}) = (g'_{ij})^{-1}$. Since equation (2.3) is equivalent to:

$$g'^{ij} = e^{-2\rho} g^{ij}, \tag{2.6}$$

we have:

Proposition 2.1. *Obata's operators depend on the conformal metrical d-structure $\hat{g}$, and do not depend on its representative $g'_{ij} \in \hat{g}$.*

3. The notion of conformal metrical N-linear connection in the Lagrange geometry of order k

Let N be a nonlinear connection on $\tilde{E}$ with the coefficients $N_{(1)}{}^i{}_j, N_{(2)}{}^i{}_j, \ldots, N_{(k)}{}^i{}_j$ and let D be an N-linear connection on $\tilde{E}$ with the coefficients in the adapted basis $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}, \frac{\delta}{\delta y^{(2)i}}, \ldots, \frac{\delta}{\delta y^{(k)i}}\}$:

$$D\Gamma(N) = (L^i_{jm}, C_{(1)}{}^i_{jm}, C_{(2)}{}^i_{jm}, \ldots, C_{(k)}{}^i_{jm}).$$

Definition 3.1. An N-linear connection D on $\tilde{E}$ for which there exists an 1- form ω in

$$\chi^*(\tilde{E}),\ (\omega = \tilde{\omega}_i dx^i = \dot{\omega}_{(1)i}\delta y^{(1)i} + \dot{\omega}_{(2)i}\delta y^{(2)i} + \ldots + \dot{\omega}_{(k)i}\delta y^{(k)i},$$

where $(dx^i, \delta y^{(1)i}, \delta_y^{(2)i}, ..., \delta y^{(k)i})$ is the dual basis of $(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta y^{(1)i}}, \frac{\delta}{\delta y^{(2)i}}, ..., \frac{\delta}{\delta y^{(k)i}})$ such that:

$$g_{ij|m} = 2\tilde{\omega}_m g_{ij}, g_{ij} \overset{(\alpha)}{|}_m = 2\dot{\omega}_{(\alpha)m} g_{ij}, (\alpha = 1, 2, ..., k), \tag{3.1}$$

is said to be a conformal metrical N-linear connection on $\tilde{E}$ with respect to the *conformal metrical d-structure* $\hat{g}$, $\Gamma(N, \omega)$.

For any representative $g'_{ij} \in \hat{g}$ we have:

Theorem 3.1. *For any $g'_{ij} = e^{2\rho} g_{ij}$ a conformal metrical N-linear connection with respect to $\hat{g}$, corresponding to the 1-form ω, $D\Gamma(N, \omega)$ satisfies:*

$$g_{ij|m} = 2\tilde{\omega}'_m g'_{ij}, g'_{ij}|^{(\alpha)} = 2\,\dot{\omega}'_{(\alpha)m} g'_{ij} (\alpha = 1, 2, ..., k),$$

where $\omega' = \omega + d\rho$.

Since in Theorem 3.1 $\omega' = 0$ is equivalent to $\omega = d(-\rho)$, we have:

Theorem 3.2. *A conformal metrical N-linear connection on $\tilde{E}$ with respect toat $\hat{g}$, corresponding to the 1-form $\omega D\Gamma(N, \omega)$, is a metrical N-linear connection with respect to some $g'_{ij} \in \hat{g}$ (i.e. $g'_{ij|m} = 0, g'_{ij}|^{(\alpha)}_m = 0$, $(\alpha = 1, 2, ..., k)$) if and only if ω is exact.*

4. The set of all conformal metrical N-linear connections in the Lagrange geometry of order k

Let $D \overset{0}{\Gamma} (N) = (\overset{0}{L}{}^i_{jm}, \overset{0}{C}{}_{(1)}{}^i_{jm}, \overset{0}{C}{}_{(2)}{}^i_{jm}, ..., \overset{0}{C}{}_{(k)}{}^i_{jm})$ be a fixed N-linear connection on $\tilde{E}$. Then any N-linear connection on $\tilde{E}$:
$D\Gamma(N) = (L^i_{jm}, C_{(1)}{}^i_{jm}, C_{(2)}{}^i_{jm}, ..., C_{(k)}{}^i_{jm})$, can be expressed in the form:

$$L^i_{jm} = \overset{0}{L}{}^i_{jm} - B^i_{jm},\ C_{(\alpha)}{}^i_{jm} = \overset{0}{C}{}_{(\alpha)}{}^i_{jm} - D_{(\alpha)}{}^i_{jm},\ (\alpha = 1, 2, ..., k), \tag{4.1}$$

where B^i_{jm}, $D_{(\alpha)}{}^i_{jm}$, $(\alpha = 1, 2, ..., k)$ are components of the difference tensor fields of $D\Gamma(N)$ from $D \overset{0}{\Gamma} (N)$, [1].

$D\Gamma(N)$ is a conformal metrical N-linear connection with respect to $\hat{g}$, corresponding to the 1-form ω in $\mathcal{X}^*(\tilde{E})$, that is (3.1) holds for $D\Gamma(N) = D\Gamma(N, \omega)$, if and only ifit is necessary and sufficient that B^i_{jm}, $D_{(\alpha)}{}^i_{jm}$ $(\alpha =$

$1, 2, ..., k)$, satisfy

$$\begin{cases} (g_{ij\overset{0}{|}m} - 2\tilde{\omega}_m g_{ij}) + g_{sj}B^s_{im} + g_{is}B^s_{jm} = 0, \\ \\ (g_{ij} \overset{(\alpha)}{\overset{0}{|}}_m - 2\dot{\omega}_{(\alpha)m} g_{ij}) + g_{sj}D_{(\alpha)}{}^s_{im} + g_{is}D_{(\alpha)}{}^s_{jm} = 0, \ (\alpha = 1, 2, ..., k), \end{cases} \tag{4.2}$$

which is equivalent to:

$$\begin{cases} \Omega^{*ir}_{sj} B^s_{rm} = -\frac{1}{2} g^{il} (g_{lj\overset{0}{|}m} - 2\tilde{\omega}_m g_{lj}), \\ \\ \Omega^{*ir}_{sj} D_{(\alpha)}{}^s_{rm} = -\frac{1}{2} g^{il} (g_{lj} \overset{(\alpha)}{\overset{0}{|}}_m - 2\dot{\omega}_{(\alpha)m} g_{lj}), \ (\alpha = 1, 2, ..., k); \end{cases} \tag{4.3}$$

where $\overset{0}{|}$ and $\overset{(\alpha)}{\overset{0}{|}}$ $(\alpha = 1, 2, ..., k)$ denote the h and v_α-covariant derivatives $(\alpha = 1, 2, ..., k)$ with respect to $D \overset{0}{\Gamma} (N)$.

Thus, we have:

Proposition 4.1. *Let $D \overset{0}{\Gamma} (N)$ be a fixed N-linear connection on $\tilde{E}$. Then the set of all conformal metrical N-linear connections with respect to $\hat{g}$ which preserve the nonlinear connection N is given by* (4.1), *where ω is an arbitrary 1-form in $\chi^*(\tilde{E})$, and $B^i_{jm}, D^i_{(\alpha)jm}$ $(\alpha = 1, 2, ..., k)$ are arbitrary d-tensor fields satisfying* (4.3).

Especially, if $D \overset{0}{\Gamma} (N) = D \overset{0}{\Gamma} (N, \omega)$ is a conformal metrical N-linear connection, with respect to $\hat{g}$, then (4.3) *becomes:*

$$\Omega^{*ir}_{sj} B^s_{rm} = 0, \ \Omega^{*ir}_{sj} D^s_{(\alpha)rm} = 0, \ (\alpha = 1, 2, ..., k). \tag{4.4}$$

From Theorem 5.4.3[2], however, the system (4.3) has solutions in B^i_{jm}, $D_{(\alpha)}{}^i_{jm}$ $(\alpha = 1, 2, ..., k)$. Substituting in (4.1) from the general solution we have:

Theorem 4.1. *Let $D \overset{0}{\Gamma} (N)$ be a fixed N-linear connection on $\tilde{E}$. The set of all conformal metrical N-linear connections $D\Gamma(N, \omega)$ with respect to $\hat{g}$*

which preserve the nonlinear connection N is given by:

$$\begin{cases} L^i_{jm} = L^{0i}_{jm} + \frac{1}{2}g^{il}\left(g_{lj\overset{0}{|}m} - 2\tilde{\omega}_m g_{lj}\right) + \Omega^{ir}_{sj}X^s_{rm}, \\ C^i_{(\alpha)jm} = C^0_{(\alpha)}{}^i{}_{jm} + \frac{1}{2}g^{il}(g_{lj}\overset{\overset{\alpha}{0}}{|}_m - 2\,\dot{\omega}_{(\alpha)m}g_{lj}) + \Omega^{ir}_{sj}Y^s_{(\alpha)rm}, \ (\alpha = 1,2,...,k), \end{cases} \tag{4.5}$$

where X^i_{jm} ,$Y^i_{(\alpha)jm}$, $(\alpha = 1,2,...,k)$ are arbitrary d-tensor fields, and $\overset{0}{|}$, $\overset{\overset{(\alpha)}{0}}{|}$, denote the h and v_α-covariant derivatives $(\alpha = 1,2,...,k)$ with respect to $D\overset{0}{\Gamma}$ (N).

As the particular case $X^i_{jm} = Y_{(\alpha)}{}^i_{jm} = 0$, $(\alpha = 1,2)$ in Theorem 4.1, we have:

Theorem 4.2. *Let $D\overset{0}{\Gamma}$ (N) be a given N-linear connection on $\tilde{E}$, and let ω be a given 1-form in $\chi^*(\tilde{E})$. Then the following N-linear connection $D\tilde{\Gamma}(N,\omega)$ is a conformal metrical N-linear connection with respect to $\tilde{g}$, corresponding to ω :*

$$\begin{cases} \tilde{L}^i_{jm} = L^{0i}_{jm} + \frac{1}{2}g^{il}\left(g_{lj\overset{0}{|}m} - 2\tilde{\omega}_m g_{lj}\right), \\ \tilde{C}^i_{(\alpha)jm} = C^0_{(\alpha)}{}^i{}_{jm} + \frac{1}{2}g^{il}(g_{lj}\overset{\overset{\alpha}{0}}{|}_m - 2\,\dot{\omega}_{(\alpha)m}g_{lj}), \ (\alpha = 1,2,...,k). \end{cases} \tag{4.6}$$

If we take a metrical N-linear connection as $D\overset{0}{\Gamma}$ (N) in Theorem 4.2, then (4.6) becomes:

$$\begin{cases} \tilde{L}^i_{jm} = \overset{0}{L}{}^i_{jm} - \delta^i_j\tilde{\omega}_m, \\ \tilde{C}_{(\alpha)}{}^i_{jm} = \overset{0}{C}_{(\alpha)}{}^i_{jm} - \delta^i_j\dot{\omega}_{(\alpha)m}, \ (\alpha = 1,2,...,k). \end{cases} \tag{4.7}$$

As an example of $D\overset{0}{\Gamma}$ (N), we take the following metrical N-linear connection, given by:

$$\begin{cases} \overset{0}{L}{}^i_{jm} = \overset{c}{L}{}^i_{jm} - 2\Omega^{ir}_{mj}\tilde{\omega}_r, \\ \overset{0}{C}_{(\alpha)}{}^i_{jm} = \overset{c}{C}_{(\alpha)}{}^i_{jm} - 2\Omega^{ir}_{mj}\dot{\omega}_{(\alpha)r}, \ (\alpha = 1,2,...,k), \end{cases} \tag{4.8}$$

where $N = \overset{c}{N}$ is the canonical nonlinear connection of a Lagrange space of order

k and $C\Gamma\ (\overset{c}{N})=(\overset{c}{L}{}^{i}_{jm},\ \overset{c}{C}{}_{(1)}{}^{i}_{jm},\overset{c}{C}{}_{(2)}{}^{i}_{jm},...,\overset{c}{C}{}_{(k)}{}^{i}_{jm})$ is the canonical metrical $\overset{c}{N}$-connection (Theorem 10.2.1.[2]). A straighforward calculation leads to $g_{ij\overset{0}{|}m} =$ $0,\ g_{ij}\overset{\overset{(\alpha)}{0}}{|}{}_{m} = 0,\ \alpha = 1,2,...,k.$

Theorem 4.3. *Let ω be a given 1-form in $\chi^*(\tilde{E})$. The following $\overset{c}{N}$-linear connection*
$D\ \tilde{\Gamma}(\overset{c}{N},\omega) = \tilde{L}^{i}_{jm},\tilde{C}^{i}_{(1)jm},\tilde{C}^{i}_{(2)jm},...,\tilde{C}^{i}_{(k)jm}$ $(\alpha = 1,2,...,k)$ *is a conformal metrical $\overset{c}{N}$-linear connection with respect to $\hat{g}$, corresponding to ω :*

$$\begin{cases} \tilde{L}^{i}_{jm} = \overset{c}{L}{}^{i}_{jm} - \delta^{i}_{j}\tilde{\omega}_{m} - 2\Omega^{ir}_{mj}\tilde{\omega}_{r}, \\ \tilde{C}_{(\alpha)}{}^{i}_{jm} = \overset{c}{C}_{(\alpha)}{}^{i}_{jm} - \delta^{i}_{j}\dot{\omega}_{(\alpha)m} - 2\Omega^{ir}_{mj}\dot{\omega}_{(\alpha)r},\ (\alpha = 1,2,...,k), \end{cases} \tag{4.9}$$

where $N = \overset{c}{N}$ is the canonical nonlinear connection and $C\Gamma\ (\overset{c}{N})=(\overset{c}{L}{}^{i}_{jm},\overset{c}{C}{}_{(1)}{}^{i}_{jm},\overset{c}{C}{}_{(2)}{}^{i}_{jm},...,\overset{c}{C}{}_{(k)}{}^{i}_{jm})$ is the canonical metrical $\overset{c}{N}$-connection.

Finally, if we take a conformal metrical $\overset{c}{N}$-linear connection as $D\ \overset{0}{\Gamma}\ (\overset{c}{N},\omega)$ in Theorem 4.1, we have:

Theorem 4.4. *The set of all conformal metrical $\overset{c}{N}$-linear connections $D\Gamma(\overset{c}{N},\omega)$ with respect to $\hat{g}$, corresponding to ω, which preserve the nonlinear connection N is given by:*

$$\begin{cases} L^{i}_{jm} = \tilde{L}^{i}_{jm} + \Omega^{ir}_{sj}X^{s}_{rm}, \\ C_{(\alpha)}{}^{i}_{m} = C^{i}_{(\alpha)jm} + \Omega^{ir}_{sj}Y_{(\alpha)}{}^{s}{}_{rm},\ \alpha = 1,2,...,k, \end{cases} \tag{4.10}$$

where X^{i}_{jm}, $Y_{(\alpha)}{}^{i}{}_{jm}$, $(\alpha = 1,2,...,k)$ are arbitrary d-tensor fields on $\tilde{E}$, and $D\tilde{\Gamma}(\overset{c}{N},\omega)$ is given by (4.9).

5. Some special classes of conformal metrical $\overset{c}{N}$-linear connections in the Lagrange goemetry of order k

We shall try to replace the arbitrary d-tensor fields X^{i}_{jm}, $Y_{(\alpha)}{}^{i}_{jm}$, $\alpha = 1,2,...,k$, in Theorem 4.4 by the torsion d-tensor fields $T_{(0)}{}^{i}{}_{jm}$,

$S_{(\alpha)}{}^{i}{}_{jm}$, $\alpha = 1, 2, ..., k$. We put:

$$\begin{cases} T^{*}_{(0)}{}^{i}{}_{jm} = \frac{1}{2} g^{il} (g_{lh} T_{(0)}{}^{h}{}_{jm} - g_{jh} T_{(0)}{}^{h}{}_{lm} + g_{mh} T_{(0)}{}^{h}{}_{jl}), \\ S^{*}_{(\alpha)}{}^{i}{}_{jm} = \frac{1}{2} g^{il} (g_{lh} S_{(\alpha)}{}^{h}{}_{jm} - g_{jh} S_{(\alpha)}{}^{h}{}_{lm} + g_{mh} S_{(\alpha)}{}^{h}{}_{jl}), \ \alpha = 1, 2, ..., k. \end{cases} \tag{5.1}$$

Theorem 5.1. *Let $T^{i}_{(0)jm}$, $S^{i}_{(\alpha)jm}$, $\alpha = 1, 2, ..., k$ be given alternate d-tensor fields and ω be a given 1-form in $\chi^{*}(\tilde{E})$. Then, there exists a unique conformal metrical $\overset{c}{N}$-linear connection $D\Gamma(\overset{c}{N}, \omega)$ with respect to $\hat{g}$, having $T^{i}_{(0)jm}, S^{i}_{(\alpha)jm}$, $(\alpha = 1, 2, ..., k)$ as the torsion d-tensor fields. It is given by:*

$$\begin{cases} L^{i}_{jm} = \tilde{L}^{i}_{jm} + T^{*}_{(0)}{}^{i}_{jm}, \\ C_{(\alpha)}{}^{i}_{jm} = \tilde{C}^{i}_{(\alpha)jm} + S^{*}_{(\alpha)}{}^{i}_{jm}, \ \alpha = 1, 2, ..., k, \end{cases} \tag{5.2}$$

where $D\,\Gamma(\overset{c}{N}, \omega) = (\tilde{L}^{i}_{jm}, \tilde{C}^{i}_{(1)jm}, \tilde{C}^{i}_{(2)jm}, ..., \tilde{C}^{i}_{(k)jm}$ is the conformal metrical $\overset{c}{N}$-linear connection given by (4.9).

Proof. Since $\overset{c}{T}_{(0)}{}^{i}{}_{jm} = 0$, we have through a straightforward calculation $\tilde{T}_{(0)}{}^{i}{}_{jm} = 0$ and from the first relation of (4.10) we have

$$T_{(0)}{}^{i}{}_{jm} = \mathcal{A}_{jm}\{\Omega^{ir}_{sj} X^{s}_{rm}\}.$$

Substituting in $(5.1)_1$ we can express $\Omega^{ir}_{sj} X^{s}_{rm}$ in terms of $T_{(0)}{}^{i}{}_{jm}$:

$$\Omega^{ir}_{sj} X^{s}_{rm} = T^{*}_{(0)}{}^{i}{}_{jm}. \tag{5.3}$$

Conversely, if for any alternate d-tensor fields $T_{(0)}{}^{i}{}_{jm}$ we see (5.3) as a system of Obata's equations in X^{i}_{jm}, the compatibility condition (Theorem 2.1 of [7]) is easily verified. So, $T_{(0)}{}^{i}{}_{jm}$ may be arbitrarily given instead of X^{i}_{jm}. As to $Y_{(\alpha)}{}^{i}_{jm}$, $(\alpha = 1, 2, ..., k)$, the same argument holds.

Using the Definition 2.2 from [12] of the semi-symmetric N-linear connections on $\tilde{E}$, we obtain the following properties:

Observation 5.1. The $\overset{c}{N}$-linear connections: $D\,\tilde{\Gamma}(\overset{c}{N}, \omega)$ and $C\Gamma(\overset{c}{N})$ are considered as the semi-symetric conformal metrical $\overset{c}{N}$-linear connections, with the vanishing h and v_α-torsion vector fields, $\alpha = 1, 2, ..., k$.

Putting $\tilde{\sigma}_j = \frac{1}{n-1}T_{(0)j}, \dot{\sigma}_{(\alpha)j} = \frac{1}{n-1}S_{(\alpha)j}$, then $T^{*}_{(0)}{}^{i}_{jm}$, $S^{*}_{(\alpha)}{}^{i}_{jm}$, $\alpha = 1, 2, ..., k$ given by (5.1) become

$$\begin{cases} T^{*}_{(0)}{}^{i}_{jm} = 2\Omega^{ir}_{mj}\tilde{\sigma}_r, \\ S^{*}_{(\alpha)}{}^{i}_{jm} = 2\Omega^{ir}_{mj}\dot{\sigma}_{(\alpha)r}, \ \alpha = 1, 2, ..., k. \end{cases} \tag{5.4}$$

From Theorem 5.1. we have:

Theorem 5.2. *The set of all semi-symmetric conformal metrical $\overset{c}{N}$-linear connections, $D\Gamma(\overset{c}{N}, \omega, \sigma)$, with respect to g, which preserve the nonlinear connection N, is given by:*

$$\begin{cases} L^{i}_{jm} = \tilde{L}^{i}_{jm} + 2\Omega^{ir}_{mj}\tilde{\sigma}_r, \\ C^{i}_{(\alpha)jm} = \tilde{C}^{i}_{(\alpha)jm} + 2\Omega^{ir}_{mj}\dot{\sigma}_{(\alpha)r}, \ \alpha = 1, 2, ..., k, \end{cases} \tag{5.5}$$

where $D\Gamma(\overset{c}{N}, \omega) = (\tilde{L}^{i}_{jm}, \tilde{C}^{i}_{(1)jm}, \tilde{C}^{i}_{(2)jm}, ..., \tilde{C}^{i}_{(k)jm}$, is the conformal metrical $\overset{c}{N}$-linear connection given by (4.9), and $\sigma = \tilde{\sigma}_i dx_i + \dot{\sigma}_{(1)i}\delta y^{(1)i} + \dot{\sigma}_{(2)i}\delta y^{(2)i} + ... + \dot{\sigma}_{(k)i}\delta y^{(k)i}$ is a 1-form in $\chi^{*}(\tilde{E})$.

6. The group of transformation of conformal metrical N-linear connections in the Lagrange geometry of order k

Now, we study the transformation $D\Gamma(N, \omega) \to D\overline{\Gamma}(N, \omega')$ of conformal metrical N-linear connections with respect to $\hat{g}$. If we replace $D \overset{0}{\Gamma} (N)$ and $D\Gamma(N, \omega)$ in Theorem 4.1 by $D\Gamma(N, \omega)$ and $D\overline{\Gamma}(N, \omega')$, then (4.5) implies:

Theorem 6.1. *Two conformal metrical $\overset{c}{N}$-linear connections*

$$D\Gamma(N, \omega) = (L^{i}_{jm}, C^{i}_{(1)jm}, C^{i}_{(2)jm}, ..., C^{i}_{(k)jm})$$

and

$$D\overline{\Gamma}(N, \omega') = (\overline{L}^{i}_{jm}, \overline{C}^{i}_{(1)jm}, \overline{C}^{i}_{(2)}jm, ..., \overline{C}^{i}_{(k)jm})$$

are related as follows:

$$\begin{cases} \overline{L}^{i}_{jm} = L^{i}_{jm} - \delta^{i}_{j}\tilde{p}_m + \Omega^{ir}_{sj}X^{s}_{rm}, \\ \overline{C}^{i}_{(\alpha)jm} = C^{i}_{(\alpha)jm} - \delta^{i}_{j}\tilde{p}_{(\alpha)m} + \Omega^{ir}_{sj}Y^{s}_{(\alpha)rm}, \ \alpha = 1, 2, ..., k, \end{cases} \tag{6.1}$$

where we put $p = \omega' - \omega$.

Conservely, given the d-tensor fields $X^{i}_{jm}, Y^{i}_{(\alpha)jm}, \alpha = 1, 2, ..., k$, and given the 1-form p, $p = \tilde{p}_i dx^i + \dot{p}_{(1)i}\delta y^{(1)i} + \dot{p}_{(2)i}\delta y^{(2)i} + ... + \dot{p}_{(k)i}\delta y^{(k)i}$, the above (6.1) is thought to be a transformation of a conformal metrical $\overset{c}{N}$-linear connection $D\overline{\Gamma}(N, \omega + p)$. We shall denote this transformation by

$$t(X^i_{jm}, Y^i_{(1)jm}, Y^i_{(2)jm}, ..., Y^i_{(k)jm}, p).$$

Thus we have:

Theorem 6.2. *The set* C_N *of all transformations* $t(X^i_{jm}, Y^i_{(1)jm}, Y^i_{(2)jm}, ..., Y^i_{(k)jm}, p)$ *given by* (6.1) *is a transitive transformation group of the set of all conformal metrical* $\overset{c}{N}$*-linear connections with respect to* $\hat{g}$*, which preserve the nonlinear connection* N*, together with the mapping product:*

$$t(X'^i_{jm}, Y'^i_{(1)jm}, Y'^i_{(2)jm}, ..., Y'^i_{(k)jm}, p') \circ t(X^i_{jm}, Y^i_{(1)jm}, Y^i_{(2)jm}, ..., Y^i_{(k)jm}, p) =$$

$$= (X'^i_{jm} + X^i_{jm}, Y'^i_{(1)jm} + Y^i_{(1)jm}, Y'^i_{(2)jm} + Y^i_{(2)jm}, ..., Y'^i_{(k)jm} + Y^i_{(k)jm}, p' + p.).$$

We inquire about the subgroup of transformations of the semi-symmetric conformal metrical n-linear connections.

Let N be a given nonlinear connections. Then any semi-symmetric conformal metrical N-linear connection. $D\Gamma(N, \omega, \sigma)$ with respect to $\hat{g}$, corresponding to 1-form ω in $\chi^*(\tilde{E})$ is given by (5.2) with (5.4). Paying attention to (4.9) we have:

Theorem 6.3. *Two semi-symmetric conformal metrical* N*-linear connections* $D\Gamma(N, \omega, \sigma), D\Gamma(N, \omega', gs')$ *are related as follows:*

$$\begin{cases} \bar{L}^i_{jm} = L^i_{jm} - \delta^i_j \tilde{p}_m + 2\Omega^{ir}_{mj} \tilde{q}_r, \\ \bar{C}^i_{(\alpha)jm} = C^i_{(\alpha)jm} - \delta^i_j \dot{p}_{(\alpha)m} + 2\Omega^{ir}_{mj} \dot{q}_{(\alpha)r}, \ \alpha = 1, 2, ..., k \end{cases} \tag{6.3}$$

where we put $p = \omega' - \omega, \ q = \sigma' - \sigma - p$.

Conservely, given the 1 -forms, p, q in $\chi^*(\tilde{E})$, the above (6.3) is thought to be a transformation of a semi-symmetric conformal metrical N-linear connection $D(N, \omega, \sigma)$ to a semi-symmetric conformal matrical N-linear connection $D\overline{\Gamma}(N, \omega + p, \sigma + p + q)$. We shall denote this transformation by $t(p, q)$. Thus we have:

Theorem 6.4. *The set* C^s_N *of all transformations* $t(p, q)$ *given by (6.3) is a transformation group of the set of all conformal metricalN-linear connections with respect to* $\hat{g}$*, which preserve the nonlinear connection* N*, together with the mapping product:*

$$t(p', g') \circ t(p, q) = t(p + q, p' + q'). \tag{6.4}$$

The transformation $t : D\Gamma/D\overline{\Gamma}$ given by (6.3) is expressed by the product of the following two transformations:

$$\begin{cases} \bar{L}^i_{jm} = L^i_{jm} - \delta^i_j \tilde{p}_m, \\ \bar{C}^i_{(\alpha)jm} = C^i_{(\alpha)jm} - \delta^i_j \dot{p}_{(\alpha)m}, \ \alpha = 1, 2, ..., k \end{cases} \tag{6.5}$$

$$\begin{cases} \bar{L}^i_{jm} = L^i_{jm} + 2\Omega^{ir}_{mj} \tilde{q}_r, \\ \bar{C}^i_{(\alpha)jm} = C^i_{(\alpha)jm} + 2\Omega^{ir}_{mj} \dot{q}_{(\alpha)r}, \ \alpha = 1, 2, ..., k \end{cases} \tag{6.6}$$

Theorem 6.5. *The group C^s_N is the direct product of the group C^p_N of all transformations (6.5) and the group C^m_N of all transformations (6.6).*

We must determine the invariants of the group C^s_N.

References

[1] Matsumoto M., *The theory of Finsler connections,* Publ. Study Group Geom. 5, Depart. Math., Okayama Univ., 1970, XV-220 pp.

[2] Miron R., *The Geometry of Higher-order Lagrange spaces. Applications in Mechanics and Physics,* Kluwer Academic Publishers, FTPH82, 1997.

[3] Miron R. and Atanasiu Gh., *Differential Geometry of the k-osculator bundle,* Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 41, 3/4 (1996), 205-236.

[4] Miron R. and Atanasiu Gh., *Prolongation of Riemannian, Finslerian and Lagrangian structures*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 41, 3/4 (1996), 237-249.

[5] Miron R. and Atanasiu Gh., *Hinger - order spaces,* Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 41, 3/4 (1996), 251-262.

[6] Miron R. and Atanasiu Gh., *Compendium sur les espaces Lagrange d'ordre supérieur,* Seminarul de Mecanică 40, Univ. Timişoara, 1994.

[7] Miron R. and Hashiguchi M., *Metrical Finsler Connections,* Fac. Sci., Kagoshima Univ. (Mah., Phys. &Chem.) 12 (1979), 21-35.

[8] Miron R. and Hashiguchi M., *Conformal Finsler Connections,* Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 26, 6 (1981), 861-878.

[9] Purcaru M., *General N-linear Connections Compatible with the Metrical d-Structure in the Bundle of Accelerations,* Mathematica, Tome 40 (63), No. 2, 1998, 277-284.

[10] Purcaru M., *Conformal Metrical N-linear Connections in the Lagrange Geometry of Second Order,* Mathematica, Cluj-Napoca (to appear).

[11] Purcaru M., *Conformal Structures in the Lagrange Geometry of Second Order,* Studia, Cluj-Napoca (to appear).

[12] Purcaru M., Stoica E., *Semi-Symmetric Metrical N-linear Connections in the k-osculator Bundle,* Proc. of the Workshop on Lie Algebra, Global Analysis and Differential Geometry, Salonic, 1999 (to appear).

„Transilvania" University,
Department of Geometry,
Iuliu Maniu 50,
2200 Braşov ,
Romania
e-mail: mpurcaru@unitbv.ro

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 133–140

ON CONVERGENCE IN HÖLDER SPACES OF SPLIN-COLLOCATION AND SPLIN CUADRATURES METHODS FOR SOLVING WEAKLY-SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF SECOND ORDER

Vladimir Racu

Algorithmic implementation of collocation, quadratures, splin-collocation and splin-cuadratures methods for solving weakly-singular integral equations (WSIE) of second order leads to necessity of concrete evaluation of Fredholm and Volterra weakly-singular integral operators(WSIO) and their modifications appearing in algorithm applications. We mention, that in N.Mushelishvili's and S.Mihlin's works only the existence of indicated constants is proved, but this fact does not permit the realization of numerical algorithms.

At first in this work concrete values of constants majoring Fredholm and Volterra WSIO are estimated in dependence of their modifications in directly-approximate methods for solving WSIE of second order given in Hölder spaces $H_\alpha[a,b]$, $0 < \alpha \leq 1$. Then we give the conditions of convergence of splin-collocation and splin-quadratures methods for solving WSIE of second order.

Thus the Hölder spaces are inseparable Banach spaces, that is why the classic algorithms developed by Kantorovici and Gohberg can not be applied in our case.

1. WSIO and their estimations

Lemma 1. *Let the function $h(t,s) \in H_{\alpha,\alpha}[a,b]$, $0 < \alpha \leq 1$. Then for any bounded and integrable function $\varphi(t)$ $(t \in [a,b])$, the function*

$$G(t) = \int_a^b \frac{h(t,s)}{|t-s|^\gamma}\varphi(s)ds \in H_\theta[a,b], \quad 0 < \gamma < 1, \quad \theta = min(\alpha; 1-\gamma),$$

with H¨older constant

$$H(G(t);\theta) \le c_1 \stackrel{def}{\equiv} \|\varphi\|_c \cdot max\{\|h\|_c \frac{2(2^\gamma - 1)}{1-\gamma}; H^t(h;\alpha)\frac{2(b-a)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\}.$$

Let us define the next modification

$$K_\rho(t,s) = \begin{cases} \dfrac{h(t,s)}{|t-s|^\gamma}, & |t-s| \ge \rho, \quad 0<\gamma<1 \\ \dfrac{h(t,s)}{\rho^\gamma}, & |t-s|<\rho, \quad \rho << min\{b-a;1\}. \end{cases}$$

For Fredholm and Volterra WSIO we get

Lemma 2. *Assume that* $h(t,s) \in H_{\alpha,\alpha}[a,b]; \psi(t) \in H_\alpha[a,b]; \quad 0<\gamma<1.$ *Then functions*

$$\chi_\rho(t) = \int_a^b [\frac{h(t,s)}{|t-s|^\gamma} - K_\rho(t,s)] \cdot \psi(s)ds, \quad \tilde{\chi}_\rho(t) = \int_a^t [\frac{h(t,s)}{|t-s|^\gamma} - K_\rho(t,s)] \cdot \psi(s)ds,$$

$$a < t \le b,$$

$$\eta_\rho(t) = \int_a^b K_\rho(t,s) \cdot \psi(s)ds, \quad \tilde{\eta}_\rho(t) = \int_a^t K_\rho(t,s)\cdot\psi(s)ds$$

verify the relations:

$$|\chi_\rho(t)| \le d_1\rho^{1-\gamma}\|\psi\|_c, \quad |\tilde{\chi}_\rho(t)| \le \frac{1}{2}d_1\rho^{1-\gamma}\|\psi\|_c, \quad d_1 = \frac{2\gamma}{1-\gamma}\|h\|_c;$$

$$|\eta_\rho(t)| \le (d_2 - d_1\rho^{1-\gamma})\|\psi\|_c, \quad |\tilde{\eta}_\rho(t)| \le (\frac{1}{2}d_2 - d_1\rho^{1-\gamma})\|\psi\|_c,$$

$$d_2 = \frac{2(b-a)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\|h\|_c;$$

$\chi_\rho(t), \quad \tilde{\chi}_\rho(t) \in H_\theta[a,b], \quad \theta = \min(\alpha; 1-\gamma)$ *with the H¨older constant*

$$H(\chi_\rho(t);\theta) \le c_2 \stackrel{def}{\equiv} (d_3\rho^{1-\gamma-\theta} + d_4\rho^{1-\gamma})\|\psi\|_c, \quad H(\tilde{\chi}_\rho(t);\theta) \le c_2,$$

where $d_3 = \frac{1}{1-\gamma}2^{3-\gamma-\theta}\|h\|_c, \quad d_4 = 4\frac{2-\gamma}{1-\gamma}\max\{2^{\alpha-\theta}; (b-a)^{\alpha-\theta}\}H^t(h;\alpha);$

$\eta_\rho(t), \tilde{\eta}_\rho(t) \in H_\theta[a,b]$ *with H¨older's constant*

$$H(\eta_\rho(t);\theta) \le c_3 \stackrel{def}{\equiv} (d_5 + d_6\rho^{1-\gamma})\|\psi\|_c, \quad H(\tilde{\eta}_\rho(t);\theta) \le c_3,$$

where

$$d_5 = \max\{||h||_c \frac{2(2^\gamma - 1)}{1-\gamma}; H^t(h;\alpha)\frac{2(b-a)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\},$$

$$d_6 = 4(b-a)^{\alpha-\theta} H^t(h;\alpha).$$

2. Convergence of splin-collocation method for WSIE of second order

Let us consider Fredholm WSIE

$$(A\varphi \equiv)\varphi(t) - \lambda \int_a^b \frac{h(t,s)}{|t-s|^\gamma}\varphi(s)ds = f(t), \quad t \in [a,b] \tag{1}$$

and Volterra WSIE

$$(B\varphi \equiv)\varphi(t) - \lambda \int_a^t \frac{h(t,s)}{|t-s|^\gamma}\varphi(s)ds = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{2}$$

where $f(t) \in H_\alpha[a,b]$, $h(t,s) \in H_{\alpha,\alpha}[a,b]$, $\varphi(t)$ is an unknown function.

We will look for approximate solutions of equations (1) and (2) in the form

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n+1} c_k \psi_k(t), \tag{3}$$

where $c_k, k = \overline{1, n+1}$ are unknown coefficients, $n \in N$ and $\psi_k(t)$ are basic splins of the first order. The coefficients c_k will be established by splin-collocation method from the system of linear equations (SLE)

$$c_j - \lambda \sum_{k=1}^{n+1} a_{jk}^F \cdot c_k = f_j, \quad j = \overline{1, n+1} - for\ Fredholm\ WSIE \tag{4}$$

and from SLE

$$c_j - \lambda \sum_{k=1}^{j} a_{jk}^V \cdot c_k = f_j, \quad j = \overline{1, n+1} - for\ Volterra\ WSIE, \tag{5}$$

where

$$t_j = a + (j-1)\frac{b-a}{n}, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad n \in N, \tag{6}$$

$$f_j = f(t_j), \quad a_{jk}^F = \int_a^b K_\rho(t_j, s)\psi_k(s)ds, \quad a_{jk}^V = \int_a^{t_j} K_\rho(t_j, s)\psi_k(s)ds,$$

$$j, k = \overline{1, n+1}.$$

Theorem 1. *Let the following conditions be verified:*

1) *the operator A is inversible in space $H_\beta[a, b_{\rm j}, 0 < \beta < 1$;*
2) *the function $f(t) \in H_\alpha[a, b]$ and nucleus $h(t, s) \in H_{\alpha,\alpha}[a, b]$, $0 < \beta < \alpha \leq 1$;*
3) *the points $t_j (j = \overline{1, n+1})$ are calculated by formula (6);*
4) *the parameter ρ is sufficiently small such that the following is verified*

$$\|A^{-1}\|_\beta((d_1 + d_7)\rho^{1-\gamma} + d_8\rho^{1-\gamma-\beta}) \leq q < 1, \quad 0 < \gamma < 1,$$

$$\beta < \theta = \min(\alpha; 1 - \gamma),$$

where

$$d_7 = 4\frac{2-\gamma}{1-\gamma}\max\{2^{\alpha-\beta}; (b-a)^{\alpha-\beta}\}H^t(h; \alpha),$$

$$d_8 = \frac{1}{1-\gamma}2^{3-\gamma-\beta}\|h\|_c;$$

5) *n is a sufficiently large number ($n \in N$) such that the following inequality holds*

$$\frac{\|A^{-1}\|_\beta}{1-q}\frac{d_9}{n^{\theta-\beta}}(d_5 + d_6\rho^{1-\gamma}) \leq q_1 < 1,$$

where $d_9 = (b-a)^\alpha + 3(b-a)^{\alpha-\beta}$.

Then:

a) *SLE (4) is uniquely compatible, therefore a unique solution $\{c_k\}_{k=1}^{n+1}$ exists;*

b) *the approximate solution (3) $\varphi_n^{(\rho)}(t)$ converges to exact solution $\varphi(t)$ of Fredholm WSIE (1), that is*

$$\|\varphi - \varphi_n^{(\rho)}\|_\beta \to 0, \quad \rho \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall f(t) \in H_\alpha[a, b];$$

c) *the error of approximate solution* $\varphi_n^{(\rho)}(t)$ *is estimated by relation*

$$\|\varphi - \varphi_n^{(\rho)}\|_\beta \leq \frac{\|A^{-1}\|_\beta^2}{1-q}((d_1 + d_7)\rho^{1-\gamma} + d_8\rho^{1-\gamma-\beta})\|f\|_\beta +$$

$$+\frac{\|A^{-1}\|_\beta}{1-q}\cdot\frac{d_9}{n^{\alpha-\beta}}H(f;\alpha)+\frac{1}{(1-q)^2}\ \frac{\|A^{-1}\|_\beta^2}{1-q_1}\cdot\frac{d_9\cdot d_{10}(d_5+d_6\rho^{1-\gamma})}{n^{\theta-\beta}}\|f\|_\beta$$

$$\stackrel{def}{\equiv} R^F_{\rho,n},$$

where $d_{10} = 4 + (b-a)^\beta$.

Theorem 2. *Let the following conditions be satisfied:*

1) $0 < \beta < \alpha \leq 1$;

2) *the conditions 2) - 3) from Theorem 1 are verified;*

3) *the parameter* ρ *is sufficiently small such that the inequality is fulfilled*

$$\|B^{-1}\|_\beta((\frac{1}{2}d_1 + d_7)\rho^{1-\gamma} + d_8\rho^{1-\gamma-\beta}) \leq q_2 < 1;$$

4) n *is a sufficiently large natural number such that the following inequality is satisfied*

$$\frac{\|B^{-1}\|_\beta}{1-q_2}\cdot\frac{d_9}{n^{\theta-\beta}}(d_5 + d_6\rho^{1-\gamma}) \leq q_3 < 1, \quad \beta < \theta = \min(\alpha; 1-\gamma).$$

Then:

a) *SLE (5) is uniquely compatible and therefore there exists a unique solution* $\{c_k\}_{k=1}^{n+1}$;

b) *the approximate solution (3)* $\tilde\varphi_n^{(\rho)}(t)$ *converges to exact solution* $\tilde\varphi(t)$ *of Volterra WSIE (2), that is*

$$\|\tilde\varphi - \tilde\varphi_n^{(\rho)}\|_\beta \to 0, \quad \rho \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall f(t) \in H_\alpha[a,b];$$

c) *the error of approximate solution* $\tilde{\varphi}_n^{(\rho)}(t)$ *is estimated by relation*

$$\|\tilde{\varphi}-\tilde{\varphi}_n^{(\rho)}\|_\beta \le \frac{\|B^{-1}\|_\beta^2}{1-q_2}((\frac{1}{2}d_1+d_7)\rho^{1-\gamma}+d_8\rho^{1-\gamma-\beta})\|f\|_\beta+$$

$$+\frac{\|B^{-1}\|_\beta}{1-q_2}\cdot\frac{d_9}{n^{\alpha-\beta}}H(f;\alpha)+\frac{\|B^{-1}\|_\beta^2}{(1-q_2)^2(1-q_3)}\cdot\frac{d_9\cdot d_{10}}{n^{\theta-\beta}}(d_5+d_6\rho^{1-\gamma})\|f\|_\beta \stackrel{def}{\equiv}$$

$$\stackrel{def}{\equiv} R_{\rho,n}^V.$$

3. Convergence of splin-quadratures method for WSIE of order II

The coefficients c_k from (3) will be obtained by splin-quadratures method from the following SLE:

$$c_j-\lambda\sum_{k=1}^{n+1}c_kd_kK_\rho(t_j,t_k)=f_j,\quad j=\overline{1,n+1}-for\ Fredholm\ WSIE, \tag{7}$$

where $d_k=\dfrac{b-a}{n},\quad k=\overline{2,n}$ and $d_k=\dfrac{b-a}{2n},\quad k=1;n+1;$

$$c_j-\lambda\sum_{k=1}^{j}c_kr_kK_\rho(t_j,t_k)=f_j,\quad j=\overline{1,n+1}-for\ Volterra\ WSIE, \tag{8}$$

where $r_k=\dfrac{b-a}{n},\quad k=\overline{2,j-1}$ and $r_k=\dfrac{b-a}{2n},\quad k=1;j.$

Establish further the conditions of convergence of splin-quadratures method for Fredholm and WSIE and SLE.

Theorem 3. *Let the following conditions be satisfied:*

1) *the conditions 1) - 5) from Theorem 1 are satisfied;*

2) *n is a natural number such that the inequality*

$$\frac{\|A^{-1}\|_\beta}{(1-q)(1-q_1)}\cdot\frac{|\lambda|d_9\cdot d_{10}(b-a)}{n^{\theta-\beta}}H^s(K_\rho;\theta)\le q_4\le 1$$

is true.

Then:

a) *SLE (7) is uniquely compatible, therefore there exists a unique solution* $\{c_k\}_{k=1}^{n+1}$;

b) *the approximate solution* $\xi_n^{(\rho)}(t)$ *converges to exact solution* $\varphi(t)$ *of Fredhol WSIE (1), that is*

$$\|\varphi - \xi_n^{(\rho)}\|_\beta \to 0, \quad \rho \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall f(t) \in H_\alpha[a,b];$$

c) *the error of approximate solution* $\xi_n^{(\rho)}(t)$ *is estimated by relation*

$$\|\varphi-\xi_n^{(\rho)}\|_\beta \leq R_{n,\rho}^F + \frac{\|A^{-1}\|_\beta^2}{(1-q)^2(1-q_1)^2(1-q_4)} \cdot \frac{|\lambda| d_9 \cdot d_{10}^2(b-a)}{n^{\theta-\beta}} H^s(K_\rho;\theta)$$

Theorem 4. *Let:*

1) *the conditions 1) - 4) of Theorem 2 be satisfied;*

2) *the natural number* n *verifies the inequality*

$$\frac{\|B^{-1}\|_\beta}{(1-q_2)(1-q_3)} \cdot \frac{|\lambda| d_9 \cdot d_{10}(b-a)}{n^{\theta-\beta}} H^s(K_\rho;\theta) \leq q_5 < 1.$$

Then:

a) *SLE (8) is uniquely compatible, therefore there exists a unique solution* $\{c_k\}_{k=1}^{n+1}$;

b) *the approximate solution* $\tilde{\xi}_n^{(\rho)}(t)$ *converges to exact solution* $\tilde{\varphi}(t)$ *of Volterr WSIE (2), that is*

$$\|\tilde{\varphi} - \tilde{\xi}_n^{(\rho)}\|_\beta \to 0, \quad \rho \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall f(t) \in H_\alpha[a,b];$$

c) *the error of approximate solution* $\tilde{\xi}_n^{(\rho)}(t)$ *is estimated by following relation*

$$\|\tilde{\varphi}-\tilde{\xi}_n^{(\rho)}\|_\beta \leq R_{\rho,n}^V + \frac{\|B^{-1}\|_\beta^2}{(1-q_2)^2(1-q_3)^2(1-q_5)} \cdot \frac{|\lambda| d_9 \cdot d_{10}^2(b-a)}{n^{\theta-\beta}} H^s(K_\rho;\theta$$

Co-Operative Comercial University of Moldova

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 141–146

FOLOSIREA UNOR IDENTITĂŢI ŞI INEGALI TĂŢI ÎN PROBLEME DE COMBINATORICĂ

Diana Savin

Abstract

Sunt date aplicaţii ale următoarelor identităţi combinatoriale:

1. $\sum_{k=0}^{p} C_m^k \cdot C_n^{p-k} = C_{m+n}^p$,
2. $\sum_{k=r}^{n} C_n^k \cdot C_k^r = C_n^r \cdot 2^{n-r}$,
3. $\sum_{k=0}^{n} C_{m+k}^k \cdot 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^k \cdot 2^{m-k} = 2^{m+n+1}$,
   identitatea lui Banach.

1. Preliminarii

Pentru început vom demonstra cele trei identităţi menţionate.

Propoziţie

1. $\sum_{k=0}^{p} C_m^k \cdot C_n^{p-k} = C_{m+n}^p$,

2. $\sum_{k=r}^{n} C_n^k \cdot C_k^r = C_n^r \cdot 2^{n-r}$.

3. $\sum_{k=0}^{n} C_{m+k}^k \cdot 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^k \cdot 2^{m-k} = 2^{m+n+1}$.

Demonstraţie

1). Se porneşte de la egalitatea: $(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$, pentru orice m, n numere naturale şi diferite de zero. Identificând coeficienţii lui x^p din ambii membri, se obţine:

$$C_m^0 \cdot C_n^p + C_m^1 \cdot C_n^{p-1} + \ldots + C_m^p \cdot C_n^0 = C_{m+n}^p \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} C_m^k \cdot C_n^{p-k} = C_{m+n}^p.$$

2). $\sum\limits_{k=r}^{n} C_n^k \cdot C_k^r = \sum\limits_{k=r}^{n} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{k!}{r!\cdot(k-r)!} = \sum\limits_{k=r}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{r!\cdot(k-r)!} = \sum\limits_{k=r}^{n} \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}\cdot \frac{(n-r)!}{(n-k)!\cdot(k-r)!} = \sum\limits_{k=r}^{n} C_n^r \cdot C_{n-r}^{n-k} = C_n^r \cdot \left(C_{n-r}^{n-r} + \ldots + C_{n-r}^1 + C_{n-r}^0\right) = C_n^r \cdot 2^{n-r}$.

3). Considerăm mulţimea tuturor cuvintelor w peste alfabetul $\{0,1\}$ de lungime $m+n+1$. Numărul lor este 2^{m+n+1}. Există două cazuri: **1.** sunt cel puţin $m+1$ apariţii ale lui 0, sau **2.** sunt cel puţin $n+1$ apariţii ale lui 1. Se observă că aceste două cazuri nu se pot produce simultan.

m de 0şi k de 1 — al $(m+1)$−lea 0

Cazul 1 : $0 \le k \le n$, $- - - - - - - -$ | $- - - - - -$

poziţia $m+1+k$

Pentru un k fixat vrem să vedem câte cuvinte de lungime $m+n+1$ au al $(m+1)$-lea 0 pe poziţia $m+1+k$. Sunt C_{m+k}^k moduri de a selecta 1−uri din faţa celui de-al $(m+1)$ −lea 0. $(m+n+1)-(m+1+k) = n-k$. Deci numărul de cuvinte cerute este $C_{m+k}^k \cdot 2^{n-k}$ pentru k fixat. În total $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{m+k}^k \cdot 2^{n-k}$ este numărul de cuvinte w peste alfabetul $\{0,1\}$ de lungime $m+n+1$ cu cel puţin $m+1$ de 0.

Analog se tratează **cazul 2** şi se obţine $\sum\limits_{k=0}^{m} C_{n+k}^k \cdot 2^{m-k}$ este numărul de cuvinte w peste alfabetul $\{0,1\}$ de lungime $m+n+1$ cu cel puţin $n+1$ de 1.

În concluzie numărul total de cuvinte este

$$\sum_{k=0}^{n} C_{m+k}^k \cdot 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^k \cdot 2^{m-k}.$$

□

2. Aplicaţii

Aplicaţia 1. Să se demonstreze ca, pentru oricare n număr natural, $n \ge 2$, are loc inegalitatea:

$$\left[\sum_{k=0}^{n} \left(C_{2\cdot n}^k\right)^3\right] \cdot \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \sqrt{C_n^k}\right]^2 \ge \left(C_{3\cdot n}^n\right)^3,$$

(autor Diana Savin, publicată in revista "Octogon", aprilie 1999).

Demonstraţie.

Fixând $m = 2 \cdot n$ si $p = n$în prima identitate, se obţine:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2\cdot n}^{k} \cdot C_{n}^{n-k} = C_{3\cdot n}^{n} \Leftrightarrow C_{3\cdot n}^{n} = C_{2\cdot n}^{0} \cdot C_{n}^{n} + C_{2\cdot n}^{1} \cdot C_{n}^{n-1} + ... + C_{2\cdot n}^{n} \cdot C_{n}^{0}.$$

Inegalitatea de demonstrat devine:

$$\left[\left(C_{2\cdot n}^{0}\right)^{3} + ... + \left(C_{2\cdot n}^{n}\right)^{3}\right] \cdot \left[\left(C_{n}^{0}\right)^{\frac{3}{2}} + ... + \left(C_{n}^{n}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{2} \geq$$

$$\geq \left(C_{2\cdot n}^{0} \cdot C_{n}^{n} + C_{2\cdot n}^{1} \cdot C_{n}^{n-1} + ... + C_{2\cdot n}^{n} \cdot C_{n}^{0}\right)^{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(C_{2\cdot n}^{0}\right)^{3} + ... + \left(C_{2\cdot n}^{n}\right)^{3}\right]^{\frac{1}{3}} \cdot \left[\left(C_{n}^{0}\right)^{\frac{3}{2}} + ... + \left(C_{n}^{n}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}} \geq$$

$$\geq \left(C_{2\cdot n}^{0} \cdot C_{n}^{n} + C_{2\cdot n}^{1} \cdot C_{n}^{n-1} + ... + C_{2\cdot n}^{n} \cdot C_{n}^{0}\right).$$

Aplicând inegalitatea lui Hölder pentru numerele $a_1 = C_{2\cdot n}^{0}, ..., a_n = C_{2\cdot n}^{n}$ si $b_1 = C_{n}^{0}, ..., b_n = C_{n}^{n}$, $p = 3$, $q = \frac{3}{2}$ $\left(\text{se observă că } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, va rezulta inegalitatea, mai sus scrisă, ca adevarată. □

Aplicaţia 2. Să se arate că, pentru oricare numere naturale $n \neq 0$, $r \neq 0$, $r < n$, are loc inegalitatea:

$$\left[\left(C_{n}^{r}\right)^{2} + \left(C_{n}^{r+1}\right)^{2} + ... + \left(C_{n}^{n}\right)^{2}\right] \cdot \left[\left(C_{r}^{r}\right)^{2} + \left(C_{r+1}^{r}\right)^{2} ... + \left(C_{n}^{r}\right)^{2}\right] > n^{2} \cdot (n-r)^{2}$$

(autor Diana Savin).

Demonstraţie.

Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski, se obţine:

$$\left[\left(C_{n}^{r}\right)^{2} + \left(C_{n}^{r+1}\right)^{2} + ... + \left(C_{n}^{n}\right)^{2}\right] \cdot \left[\left(C_{r}^{r}\right)^{2} + \left(C_{r+1}^{r}\right)^{2} ... + \left(C_{n}^{r}\right)^{2}\right] >^{(*)}$$

$$\left(C_{n}^{r} \cdot C_{r}^{r} + C_{n}^{r+1} \cdot C_{r+1}^{r} + ... + C_{n}^{n} \cdot C_{n}^{r}\right)^{2}$$

(*numerele nefiind proporţionale, egalitatea nu se poate realiza)

$= \left(\sum\limits_{k=r}^{n} C_{n}^{k} \cdot C_{k}^{r}\right)^{2} =^{(*)} \left(C_{n}^{r} \cdot 2^{n-r}\right)^{2}$ (* s-a folosit a doua identitate) $=$
$= \left(C_{n}^{r}\right)^{2} \cdot \left(2^{n-r}\right)^{2}$ (1).

Se demonstrează prin inducţie după n, că $2^{n} \geq n$, pentru oricare $n \geq 1$ ceea ce implică $n - r$, pentru oricare numere naturale $n \neq 0$, $r \neq 0$, $r < n$. (2).

Oricare numere naturale $n \neq 0$, $r \neq 0$, $r < n$ avem:

$$C_n^r \geq C_n^1 \Leftrightarrow C_n^r \geq n \ (3).$$

Din (1), (2), (3), rezultă

$$\left[(C_n^r)^2 + \left(C_n^{r+1}\right)^2 + ... + (C_n^n)^2\right] \cdot \left[(C_r^r)^2 + \left(C_{r+1}^r\right)^2 + ... + (C_n^r)^2\right] > n^2 \cdot (n-r)^2 . \ \square$$

Aplicaţia 3. Să se arate că, pentru oricare n număr natural, diferit de zero, are loc inegalitatea:

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_{n+1}^1\right)^2 + ... + \left(C_{2n}^n\right)^2 \geq \frac{5 \cdot 4^n + 1}{3}$$

(autor Diana Savin).

Demonstraţie:

Pentru început, observăm că $\frac{5 \cdot 4^n + 1}{3}$ este un număr natural nenul.

Într-adevar

$$4 \equiv 1 \,(\text{mod } 3) \Rightarrow 4^n \equiv 1 \,(\text{mod } 3) \Rightarrow 5 \cdot 4^n \equiv 2 \,(\text{mod } 3) \Rightarrow 5 \cdot 4^n + 1 \equiv 0 \,(\text{mod } 3).$$

Considerand, in identitatea lui Banach, $m = n$, obţinem

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+k}^k \cdot 2^{n-k} = 2^{2 \cdot n}.$$

Aplicand inegalitatea mediilor fiecărui termen al sumei rezultă:

$$C_n^0 \cdot 2^n \leq \frac{\left(C_n^0\right)^2 + 2^{2 \cdot n}}{2}, C_{n+1}^1 \cdot 2^{n-1} \leq \frac{\left(C_{n+1}^1\right)^2 + 2^{2 \cdot n - 2}}{2}, ..., C_{2 \cdot n-1}^{n-1} \cdot 2 \leq$$

$$\leq \frac{\left(C_{2 \cdot n-1}^{n-1}\right)^2 + 2^2}{2}, C_{2 \cdot n}^n \cdot 1 \leq \frac{\left(C_{2 \cdot n}^n\right)^2 + 1}{2}.$$

Însumând cele $n+1$ inegalităţi se obţine:

$$C_n^0 \cdot 2^n + C_{n+1}^1 \cdot 2^{n-1} + ... + C_{2n-1}^{n-1} \cdot 2 + C_{2 \cdot n}^n \leq \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot \left(1 + 2^2 + ... + 2^{2 \cdot n} + \left(C_n^0\right)^2 + ... + \left(C_{2 \cdot n}^n\right)^2\right) \Leftrightarrow 4^n \leq \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{2^{2 \cdot n} - 1}{3} + \left(C_n^0\right)^2 + ... + \left(C_{2 \cdot n}^n\right)^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5 \cdot 4^n + 1}{3} \leq \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_{n+1}^1\right)^2 + ... + \left(C_{2n-1}^{n-1}\right)^2 . \ \square$$

Bibliografie

1. S. Buzeţeanu, *Curs de combinatorică şi teoria grafurilor*, Univ. Bucureşt 1993.

2. D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Analytic Inequalities,* Springer Verlag Berlin, Heidelberg, 1970.

3. ***-Octogon, aprilie, 1999.

Colegiul Naţional ,,Dr. Ioan Meşotă",
2200- Braşov,
Romania

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 147–150

ON REDUCTION METHOD FOR SOLVING NONLINEAR SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS AND THEIR SYSTEM

Vladislav Seiciuc

Let Γ be the unitary circumference in the complex plane and containing the point $t = 0$. In the Hölder space $H_\beta(\Gamma)$, $0 < \beta < 1$ we consider a nonlinear singular integral equation (SIE)

$$A(\varphi) \equiv \Phi[t; \varphi(t); S_\tau h(t, \tau; \varphi(\tau))] = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{1}$$

where $\Phi[t; u; v], h(t, \tau; u)$ $(t, \tau \in \Gamma; |u|, |v| < \infty)$ and $f(t)$ are known continuous functions of their arguments, S_τ is the singular integral operator defined in the meaning of Cauchy principal value and $\varphi(t)$ is an unknown function.

In this paper we propose a computing scheme of reduction method for solving nonlinear SIE (1) and by using the results of [1–4] we give convergence conditions of reduction method in the Hölder space $H_\beta(\Gamma)$.

It should be mentioned that in comparison with the works [1–4], here we investigate the case when: 1) the solution $\varphi(t)$ of the SIE (1) belongs to the space $H_\alpha^r(\Gamma)$, $0 < \beta < \alpha \leq 1$, $r = 0, 1, \ldots$, i.e. it is r-th times differentiable and $\varphi^{(r)}(t) \in H_\alpha(\Gamma)$; 2) the conditions on functions $\Phi[t; u; v]$ and $h(t, \tau; u)$ are formulated more precisely. In consequence the convergence in the Hölder space $H_\beta(\Gamma)$ of approximate solutions $\varphi_n(t)$ to exact solution $\varphi(t)$ of SIE (1) is more exactly estimated and contain $\ln n$ of the first order.

We seek for approximate solution of nonlinear SIE (1) as a polynomial

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k t^k, \quad t \in \Gamma, \tag{2}$$

where for reduction method the unknown coefficients c_k $(k = \overline{-n, n})$ will be determined from the system of nonlinear equations (SNE)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \Phi[t; \varphi_n(t);\ S_\tau h(t, \tau; \varphi_n(\tau))] \cdot t^{-j-1} dt = f_j, \quad j = \overline{-n, n}, \tag{3}$$

where $\{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ are the Fourier's coefficients of the function $f(t)$.

Theorem. *Let the following conditions be fulfilled:*

1) $\Phi''_{u^2}[t;u;v]$, $\Phi''_{v^2}[t;u;v]$, $\Phi''_{uv}[t;u;v] \in H_{\alpha;1;1}(\Gamma)$; $h''_{u^2}(t,\tau;u) \in H_{\mu;\alpha;1}(\Gamma)$, $(0 < \alpha \leq \mu \leq 1)$;

2) *the nonlinear SIE (1) in some sphere of the svace* $H_\beta(\Gamma)$ $(0 < \beta < \alpha \leq 1)$ *has a unique solution* $\varphi(t) \in H_\alpha^r(\Gamma), r = 0, 1, ...$;

3) $c_\varphi^2(t) - d_\varphi^2(t) = 0$ $(t \in \Gamma)$, $ind(c_\varphi(t) + d_\varphi(t)) = ind(c_\varphi(t) - d_\varphi(t)) = 0$ $(t \in \Gamma)$, *where*

$$c_\varphi(t) = \Phi'_u[t;\varphi(t);S_\tau h(t,\tau;\varphi(\tau))] \in H^r_{\alpha;1;1}(\Gamma), \quad r = 2,3,\ldots,$$

$$d_\varphi(t) = \Phi'_v[t;\varphi(t);S_\tau h(t,\tau;\varphi(\tau))] \cdot h'_u[t,t;\varphi(t)] \in H^r_{\alpha;1;1}(\Gamma), t \in \Gamma,$$
$$r = 2,3,\ldots;$$

4) $dimKerA'(\varphi) = 0$, *where* A' *is the Freshet's derivative of operator* A, *defined in the following way:* $\forall \varphi^o(t), g(t) \in H_\beta(\Gamma)$,

$$(A'(\varphi^o)g)(t) \equiv \Phi'_u[t;\varphi^o(t);S_\tau h(t,\tau;\varphi^o(\tau))]g(t)+$$

$$+\Phi'_v[t;\varphi^o(t);S_\tau h(t,\tau;\varphi^o(\tau))] \cdot S_\tau[h'_u(t,\tau;\varphi^o(\tau))g(\tau)] =$$

$$= c_{\varphi^o}(t)g(t) + d_{\varphi^o}(t)S_\tau g(\tau)+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Phi'_v[t;\varphi^o(t);S_\tau h(t,\tau;\varphi^o(\tau))]\frac{h'_u(t,\tau;\varphi^o(\tau)) - h'_u(t,t;\varphi^o(t))}{\tau - t}g(\tau)d\tau.$$

Then there exists a $(2n+1)$ dimensional point $\{z_k\}_{k=-n}^{n}$ (z_k is the k-th Fourier's coefficient of the best uniform approximation polynomial for exact solution $\varphi(t)$) in a neighbourhood of which SNE (3) has a unique solution $\{c_k\}_{k=-n}^{n}$ for all n beginning with a certain one. The approximate solutions (2) converge in the space $H_\beta(\Gamma)$ to exact solution $\varphi(t)$ of nonlinear SIE (1) as $n \to \infty$ for any function $f(t) \in H_\alpha^r(\Gamma)$, $r = 0, 1, \ldots$.

The rate of convergence for approximate solutions $\varphi_n(t)$ is estimated by relation

$$\| \varphi - \varphi_n \|_\beta = O(n^{-r-\sigma(\alpha)+\beta} \cdot \ln n)H(\varphi^{(r)};\sigma(\alpha)),$$

where $\sigma(\alpha) = \alpha$, if $0 < \alpha < 1$ and $\sigma(\alpha) = \alpha - \epsilon$ $(\forall \epsilon > 0)$ if $\alpha = 1$.

The similar results can be formulated for systems of nonlinear SIE. For their proof we use the same scheme as for a single equation taking into account the factorization of the matrix-valued functions $c_\varphi(t) + d_\varphi(t)$ and $c_\varphi(t) - d_\varphi(t)$, as well the conditions imposed on the right and on the left indexes of factorized matrices.

References

[1] Gabdulhaev B.G., Gorlov V.E., *Solving nonlinear singular integral equations by reduction method,* Izv. vuzov., Matem., 1976, no.2, pp.3-13 (Russian).

[2] Gabdulhaev B.G., *The approximation in the H-spaces and applications,* Dokl. AN. SSSR. t. 223, no.6, 1975, pp. 1293–1296 (Russian).

[3] Zolotarevschi V.A., Seichiuc V.N., *Redaction method for solving the system of nonlinear singular integral equations*, Izvestia vuzov. Matem., 1980, no. 7, pp. 79–82 (Russian).

[4] Zolotarevschi V.A., Seichiuc V.N., *On redaction method for solving the system of linear and nonlinear singular integrodiferential equations,* Issledovania po cislennîm metodam i teoreticescoi kibernetike. Chişinev: Ştiinţa, 1985, pp. 55–62 (Russian).

Co-Operative Commercial University,
Chişinău,
Moldova
e-mail: seiciuc@uccm.moldnet.md

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 151–160

PROPRIETĂŢI ALE POLINOAMELOR FUNDAMENTALE DE INTERPOLARE PENTRU O NOUĂ SCHEMĂ DE INTERPOLARE MULTIDIMENSIONALĂ

Dana Simian

Rezumat

În articol sunt prezentate şi demonstrate mai multe proprietăţi ale polinoamelor fundamentale de interpolare, ale operatorului de interpolare şi operatorului dual acestuia, pentru o nouă schemă de interpolare introdusă de A. Ron şi C. de Boor.
Cuvinte cheie: schemă de interpolare, polinoame fundamentale de interpolare, termen iniţial, produs scalar.

1. Introducere

Interpolarea polinomială multidimensională prezintă un mare interes datorită numeroaselor sale aplicaţii practice (construirea suprafeţelor acoperiş, inver sarea transformatei Radon, aplicaţii în economie, medicină, ecologie, mecanica fluidelor, metoda elementului finit, etc.). Problema principală care se pune în cazul interpolării multidimensionale este aceea a determinării unui spaţiu de polinoame multidimensionale, $\mathcal{P}$, interpolator pentru o mulţime dată de puncte, $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$, adică un spaţiu ce are proprietatea că pentru o funcţie g arbitrară, definită cel puţin pe Θ, există un unic polinom $p \in \mathcal{P}$ astfel încât $p|_\Theta = g|_\Theta$. Spunem în acest caz că perechea $< \mathcal{P}, \Theta >$ este corectă. Dificultatea cu care se confruntă interpolarea polinomială multidimensională este dată de faptul că dimensiunea spaţiilor de polinoame de mai multe variabile nu acoperă în întregime mulţimea numerelor naturale, respectiv

$$\Pi_k(R^d) = \begin{pmatrix} k+d \\ d \end{pmatrix}.$$

Deci nu oricare ar fi o mulţime de puncte Θ există un spaţiu de polinoame de dimensiune egală cu *card* Θ. Mai mult, suntem confruntaţi cu aşa numita pierdere a lui Haar, adică pentru orice spaţiu liniar finit dimensional $\mathcal{P}$ de polinoame definite pe R^d, $d > 1$, există mulţimi de puncte $\Theta \in R^d$, pentru care $dim\mathcal{P} = card\ \Theta > dim\ \mathcal{P}|_\Theta$, deci perechea $< \mathcal{P}, \Theta >$ nu este corectă. Prin urmare nu este posibil să găsim un spaţiu n- dimensional de polinoame, care să fie corect pentru orice $\Theta \in R^d$. Trebuie ales spaţiul interpolator funcţie de mulţimea de puncte.

Spaţiul interpolator este cunoscut dacă se cunoaşte o bază a sa. Una dintre bazele cele mai importante ale unui astfel de spaţiu o constituie baza formată din polinoamele fundamentale de interpolare, φ_i, $i = 1, \ldots, n$. Principala proprietate a acestor polinoame este că $\varphi_i(\theta_j) = \delta_{ij}$, unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker. Folosind această bază putem scrie interpolantul ca o combinaţie liniară de valori ale funcţiei de interpolat pe nodurile θ_i, $i = 1, \ldots, n$. Studiul polinoamelor fundamentale de interpolare ne permite şi compararea diverselor scheme de interpolare.

În prezentul articol ne-am propus evidenţierea unei serii de proprietăţi ale polinoamelor fundamentale de interpolare pentru o nouă schemă de intrepolare introdusă de A. Ron şi C. de Boor în [1] şi [2].

Articolul este structurat după cum urmează: în secţiunea 2 am prezentat principalele probleme teoretice legate de schema de interpolare şi rezultate obţinute în alte articole şi pe care le voi utiliza în continuare. Rezultatele principale ale articolului sunt concentrate în secţiunea 3, în care am prezentat unele proprietăţi noi ale polinoamelor de interpolare şi interpolantului pentru schema de interpolare considerată.

2. Definirea schemei de interpolare

Pentru a putea defini schema de interpolare avem nevoie de noţiunile prezentate în continuare.

Pentru o funcţie analitică în origine $f \in \mathcal{A}_0$, notăm cu $f \downarrow$ cel mai mic termen, sau termenul iniţial al lui f, adică $f \downarrow = T_j f$, cu j cel mai mic întreg pentru care $T_j \neq 0$, T_j fiind seria Taylor de ordinul j pentru f în origine şi cu $f^{[k]}$ componenta omogenă de gradul k din seria Taylor.

Pentru o mulţime $\Theta \subset R^d$, $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, definim următoarele spaţii de funcţii:

$$Exp_\Theta = span\{e_{\theta_j} :\ j = 1, \ldots, n\};\ e_{\theta_j}(x) = e^{\theta_j x};\ x \in R$$

$$\Pi_\Theta = (Exp_\Theta) \downarrow = span\{g \downarrow :\ g \in Exp_\Theta\}$$

A. Ron în [1] şi [2] a demonstrat că perechea $(\Theta, (Exp_\Theta) \downarrow)$ este întotdeauna corectă. Această observaţie, justifică introducerea unei noi scheme de interpolare, bazată pe construirea unei aplicaţii $\Theta \to \Pi_\Theta$ care asociază fiecărei mulţimi finite de puncte $\Theta \subset R^d$ un spaţiu de polinoame Π_Θ pentru care perechea $(\Theta,\ \Pi_\Theta)$ este corectă.

Pentru a construi polinomul $I_\Theta f \in \Pi_\Theta$ care interpolează funcţia $f \in \mathcal{A}_0$

pe Θ introducem un nou produs scalar după cum urmează. Fie $p \in \Pi$ un polinom şi $f \in \mathcal{A}_0$. Definim perechea

$$(1) \qquad < p, f >= p(D)f(0) = \sum_{\alpha \in Z_+^d} D^\alpha p(0) D^\alpha f(0)/\alpha!$$

$$cu\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d);\ D^\alpha = D_1^\alpha \ldots D_d^\alpha;\ \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_d!$$

Este evident că $< \cdot, \cdot >$ este un veritabil produs scalar peste spaţiul polinoam Dacă p este polinomul $\sum_\alpha c_\alpha ()^\alpha$, atunci $p(D)$ este operatorul diferenţial cu coeficienţi constanţi $\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha$.

Avem evident (vezi[5])

$$(2) \qquad < p, e_\theta >= p(\theta)$$

În cazul în care $f \in \mathcal{A}_0$ şi $g \in Exp_\Theta$, înlocuim produsul scalar $< f, g >$, astfel:

$$(3) \qquad < f, g >= \sum_{i=1}^n c_i f(\theta_i)$$

cu coeficienţii c_i definiţi prin

$$(4) \qquad g(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\theta_i x};\ x \in R^d$$

A. Ron şi C. de Boor au demonstrat că, printr-o variantă a procesului de ortonormalizare a lui Gram-Schmidt, se poate ca, pornind de la baza $(e_\theta)_{\theta \in \Theta}$ pentru Exp_Θ, să se construiască un şir $(g_1, \ldots, g_n)$ din Exp_Θ, pentru care

$$(5) \qquad < g_i \downarrow, g_j >= 0 \Leftrightarrow i \neq j$$

ceea ce demonstrează că şirul $(g_1 \downarrow, \ldots, g_n \downarrow)$ este liniar independent, el reprezentând o bază omogenă pentru Π_Θ.

S-a demonstrat în [1] că pentru un polinom arbitrar $f \in \Pi$, sau o funcţie arbitrară $f \in \mathcal{A}_0$

$$(6) \qquad I_\Theta f = \sum_{j=1}^n g_j \downarrow \frac{< f, g_j >}{< g_j \downarrow, g_j >}$$

este unicul element din Π_Θ care ia aceleaşi valori cu f pe Θ.

În [4] am demonstrat că $I_\Theta f$ poate fi exprimat folosind polinoamele fundamentale de interpolare φ_i sub forma:

$$I_\Theta f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i f(\theta_i), \; unde \tag{7}$$

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{i,j} g_j \downarrow}{< g_j \downarrow, g_j >} \tag{8}$$

cu coeficienţii $c_{i,j}$ definiţi prin

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} e^{\theta_i x}; \; x \in R^d \tag{9}$$

Pentru a putea exprima mai uşor restul în schema de interpolare prezentată, se introduce operatorul I_Θ^*, dual al lui I_Θ relativ.la perechea (1), adică aplicaţia

$$I_\Theta^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$
$$I_\Theta^* f = \sum_{j=1}^{n} g_j \frac{< g_j \downarrow, f >}{< g_j \downarrow, g_j >} \tag{10}$$

Proprietatea de dualitate a operatorilor I_Θ şi I_Θ^* se exprimă prin relaţia:

$$< I_\Theta f, e_x > = < f, I_\Theta^* e_x > \tag{11}$$

Restul interpolării funcţiei f prin $I_\Theta f$ este dat de

$$(Rf)(x) = < f, \varepsilon_{\Theta,x} >, \text{ unde} \tag{12}$$
$$\varepsilon_{\Theta,x} = e_x - I_\Theta^* e_x \tag{13}$$

O formă interesantă pentru exprimarea interpolantului este forma Newton prezentată în [1] şi dată de următoarea teoremă:

Teorema 1 *Pentru o aranjare $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ oarecare, folosind notaţiile:*

$$\Theta_j = (\theta_1, \ldots, \theta_j); \; j = 1, \ldots, n-1$$
$$\Theta_0 = \{\}$$
$$p_{\Theta,x} = \varepsilon_{\Theta,x} \downarrow, \; x \notin \Theta$$

are loc egalitatea:

$$I_\Theta f = \sum_{j=1}^{n} \left(p_{\Theta_{j-1},\theta_j} - I_{\Theta_{j-1}} p_{\Theta_{j-1},\theta_j} \right) \frac{< f, \varepsilon_{\Theta_{j-1},\theta_j} >}{< p_{\Theta_{j-1},\theta_j}, p_{\Theta_{j-1},\theta_j} >} \tag{14}$$

Demonstraţia poate fi găsită în [1].

3. Proprietăţi ale polinoamelor fundamentale de interpolare

În această secţiune sunt enunţate şi demonstrate noi proprietăţi pentru polinoamele fundamentale, precum şi pentru operatorii I_Θ şi I_Θ^*.

Teorema 2 *Polinoamele φ_i satisfac egalitatea*

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1, \tag{15}$$

ceea ce demonstrează că formula de interpolare dată în (6) este exactă pentru funcţiile constante.

Demonstraţie: O demonstraţie a acestei proprietăţi, bazată pe calcul matriceal este dată în [5], dar voi da acum o altă demonstraţie a ei. Putem scrie succesiv:

$$\sum_{i=1}^{n} < \varphi_i, g_k >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{c_{ij} < g_j \downarrow, g_k >}{< g_j \downarrow, g_j >} = \sum_{i=1}^{n} c_{ik} = g_k(0)$$

$$\sum_{i=1}^{n} < \varphi_i, g_k >= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \varphi_i, g_k \right\rangle$$

Ţinând cont că în produsul scalar (1) $p^{[k]}$ acţionează numai asupra lui $f^{[k]}$, obţinem că

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1 \quad \square$$

Corolarul 1 *Operatorul I_Θ satisface principiul maximului, adică dacă $m = \min_{i=1,\dots,n} f(\theta_i)$, $M = \max_{i=1,\dots,n} f(\theta_i)$ atunci*

$$m \le I_\Theta f \le M \tag{16}$$

Demonstraţie: Fie $C = \max(|M|, |m|)$

$$\frac{(I_\Theta f)(x) + C}{M + C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(\theta_i) + C}{M + C} \varphi_i(x)$$

Dar $M \ge f(\theta_i)$, $\forall i = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \frac{f(\theta_i) + C}{M + C} \le 1 \Rightarrow \frac{(I_\Theta f)(x) + C}{M + C} \le 1 \Rightarrow (I_\Theta f)(x) \le M, \ \forall x \in R^d$$

Analog se obţine şi $(I_\Theta f)(x) \ge m$.$\square$

Corolarul 2 *Dacă* $f(\theta_i) \geq 0$ *atunci* $I_\Theta f \geq 0$

Produsul scalar dintre un polinom fundamental şi o funcţie arbitrară $h \in Exp_\Theta$ este dat de teorema de mai jos:

Teorema 3 *Fie* $h \in Exp_\Theta$. *Atunci*

$$< \varphi_i, h >= \sum_{j=1}^{n} b_j c_{ij} = d_i, \tag{17}$$

unde b_j *şi* d_i *sunt coeficienţii prin care* h *se exprimă în bazele* (g_j), *respectiv* (e_i), $i, j = 1, \ldots, n$ *şi* c_{ij} *sunt daţi în relaţia (9).*

Demonstraţie:

$$< \varphi_i, h >= \left\langle \varphi_i, \sum_{j=1}^{n} d_j e_{\theta_j} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} d_j \varphi(\theta_j) = d_i$$

Fie $C = (c_{ij})^T$, $E = (e_{\theta_i})^T$, $B = (b_j)$, $D = (d_i)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Din (9) rezultă că $G = C \cdot E$. Cum $h = B \cdot G = B \cdot C \cdot E$ şi în acelaşi timp $h = D \cdot E$ obţinem că $B \cdot C = D$, adică $d_i = \sum_{j=1}^{n} b_j c_{ij}$ ceea ce demonstrează teorema.□

Corolarul 3

$$\sum_{i=1}^{n} < \varphi_i, h >= \sum_{j=1}^{n} b_j g_j(0), \ \forall h \in Exp_\Theta,$$

notaţiile folosite fiind cele din teorema 3.

Folosind legătura dintre operatorul I_Θ şi dualul său I_Θ^* putem enunţa următoarea teoremă:

Teorema 4

$$< I_\Theta f, h >=< f, I_\Theta^* f >=< f, h >, \ \forall h \in Exp_\Theta$$

Demonstraţie: Folosind notaţiile din teorema 3 putem scrie

$$< I_\Theta f, h >= \sum_{i=1}^{n} b_i < I_\Theta f, g_i >= \sum_{i=1}^{n} b_i < f, g_i >=< f, h >$$

$$< f, I_\Theta^* h >= \sum_{j=1}^{n} < f, g_j > \frac{< g_j \downarrow, h >}{< g_j \downarrow, g_j >} = \sum_{j=1}^{n} b_j < f, g_j >=< f, h > \ \square$$

Corolarul 4 *Au loc următoarele egalităţi:*

$$I_\Theta f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \langle f, I_\Theta^* e_{\theta_i} \rangle \tag{18}$$

$$I_\Theta^* e_x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) I_\Theta^* e_{\theta_i} \tag{19}$$

Demonstraţie:

$$I_\Theta f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i f(\theta_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i I_\Theta f(\theta_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i < I_\Theta f, e_{\theta_i} >= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \langle f, I_\Theta^* e_{\theta_i} \rangle .$$

Relaţia (19) rezultă din (18) folosind proprietatea de dualitate operatorilor I_Θ şi I_Θ^*.□

Ţinând cont de relaţia (2) putem scrie

$$< I_\Theta f, e_{\theta_i} >= (I_\Theta f)(\theta_i).$$

Un rezultat similar este stabilit şi pentru operatorul dual I_Θ^*, prin propoziţia următoare:

Propoziţia 1

$$\langle e_x, I_\Theta^* f \rangle = (I_\Theta^* f)(x)$$

Demonstraţie: Din relaţia (10) se observă că $I_\Theta^* f \in Exp\Theta$, deci el se poate exprima folosind bazele (e_{θ_j}), respectiv (g_j), $j = 1, \ldots, n$ sub forma

$$I_\Theta^* f = \sum_{j=1}^{n} d_j e_{\theta_j} = \sum_{j=1}^{n} b_j g_j$$

Cu notaţiile din teorema 3, ţinând cont că $B \cdot C = D$, adică $d_i = \sum_{j=1}^{n} b_j c_{ij}$, şi folosind produsul scalar definit în relaţia (3) se obţine relaţia dorită. □

O interesantă proprietate leagă polinoamele fundamentale de interpolare de operatorul diferenţial cu coeficienţi constanţi ataşat termenului conducător al acestor polinoame. Această proprietate este prezentată în teorema următoare

Teorema 5 *Fie $\Theta^j = \Theta \setminus \{\theta_j\}$. Au loc următoarele egalităţi:*

$$\varphi \perp Exp_\Theta \tag{20}$$
$$\varphi \uparrow \perp \Pi_{\Theta^j} \tag{21}$$
$$\varphi \uparrow (D)q(0) = 0, \ \forall q \in \Pi_{\Theta^j} \tag{22}$$
$$\varphi \uparrow (D)D^\alpha q(0) = 0, \ \forall q \in \Pi_{\Theta^j} \tag{23}$$
$$\varphi \uparrow (D)q = 0, \ \forall q \in \Pi_{\Theta^j} \tag{24}$$

Demonstraţie: Din faptul că $\varphi(\theta_j) = \delta_{ij}$ rezultă că $\varphi_i|_{\Theta^i} = 0$, de unde $< \varphi_i, e_{\theta_i} >= 0$, $\forall \theta_j \in \Theta^i$ şi deci $< \varphi_i, h >= 0$, $\forall h \in Exp_{\Theta^i}$, adică $\varphi_i \perp Exp_{\Theta^i}$.

Vom demonstra în continuare că (20) $\Rightarrow$ (21) $\Leftrightarrow$ (22) $\Leftrightarrow$ (23) $\Leftrightarrow$ (24). $< \varphi_i, h >= 0 \Rightarrow < \varphi_i \uparrow, h \downarrow >= 0$, fie pentru că $grad\ \varphi_i \uparrow \neq grad\ h \downarrow$, fie pentru că $< \varphi_i \uparrow, h \downarrow >=< \varphi_i, h >= 0$. Dar $h \in Exp_{\Theta^i} \Rightarrow h \downarrow \in \Pi_{\Theta^i}$, de unde obţinem (21).Folosind definiţia (1) a produsului scalar, obţinem relaţia (22). Folosind relaţia $p(D)D^\alpha = D^\alpha p(D)$ şi faptul că spaţiul Π_{Θ^i} este D-invariant, obţinem echivalenţa (22) $\Leftrightarrow$ (23). Polinomul $\varphi_i \uparrow (D)(q) = 0$ dacă şi numai dacă toţi coeficienţii săi din dezvoltarea Taylor sunt zero şi de aici rezultă ultima echivalenţă. $\square$

Polinoamele fundamentale pot fi reprezentate într-o formă Newton, dată de teorema următoare:

Teorema 6 *Fie $\Theta^j = \Theta \setminus \{\theta_j\}$, $j = 1, \ldots, n$. Funcţiile*

$$q_{\Theta^j,\theta_j} = \frac{< \varepsilon_{\Theta^j,\theta_j} \downarrow, \varepsilon_{\Theta^j,x} >}{< \varepsilon_{\Theta^j,\theta_j} \downarrow, \varepsilon_{\Theta^j,\theta_j} \downarrow>}, \ j = 1, \ldots, n \tag{25}$$

reprezintă polinoamele fundamentale de interpolare ale schemei de interpolare $< \Theta, \Pi_\Theta >$.

Demonstraţie: Evident avem $\varepsilon_{\Theta^j,\theta_j} \in Exp_{\Theta^j \cup \theta_j} = Exp_\Theta$.

$$< \varepsilon_{\Theta^j,\theta_j} \downarrow, \varepsilon_{\Theta^j,x} >= p_{\Theta^j,\theta_j} - I_\Theta p_{\Theta^j,\theta_j} \in \Pi_{\Theta^j \cup \theta_j} = \Pi_\Theta \tag{26}$$

Deci $q_{\Theta^j,\theta_j} \in \Pi_\Theta$. Este suficient să demonstrăm că $q_{\Theta^j,\theta_j}(\theta_i) = \delta_{i,j}$.

$$\begin{aligned} q_{\Theta^j,\theta_j}(\theta_j) &= \frac{< \varepsilon_{\Theta^j,\theta_j} \downarrow, \varepsilon_{\Theta^j,\theta_j} >}{< \varepsilon_{\Theta^j,\theta_j} \downarrow, \varepsilon_{\Theta^j,\theta_j} \downarrow>} = 1, \ j = 1, \ldots, n \\ q_{\Theta^j,\theta_j}(\theta_i) &= \frac{< \varepsilon_{\Theta^j,\theta_j} \downarrow, \varepsilon_{\Theta^j,\theta_i} >}{< \varepsilon_{\Theta^j,\theta_j} \downarrow, \varepsilon_{\Theta^j,\theta_j} \downarrow>} = 0, \ i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j \end{aligned}$$

deoarece $I_\Theta p(\theta_i) = p(\theta_i)$, $\forall p \in \Pi_\Theta$ şi folosind (26) şi faptul că $p_{\Theta^j,\theta_j} \in \Pi_\Theta$ se obţine

$< \varepsilon_{\Theta^i,\theta_j} \downarrow, \varepsilon_{\Theta^j,\theta_i} >= 0, \forall\, i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j.$

O proprietate foarte importantă a polinoamelor fundamentale o reprezintă constructibilitatea, adică ele pot fi obţinute printr-un număr finit de operaţii aritmetice. Am dedus un algoritm de calcul pentru polinoamele fundamentale de interpolare folosind o metodă de eliminare de tip Gauss. Acest algoritm constituie obiectul unui alt articol.

Bibliografie

[1] A.Ron, C. de Boor., *On the error in multivariate polynomial interpolation.* Math. Z., 220, 1992, pag.221-230.

[2] A.Ron, C. de Boor., *Polynomial interpolation in several variables.* Math. Z., 210, 1992, pag. 347-378.

[3] A.Ron, C. de Boor., *On multivariate polynomial interpolation.* Constr. Approx. 6, 1990, pag. 287-302.

[4] D. Simian , *Operatori şi metode de interpolare a funcţiilor de mai multe variabile.* Referat, Cluj-Napoca, 1998.

[5] D. Simian, *Multivariate interpolation and some applications,* Proceedings of The 8-th Symposium of Mathematics ans its Applications, Timişoara, 1999, pag.145-151.

Universitatea "Lucian Blaga",
Sibiu,
Romania
e-mail: danas@sciences.ulbs.ro

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 161–166

BAYESIAN PRINCIPLE IN CRYPTANALYSIS OF STREAM CIPHER ALGORITHMS

Emil Simion and Nicolae Constantinescu

Abstract

This paper presents new algorithms of iterative error correction codes. The algorithms have applications in the error correction problems which may appear on the communication channel and in the cipher text reconstruction in the hypothesis that we know the statistic of plain text $p \neq 0.5$.

1. General presentation

The most important problem from cryptography is the cipher text reconstruction from a cipher message. In this paper we present three algorithms of reconstruction of the cipher text in the hypothesis that the ciphering method is **XOR** between the output of a linear feedback shift register and plain text. The methods can be extended at combiners of linear feedback shift registers like *Gollmann cascades* (see *Chambers* [3], [4], [5]). We present three principles (see *Golic* [6], [7], [8]) on which consist the idea of our algorithms. The methods we present are called linear syndrome methods (see *Zeng* [11], [12]). This three principles on which we construct the reconstruction algorithms are the following

P.1. Error correction is done using a sufficient control equations(see *Simion* [10]).

P.2. Error correction is based on the estimation of the posteriori probability obtained using like a priori probability in the current attrition the mean of the a posteriori probability from the previous iteration (see *Basawa* [1], *Preda* [9]).

P.3. Error correction is based on the estimation of the posteriori probability obtained using like a priori probability in the current iteration the posteriori probability from the previous iteration (see *Basawa* [1], *Preda* [9]).

Convergence of iterative error correction method is presented in *Golic* [7] and [8].

2. Presentation of error correction algorithms

In this section we formulate the reconstruction of the output of an **LFSR** (*linear feedback shift register*). We present three algorithms corresponding of the three principles formulated above.

Let $\{x_n\}_{n=1}^N$ be the output of an **LFSR** of length L with w reactions. In the statistic model we assume that a binary noise sequence $\{e_n\}_{n=1}^N$ is the realization of a independently binary random variable i.i.r. $\{E_n\}_{n=1}^N$ such that $P(E_n = 1) = p\ n = 1, ..., N$.

Let $\{z_n\}_{n=1}^N$ be the perturbed version of $\{x_n\}_{n=1}^N$ definite by:

$$z_n = x_n \oplus e_n, \quad n = 1, 2, ..., N$$

($\{e_n\}_{n=1}^N$ plain text, $\{x_n\}_{n=1}^N$ pseudorandom generator and $\{z_n\}_{n=1}^N$ cipher text)

We assume that we know the connections of the feedback polynomial, parameter p and a intercepted segment $\{z_n\}_{n=1}^N$. It is required the plain corresponding text $\{e_n\}_{n=1}^N$.

Let $\Pi_n = \{\pi_k(n)\}_k$ be a set of *control equations ortogonal* on the bit n which can be generated with the multiples of the characteristic polynomial, $n = 1, 2, ..., N$.

Define $c_k(n) = \sum_{l \in \pi_k(n)} z_l \bmod 2,\ k = 1, 2, ..., |\Pi_n|$, n=1,2,...,N. $c_k(n)$ is a realization of the binary random variable $C_k(n)$, $k = 1, 2, ..., |\Pi_k|$. Denote by $P(En, \{C_k(n)\}_{k=1}^N)$ *the common probability distribution of the variables* E_n and $C_k(n)$, $k = 1, 2, ..., |\Pi_n|$ and with $P(E_n|\{C_k(n)\}_{k=1}^N)$ *posteriori probability distribution.*

2.1. Algorithm P.1.-*Majority deciphering*

Initialization: $i = 1, I =$constant (number of iterations), $p^{(0)} = p$.

Step 1: $i = i + 1$. If $i > I$ **go to Pas 5**.

Step 2: Compute: $c_k(n)\ k = 1, 2, ..., |\Pi_k|$, $n = 1, 2, ..., N$.

Step 3: Compute: $t_n = |\Pi_n| - 2 \sum_{k=1}^{|\Pi_n|} c_k(n)$, $n = 1, ..., N$ (t_n is majority decision function).

Step 4: If $t_n < 0 \Rightarrow z_n = z_n \oplus 1\ n = 1, ..., N$
go to Pas 1.

Step 5: **STOP**.

2.2. Algorithm P.2.- *A priori is mean posteriori*

Initialization: $i = 1, I =$ constant (number of iterations), $p^{(0)} = p$.
Step 1: $i = i + 1$. If $i > I$ **go to Pas 6**.
Step 2: Compute: $c_k(n)$ $k = 1, 2, ..., |\Pi_k|$, $n = 1, 2, ..., N$.
Step 3: For $n = 1, ..., N$ compute:

$$P_n^{(i)} = P(E_n = 1 | \{C_k(n)\}_{k=1}^{|\Pi_n|} = \{c_k(n)\}_{k=1}^{|\Pi_n|}) =$$

$$= \frac{p^{(i)} p_w^{s_n} (1 - p_w)^{|\Pi_n| - s_n}}{p^{(i)} p_w^{s_n} (1 - p_w)^{|\Pi_n| - s_n} + (1 - p^{(i)})(1 - p_w)^{s_n} p_w^{|\Pi_n| - s_n}}$$

where

$$s_n = \sum_{k=1}^{|\Pi_n|} c_k(n)$$

(number of control equations which are not satisfied) and

$$p_w = \frac{1 - (1 - 2p^{(i)})^w}{2}$$

Step 4: If $P_n^{(i)} > 0.5 \Rightarrow z_n = z_n \oplus 1$ and $P_n^{(i)} = 1 - P_n^{(i)}$ $n = 1, ..., N$.
Step 5: $p^{(i)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P_n^{(i)}$ **go to Pas 1**.
Step 6: **STOP**.

2.3. Algorithm P.3.- *A priori is a posteriori*

Initialization: i=1, I= constant (number of iterations), $p_n^{(0)}$=p, n=1..N.
Step 1:$i = i + 1$. If $i > I$ **go to Pas 6**.
Step 2: Compute: $c_k(n)$ $k = 1, 2, ..., |\Pi_k|$, n=1,2,...,N.
Step 3: For $n = 1, ..., N$ compute:

$$P_n^{(i)} = P(E_n = 1 | \{C_k(n)\}_{k=1}^{|\Pi_n|} = \{c_k(n)\}_{k=1}^{|\Pi_n|}) =$$

$$\frac{p_n^{(i)} \prod_{l=1}^{|\Pi_n|} p_l(n)^{c_l(n)} (1 - p_l(n))^{\bar{c}_l(n)}}{p_n^{(i)} \prod_{l=1}^{|\Pi_n|} p_l(n)^{c_l(n)} (1 - p_l(n))^{\bar{c}_l(n)} + (1 - p_n^{(i)}) \prod_{l=1}^{|\Pi_n|} (1 - p_l(n))^{c_l(n)} p_l(n)^{\bar{c}_l(n)}}$$

where $\bar{c}_l\ (n) = 1 - c_l(n)$ and

$$p_l(n) = \frac{1 - \prod_{j=1}^{w} (1 - 2p_{m_j}^{(i)})}{2}$$

where $\{m_j\}_{j=1}^{w}$ is the set of the indices implied in the equations $\pi_l(n)$ $l = 1, 2, ..., |\Pi_n|$; $n = 1, 2, ..., N$.

Step 4: If $P_n^{(i)} > 0.5 \Rightarrow z_n = z_n \oplus 1$ and $P_n^{(i)} = 1 - P_n^{(i)}$ $n = 1, ..., N$.

Step 5: $p_n^{(i)} = P_n^{(i)}$ $n = 1, 2, ..., N$ **go to Pas 1**.

Step 6: **STOP**.

3. Conclusion and comparative study of the efficiency

Implementation of the above algorithms allow us to formulate the following conclusions:

1. When the noise is smaller than some limit (e.g. p=0.4) all the algorithms are convergent at the solution of the problem. Algorithm P.1. has the smallest reconstruction cost.

2. In the case of divergence of algorithm P1 and convergence of the algorithms P.2. and P.3. algorithm P.2. has the smallest reconstruction cost.

3. In case in which both algorithms P.1 and P..2 are divergent and algorithm P. 3 is convergent for minimize reconstruction cost we perform first error correction using algorithm P.3 and after some rounds we run algorithms P.1 and P.2 .

4. The difference between algorithm 2 and algorithm 3 is the following: in algorithm 2 each processed element has the same probability density and algorithm 3 allows that the elements of deciphering text to have different density functions(see Step 5 from algorithm 2 and 3).

5. Algorithm P.3 can be improved if we have a Markovian dependence of the text. This thing must be put in connection with a processing at codification level $L \geq 2$ (the presented algorithms have a codification parameter level L=2 processing, i.e. bit level).

References

1. I.V.Basawa and B.L.S. Prakasa Rao, *Statistical Inference for Stochastic Processes,* Academic Press London N.Y. Toronto Sydney San Francisco 1980.

2. P. Brockwell and R. Davis, *Time Series Theory and Methods,* Springer-Verlag 1987.

3. W.G. Chambers and D. Gollmann, *Lock-in effect in cascades of clock-controlled shift- registers*, Proceedings Eurocrypt'88, Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science nr.330, Springer-Verlag, New York, 1988, pag. 331-343.

4. W.G. Chambers and D. Gollmann, *Generators for sequences with near-maximal linear equivalence*, IEEE Proceedings, vol. 135(E), nr.1(ian. 1988), pag. 67-69.

5. W.G. Chambers and D. Gollmann, *Clock-controlled shift-registers: a review*, IEEE Journal on Selected Areas in Communication, vol. 7, nr.4(mai 1989), pag. 525-533.

6. J. Golic , M. Mihaljevic, *A generalized Correlation Attack on a Class of Stream Cipher Based on the Levenshtein Distance,* Journal of Cryptology vol. 3, 1991.

7. J. Golic, M.Mihajevic, *A comparison of Cryptanalitic Principles Based on Iterative Error-Correction,* Adv. In Cryptology Eurocrypt91 1991.

8. J. Golic M.Mihajevic *Convergence of Bayesian iterative error-correction procedure on a noisy shift register sequence.* Adv. In Cryptology Eurocrypt 92 1992.

9. V. Preda *Teoria Deciziilor Statistice* Ed. Academiei 1991.

10. E. Simion *Metode Statistico-Informaţionale în Diagnoza Sistemelor de Cifrare* Teză Doctorat, Universitatea Bucureşti, 2000.

11. K.C. Zeng, C.H. Yang, T.R.N. Rao, *On the linear consistency test (LCT) in cryptanalysis with application*, Proceedings Crypto'89, Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science nr.435, Springer-Verlag, New York, 1989, pag. 164-174.

12. K.C. Zeng, C.H. Yang, T.R.N. Rao, *An improved linear syndrome algorithm in cryptanalysis with application*, Proceedings Crypto'89, Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science nr.435, Springer-Verlag, New York.

Advanced Technologies Institute
e-mail: simion@pro.math.unibuc.ro

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 167–174

A POINT OF VIEW FOR SUCCESSIVE APPROXIMATION METHODS

Anton Soloi

Abstract

In this article we present numerical integration of a system of differential equations through the successive approximation method, which are similar with Gauss-Seidel's method for iterative solutions of linear system of equations.

1 Introducere

Existenţa soluţiei problemei Cauchy pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale, ce reprezintă modelul matematic al unei teorii fizice asupra unui anumit fenomen, constituie unul din principalele
mijloace de verificare a validităţii modelelor fizice.

Rezultatul de existenţă pune în evidenţă stările şi parametrii fizici minimali care determină evoluţia unui proces şi, având cel mai adesea un caracter constructiv, conduce la procedee numerice de aproximare a soluţiei.

Să consideram sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i\left(t, y_1, y_2, ..., y_n\right), \quad i = 1, ..., n \quad n \in N \tag{1}$$

şi condiţiile iniţiale:

$$y_i\left(t_0\right) = y_i^{(0)}, \quad i = 1, ..., n \tag{2}$$

Relativ la partea dreaptă a ecuaţiei (1) vom admite următoarele ipoteze:

(i) Toate funcţiile f_i, $i = 1, ..., n$ sunt continue în raport cu ansamblul variabilelor pe domeniul D :

$$D = \left\{ (t, y) \in R_+ \times R^n \,\middle|\, \begin{array}{c} |t - t_0| \leq a \\ \left|y_i - y_i^{(0)}\right| \leq b, \quad i = 1, ..., n \end{array} \right\} \tag{3}$$

unde $a, b \in R_+$ sunt constante reale date.

(ii) În domeniul D functiile f_i sunt Lipschitziene în raport cu variabilele $y_1, y_2, ..., y_n$ adică există constanta $L > 0$ astfel încât:

$$|f_i(t, y_1', ..., y_n') - f_i(t, y_1'', ..., y_n'')| \leq L \cdot \sum_{k=1}^{n} |y_k' - y_k''| \tag{4}$$

pentru oricare două puncte $(t, y_1', ..., y_n'), (t, y_1'', ..., y_n'') \in D$ şi oricare $i = 1, ..., n$

Din continuitatea funcţiilor f_i, $i = 1, ..., n$ pe domeniul compact D rezultă mărginirea lor, adică:

$$\exists M > 0, \quad |f_i(t, y_1, ..., y_n)| \leq M \quad i = 1, ..., n \tag{5}$$

pentru oricare punct $(t, y_1, ..., y_n) \in D$

Este binecunoscută metoda fundamentată de E.Picard (1856-1941) prin care se construieşte şirul $\left(y_i^{(m)},\ i = 1, ..., n\right)_{m \in N}$ definit pe intervalul

$$I = \{t; |t - t_0| \leq \delta\}, \quad \text{unde} \quad \delta = \inf\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

după cum urmează:

$$y_i^{(m)}(t) = y_i^{(0)} + \int_{t_0}^{t} f_i\left(s, y_1^{(m-1)}, ..., y_n^{(m-1)}\right) ds, \quad i = 1, ..., n \tag{6}$$

pentru orice $m \in N^*$ şi pentru orice $t \in I$. Rezultatul central de existenţa pentru problema Cauchy (1)-(2) este formulat în

Teorema 1.1 *Presupunem îndeplinite ipotezele (i) şi (ii) formulate mai sus. Atunci problema Cauchy (1)-(2) admite o soluţie unică $y_i = y_i(t)$, $i = 1, ..., n$ diferenţiabilă şi definită pe intervalul I.*

Observaţia 1.1 *Şirul de funcţii $\left(y_i^{(m)},\ i = 1, ..., n\right)_{m \in N}$ definit pe intervalul I prin relaţia (6) este uniform convergent pe I la soluţia problemei Cauchy (1)-(2). Mai mult are loc următoarea evaluare:*

$$\sup_{t \in I} \left| y_i^{(m)}(t) - y_i^{(m-1)}(t) \right| \leq M (L \cdot n)^{m-1} \frac{\delta^m}{m!} \tag{7}$$

pentru orice $m \in N^*$ şi pentru orice $i = 1, ..., n$.

2 O nouă abordare

Folosind ideea lui Gauss-Seidel de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare, voi prezenta o nouă abordare a metodei aproximaţiilor succesive a lui Picard pentru problema Cauchy (1)-(2). Voi construi şirul $\left(y_i^{(m)},\ i = 1, ..., n\right)_{m \in N}$ definit pe intervalul $J = \{t; |t - t_0| \leq \delta\}$, unde $\delta = \inf\left(a, \frac{b}{M}, \frac{3}{Ln}\right)$, după cum urmează:

$$y_i^{(m)}(t) = y_i^{(0)} + \int_{t_0}^{t} f_i\left(s, y_1^{(m)}, ..., y_{i-1}^{(m)}, y_i^{(m-1)}, ..., y_n^{(m-1)}\right) ds \tag{8}$$

pentru orice $m \in N^*$, $i = 1, ..., n$ şi pentru orice $t \in J$.

Teorema 2.1 *Presupunem îndeplinite ipotezele (i) şi (ii) formulate mai sus. Atunci şirul de funcţii* $\left(y_i^{(m)},\ i = 1, ..., n\right)_{m \in N}$ *definit pe intervalul J prin relaţia (8) este uniform convergent pe J la soluţia problemei Cauchy (1)-(2). Mai mult are loc următoarea evaluare:*

$$\sup_{t \in J} \left| y_i^{(m)}(t) - y_i^{(m-1)}(t) \right| \leq M L^{m-1} \left(n - q_i^{(m)}\right)^{m-1} \frac{\delta^m}{m!} \tag{9}$$

pentru orice $m \in N^*$ *şi pentru orice* $i = 1, ..., n$ *unde* $q_i^{(m)}$ *este cea mai mică radacină pozitivă a ecuaţiei polinomiale:*

$$\begin{aligned} &\left(n - q_i^{(m)}\right)^{m-1} - \left[n^{m-1} + \left(n - q_2^{(m)}\right)^{m-1} + \left(n - q_3^{(m)}\right)^{m-1} + ... + \right. \\ &\left. + \left(n - q_{i-1}^{(m)}\right)^{m-1}\right] \frac{2\left(1 - q_1^{(1)}\right)}{n \cdot m} - \left[\left(n - q_i^{(m-1)}\right)^{m-2} + \right. \\ &\left. + \left(n - q_{i+1}^{(m-1)}\right)^{m-2} + ... + \left(n - q_n^{(m-1)}\right)^{m-2}\right] = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

cu proprietatea $0 \leq q_i^{(m)} < n$ *iar* $q_1^{(1)} = 1 - \frac{Ln\delta}{3}$.

Demonstraţie. Este clar că problema Cauchy (1)-(2) este echivalentă cu următorul sistem de ecuaţii integrale:

$$y_i(t) = y_i^{(0)} + \int_{t_0}^{t} f_i(s, y_1, ..., y_n)\, ds, \quad i = 1, ..., n \tag{11}$$

Într-adevăr, dacă funcţia continuă $y_i(t)$ verifică ecuaţia (11) pe intervalul J atunci ea este evident de clasa C^1 pe acest interval şi verifică ecuaţia (1) şi condiţia iniţială (2). Reciproc orice soluţie a problemei Cauchy (1)-(2) este soluţie a ecuaţiei (11). Deci pentru a demonstra existenţa soluţiei problemei Cauchy este suficient să arătăm că ecuaţia (11) admite soluţie continuă pe intervalul J. Prin inducţie se arată uşor că funcţiile $\left(y_i^{(m)},\ i=1,...,n\right)_{m\in N}$ sunt continue pe intervalul J şi în plus

$$\left|y_i^{(m)}(t)-y_i^{(0)}\right|\le M\left|t-t_0\right|\le M\delta\le b,\quad i=1,...,n\quad m\in N$$

pentru orice $t\in J$. De aici rezultă că şirul $\left(y_i^{(m)},\ i=1,...,n\right)_{m\in N}$ este bine definit. Vom demonstra că acest şir converge uniform pe intervalul J la o soluţie a problemei Cauchy (1)-(2).

Folosind (4) şi (8) putem scrie:

$$\left|y_i^{(m+1)}(t)-y_i^{(m)}(t)\right|\le$$

$$\le L\cdot\int_{t_0}^{t}\left[\sum_{k=1}^{i-1}\left|y_k^{(m+1)}(s)-y_k^{(m)}(s)\right|+\sum_{k=i}^{n}\left|y_k^{(m)}(s)-y_k^{(m-1)}(s)\right|\right]ds$$

pentru orice $t\in J$, $i=1,...,n$ si $m\in N^*$. Notăm cu

$$q_1^{(1)}=1-\frac{Ln\delta}{3}\Rightarrow 0\le q_1^{(1)}<1$$

Pentru $m=1$ avem succesiv:

$$i=1\Rightarrow\left|y_1^{(2)}(t)-y_1^{(1)}(t)\right|\le L\int_{t_0}^{t}M\sum_{k=1}^{n}\left|s-t_0\right|ds=LMn\frac{\left|t-t_0\right|^2}{2}$$

$$i=2\Rightarrow\left|y_2^{(2)}(t)-y_2^{(1)}(t)\right|\le$$

$$\le L\cdot\int_{t_0}^{t}\left[\left|y_1^{(2)}(s)-y_1^{(1)}(s)\right|+M\cdot\sum_{k=2}^{n}\left|s-t_0\right|\right]ds\le$$

$$\le L\cdot\int_{t_0}^{t}\left[LMn\frac{\left|s-t_0\right|^2}{2}+M(n-1)\left|s-t_0\right|\right]ds\le$$

$$\le LM\frac{\left|t-t_0\right|^2}{2}\left(n-q_1^{(1)}\right)$$

Să demonstrăm că are loc evaluarea (9) pentru $m=1$. Presupun adevărată (9) pentru $i=1,...,k$ Atunci

$$i=k+1\Rightarrow\left|y_{k+1}^{(2)}(t)-y_{k+1}^{(1)}(t)\right|\le$$

$$\leq L \cdot \int_{t_0}^{t} \left[\sum_{j=1}^{k} \left| y_j^{(2)}(s) - y_j^{(1)}(s) \right| + M \cdot \sum_{j=k+1}^{n} |s - t_0| \right] ds \leq$$

$$\leq L \cdot \int_{t_0}^{t} \left[\sum_{j=1}^{k} LM \frac{|s - t_0|^2}{2} \left(n - q_1^{(1)} \right) + M \cdot \sum_{j=k+1}^{n} |s - t_0| \right] ds \leq$$

$$\leq LM \frac{|t - t_0|^2}{2} \left(n - k q_1^{(1)} \right), \quad t \in J$$

Este firesc să notăm

$$q_k^{(1)} = k q_1^{(1)} \Rightarrow 0 \leq q_k^{(1)} < k < n, \quad k = 1, ..., n$$

Să admitem adevărată evaluarea:

$$\sup_{t \in J} \left| y_i^{(m)}(t) - y_i^{(m-1)}(t) \right| \leq M L^{m-1} \left(n - q_i^{(m)} \right)^{m-1} \frac{\delta^m}{m!}$$

pentru $i = 1, ..., n$ şi pentru un $m \in N^*$, unde $q_i^{(m)}$ este cea mai mică radăcină pozitivă a ecuaţiei polinomiale (10) pe care o scriem sub formă compactă:

$$P_i^{(m)} \left(q_i^{(m)} \right) = 0 \tag{12}$$

iar $0 \leq q_i^{(m)} < n$. Este clară existenţa numărului $q_i^{(m)}$ cu proprietatea de mai sus deoarece $P_i^{(m)}(0) > 0$ si $P_i^{(m)}(n) < 0$.

In baza relaţiei (8) şi folosind ipoteza inducţiei obţinem:

$$\left| y_{k+1}^{(m+1)}(t) - y_{k+1}^{(m)}(t) \right| \leq$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} \left[\sum_{j=1}^{k-1} \left| y_j^{(m+1)}(s) - y_j^{(m)}(s) \right| + \sum_{j=k}^{n} \left| y_j^{(m)}(s) - y_j^{(m-1)}(s) \right| \right] ds \leq$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} \left[\sum_{j=1}^{k-1} M L^n \left(n - q_j^{(m+1)} \right)^m \frac{|s - t_0|^m}{m!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=k}^{n} M L^n \left(n - q_j^{(m)} \right)^{m-1} \frac{|s - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} \right] ds \leq$$

$$\leq M L^m \left\{ \left[n^m + \left(n - q_2^{(m+1)} \right)^m + \left(n - q_3^{(m+1)} \right)^m + ... + \right. \right.$$

$$+\left(n-q_k^{(m+1)}\right)^m\Big]\frac{2\left(1-q_1^{(1)}\right)}{n\,(m+1)}+$$

$$+\left(n-q_{k+1}^{(m)}\right)^{m-1}+\ldots+\left(n-q_n^{(m)}\right)^{m-1}\Big\}\frac{|t-t_0|^{m+1}}{(m+1)!} \tag{13}$$

Notând cu

$$ML^m\left(n-q_{k+1}^{(m+1)}\right)^m\frac{|t-t_0|^{m+1}}{(m+1)!}$$

ultimul termen al relaţiei (13) obţinem că $q_{k+1}^{(m+1)}$ este cea mai mică radacină pozitivă a ecuaţiei polinomiale:

$$P_{k+1}^{(m+1)}\left(q_{k+1}^{(m+1)}\right)=0$$

cu proprietatea $0\le q_{k+1}^{(m+1)}<n$.

Să arătăm acum că şirul de funcţii $\left(y_i^{(m)},\ i=1,\ldots,n\right)_{m\in N}$ definit pe intervalul J prin relaţia (8) este uniform convergent pe J la soluţia problemei Cauchy (1)-(2). Din evaluarea (9) deducem că

$$\sup_{t\in J}\left|y_i^{(m)}(t)-y_i^{(m-1)}(t)\right|\le ML^{m-1}\left(n-q_i^{(m)}\right)^{m-1}\frac{\delta^m}{m!},\quad i=1,\ldots,n$$

şi seria de funcţii:

$$\sum_{m\ge1}\left(y_i^{(m)}(t)-y_i^{(m-1)}(t)\right),\quad i=1,\ldots,n$$

este uniform convergentă pe intervalul J. De aici rezultă că şirul de funcţii $\left(y_i^{(m)},\ i=1,\ldots,n\right)_{m\in N}$ este uniform convergent pe intervalul J şi limita sa:

$$\lim_{m\to\infty}y_i^{(m)}=y_i,\ i=1,\ldots,n$$

este o funcţie diferenţiabilă. Trecând la limită in (8) deducem că $(y_i, i=1,\ldots,n)$ sunt soluţiile problemei Cauchy (1)-(2). □

Observaţia 2.1 *Pentru a demonstra unicitatea se procedează în maniera clasică, folosind inegalitatea lui Gronwall.*

Observaţia 2.2 *Este de asemenea clar că estimarea (9) este mai bună decât (7), în concluzie şirul de funcţii* $\left(y_i^{(m)},\ i=1,\ldots,n\right)_{m\in N}$ *pentru metoda* *propusă converge mai rapid la soluţia problemei Cauchy decât şirul dat prin metoda E. Picard.*

Exemplu 2.1 *Cu metoda propusă am determinat soluţia aproximativă a problemei Cauchy:*

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \cos t + 4\sin t - 4y_1 - 2y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = 3y_1 + y_2 - 3\sin t \end{cases}, \quad t \in [0;5]$$

cu condiţia iniţială:

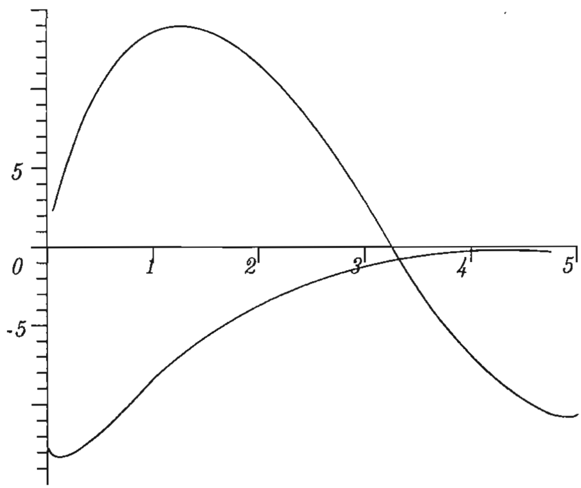
$$y_1^{(0)}(0) = 0$$

$$y_2^{(0)}(0) = -1$$

Folosind (8) obţinem sistemul:

$$\begin{cases} y_1^{(m)}(t) = \int_0^t \left(\cos s + 4\sin s - 4y_1^{(m-1)}(s) - 2y_2^{(m-1)}(s)\right) ds \\ y_2^{(m)}(t) = -1 + \int_0^t \left(3y_1^{(m)}(s) + y_2^{(m-1)}(s) - 3\sin s\right) ds \end{cases}$$

Pentru $\delta = 0.1$ *şi* $m = 4$ *obţinem următoarea soluţie:*



References

[1] G.R. Markiuk, *Metode de analiză numerică*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1983.

[2] H.J. Stetter, *Analysis of discretization methods for ordinary differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[3] V. Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Ed. Junimea, Iaşi, 1985.

Military Technical Academy,
Bucharest,
Romania

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 175–186

CONSTRUIREA UNUI OPERATOR LINIAR DE APROXIMARE

Andrei Vernescu

Abstract

In this work we present a generalization of the operator of Lupaş [6].

1. Introducere.

Calculul operatorial finit, numit şi calcul umbral, conduce la aplicaţii în combinatorică (în special la identităţi combinatorice), teoria constructivă a funcţiilor, teoria funcţiilor speciale, calculul probabilităţilor. Aplicaţiile în teoria constructivă a funcţiilor se referă la construirea unor operatori liniari şi pozitivi de aproximare, unidimensionali sau multidimensionali. Rezultate importante în acest domeniu au fost obţinute de şcoala românească de analiză numerică şi teoria aproximării funcţiilor de la Cluj-Napoca, fondată de Tiberiu Popoviciu (1906-1975) şi condusă astăzi de către acad. D.D.Stancu. În domeniul aplicării calculului umbral la teoria aproximării funcţiilor, menţionăm lucrările lui D. D. Stancu, C. Manole, A. Lupaş, L. Lupaş, V. Miheşan.

În prezenta lucrare vom prezenta, după [18], o generalizare a operatorului de aproximare L_n^Q a lui L.Lupaş şi A.Lupaş [6], prin intermediul operatorului $U_n^{Q,(a)}$. Operatorul L_n^Q a fost obţinut în lucrarea [6] pe baza utilizării elementelor de calcul umbral, iar generalizarea de faţă, bazată pe [6], utilizează, de asemenea, elementele de calcul umbral. De aceea, vom trece în revistă, în secţiunea 2 câteva chestiuni de calcul umbral necesare în cele ce vor urma. Apoi, în secţiunea 3 vom menţiona operatorul L.Lupaş şi A. Lupaş [6], iar în secţiunea 4 vom prezenta generalizarea, prin operatorul $U_n^{Q,(a)}$.

2. Elemente de calcul umbral

Fie Π algebra comutativă a polinoamelor de o variabilă cu coeficienţi în corpul comutativ K (unde $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$). Prin termenul de *şir polinomial* vom înţelege un şir de polinoame (p_n) supus condiţiei grad $(p_n) = n$, pentru orice $n = 0, 1, 2, \ldots$

Un şir polinomial $(p_n)_n$ este numit a fi *de tip binomial* dacă satisface şirul infinit de egalităţi

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k}(y), \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

pentru orice $x, y \in K$. Din definiţie rezultă $p_0 = 1$ şi $p_n(0) = 0$, pentru orice $n \geq 1$, fapt considerat încă de T.Popoviciu [9] (a se vedea şi [11], [12], [13], [14]).

"Prototipul" polinoamelor de tip binomial îl constituie monoamele $e_k(x) = x^k$,
$k = 0, 1, 2, \ldots$, pentru care identitatea binomială (1) înseamnă formula binomului lui Newton.

Un alt exemplu important de polinoame binomiale îl reprezintă puterile factoriale $x^{[n,h]} = x(x-h)(x-2h)\cdot\ldots\cdot(x-(n-1)h)$, pentru $n \geq 1$ cu $x^{[0,h]} = 1$, pentru care identitatea binomială (1) este identitatea lui Vandermonde.

$$(x+y)^{[n,h]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)^{[k,h]}(y)^{[n-k,h]}.$$

Vom nota E^a operatorul de translaţie, $E^a : \Pi \to \Pi$, definit de egalitatea $(E^a p)(x) = \quad = p(x+a)$, pentru orice $p \in \Pi$ şi orice $x \in K$. Un operator $T: \Pi \to \Pi$, care comută cu toţi operatorii de translaţie, adică pentru care are loc relaţia $TE^a = E^a T$, se numeşte *invariant la translaţii.*

Un operator $Q: \Pi \to \Pi$ se numeşte *delta operator* dacă este invariant la translaţii şi Qe_1 este o constantă nenulă.

Aceşti operatori posedă multe din proprietăţile operatorului de derivare D, pentru care avem şi egalitatea $De_n = ne_{n-1}$. Ca exemple de delta operatori menţionăm, în afară de operatorul de derivare D, operatorul de diferenţă descendentă $\Delta_h = E^h - I$, unde I este operatorul identic, operatorul de diferenţă ascendentă $\nabla_h = I - E^{-h}$, operatorul de prederivare $D_h = \Delta_h/h$, operatorul de diferenţă centrală $\delta_h = E^{h/2} - E^{-h/2}$, precum şi operatorul lui Abel $A = DE^a$, operatorul lui Laguerre $L = \dfrac{D}{D-I}$ *), operatorul lui Gould

*) Aici "fracţia" $\dfrac{D}{D-I} = \dfrac{-D}{I-D} = -D(I-D)^{-1}$ desemnează rezultatul compunerii dintre $(-D)$ şi inversul faţă de compunere al lui $(I-D)$. Datorită izomorfismului dintre algebra operatorilor invarianţi la translaţie (cu a doua operaţie internă compunerea) şi algebra seriilor formale (cu a doua operaţie înmulţirea), avem $(I-D)^{-1} = I + D + D^2 + \ldots$, aşadar $L = -D - D^2 - D^3 - \ldots$. La aplicarea operatorului L asupra unui polinom p suma precedentă este finită, efectuându-se doar până la ordinul de derivare $n = gr(p)$, după care toţi termenii $D^{n+1}p, D^{n+2}p, \ldots$ sunt nuli.

$G = E^{a+b} - E^a$ şi operatorul lui Touchard $T = \ln(I + D)^{\dagger)}$.

Se stabileşte cu uşurinţă că pentru orice delta operator Q are loc relaţia $Qc = 0$, unde c este o anumită constantă, precum şi că, dacă p_n este un polinom de gradul n, atunci Qp_n este un polinom de gradul $n - 1$.

Fiind dat un delta operator Q, un şir polinomial (p_n) se numeşte *şir bazic pentru delta operatorul* Q, dacă au loc relaţiile $p_0 = 1$, $p_n(0) = 0$ pentru orice $n \geq 1$ şi $Qp_n = np_{n-1}$ ([10] - [14]).

Au loc următoarele două rezultate ([10] - [14]):

a) Dacă un şir polinomial (p_n) este şirul bazic pentru un anumit delta operator Q, atunci el este de tip binomial.

b) Reciproc, dacă un şir polinomial (p_n) este de tip binomial, atunci el este şirul bazic pentru un anumit delta operator Q.

Orice delta operator Q posedă un şir unic de polinoame bazice.

În cazul când $Q = D$, şirul de polinoame bazice este definit de $p_n(x) = e_n(x) = x^n$.

În cazul când $Q = D_h = \Delta_h/h$, şirul de polinoame bazice este $p_n(x) = x^{[n,h]}$.

Se numeşte derivată Pincherle a operatorului invariant la translaţie U, operatorul $U \stackrel{\text{def}}{=} UX - XU$, unde X este operatorul definit de egalitatea $(Xp)(x) = xp(x)$.

3. Operatorul Lupaş. În lucrarea [6], L.Lupaş şi A. Lupaş au construit un operator de aproximare liniar şi pozitiv, definit pe clasa de funcţii $C(I)$, $I = [0, 1]$ şi ataşat unui delta-operator Q. Operatorul $L_n^Q : C(I) \to C(I)$ este definit de formula:

$$(L_n^Q f)(x) = \frac{1}{p_n(n)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(nx) p_{n-k}(n - nx) f\left(\frac{k}{n}\right); \qquad (p_n(n) \neq 0)$$

unde (p_n) este şirul polinoamelor bazice asociat delta operatorului Q.

Autorii notează, pentru orice delta-operator Q

$$w_n(Q) = 1 - \frac{n(n-1)}{p_n(n)} \left(Q'^{-2} p_{n-2}\right)(n)$$

şi definesc clasa W de operatori liniari astfel: Un operator liniar $Q: \Pi \to \Pi$ aparţine clasei W dacă şi numai dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:

(i) Q este un delta operator cu şirul bazic (p_n);

(ii) $p_n'(0) \geq 0$, pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$;

(iii) $\lim\limits_{n \to \infty} w_n(Q) = 0$.

Ca exemplu de delta operatori din clasa W, sunt date următoarele

---

$^{\dagger)}$ Remarcă analogă, deci $T = D - \dfrac{D^2}{2} + \dfrac{D^3}{3} - \ldots$

1. Operatorul de derivare, D, pentru care $w_n(D) = \dfrac{1}{n}$.

2. Operatorul de diferenţă $\nabla = I = E^{-1}$, pentru care $w_n(\nabla) = \dfrac{2}{n+1}$.

3. Operatorul lui Touchard, $T = \ln(I + D)$, pentru care se obţine inegalitatea

$$\frac{1}{n} \leq w_n(T) \leq \frac{2}{n}.$$

4. Operatorul lui Laguerre, $L = \dfrac{D}{I+D}$, pentru care inegalitatea obţinută este

$$-\frac{3}{n} \leq w_n(L) \leq \frac{3}{n}.$$

Revenind la cazul general, se obţine că

$$\begin{cases} L_n^Q e_0 = e_0 \\ L_n^Q e_1 = e_1; \\ (L_n^Q e_2)(x) = e_2(x) + x(1-x)w_n(Q). \end{cases}$$

De aici, în baza teoremei Bohman-Korovkin-Popoviciu ([1], [2], [10]) se obţine:

3.1. TEOREMĂ. *Dacă $Q \in W$, atunci $L_n^Q f \rightrightarrows f$ pentru orice $f \in C(I)$.*

Particularizând $Q = D$, se obţine $L_n^D = B_n$ (operatorul lui Bernstein), iar particularizând $Q = \nabla$ se obţine operatorul definit de egalitatea

$$\left(L_n^{\nabla} f\right)(x) = \frac{2(n!)}{(2n)!} \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{k} (nx)^{[k]} (n - nx)^{[n-k]} f\left(\frac{k}{n}\right); \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Acest operator poate fi obţinut pornind de la operatorul D. D. Stancu (luând $\alpha = \dfrac{1}{n}$).

4. O generalizare a operatorului Lupaş.

Fie Q un delta operator, iar (p_n) şirul său de polinoame bazice, $n \mapsto a(n)$ o funcţie de variabilă discretă n, adică practic un şir de numee reale, astfel încât $a(n) > 0$ şi $p_n(a(n)) \neq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Vom nota simbolic şirul astfel: $a = (a_n)$ şi îl vom mai numi şirul parametrilor.

4.1. DEFINIŢIE. Definim şirul de operatori liniari şi pozitivi ataşaţi delta operatorului Q şi şirului de parametri $a = a(n)$, $U_n^{Q,a}\colon C[0,1] \to C[0,1]$

prin egalităţile

$$\left(U_n^{Q,a}f\right)(x) = \frac{1}{p_n(a(n))}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(a(n)x)p_{n-k}(a(n)-a(n)x)f\left(\frac{k}{n}\right), \quad (1)$$

pentru $f \in C[0,1]$, $n = 0,1,2,3,\ldots$

Acest operator generalizează câţiva operatori foarte importanţi.

a) Pentru $a(n) = 1$, operatorul devine operatorul T. Popoviciu-C. Manole [9], [7], din care se pot regăsi prin particularizările menţionate operatorul D. D. Stancu [15] şi operatorul Bernstein. El a fost studiat şi pentru alte cazuri,legat de operatorii H. Brass, G. Moldovan, Cheney-Sharma.

b) Pentru $a(n) = n$, operatorul a fost definit şi studiat de către L. Lupaş şi A. Lupaş [6].

Pentru a cerceta operatorul definit de egalitatea (1), vom utiliza tehnicile din lucrările C.Manole [7], L.Lupaş şi A.Lupaş [6]. Vom menţine şi pentru acest operator notaţiile din lucrările citate

$$\begin{cases} S_m(x,y,n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(x)p_{n-k}(y)\left(\frac{k}{n}\right)^m, \\ S_0(x,y,n) = p_n(x+y) \end{cases} \quad (2)$$

Reamintim rezultatele din [7]

$$\begin{cases} S_1(x,y,n) = \frac{x}{x+y}p_n(x+y) \\ S_2(x,y,n) = \frac{x}{x+y}p_n(x+y) - \frac{(n-1)xy}{n}\left(Q'^{-2}p_{n-2}\right)(x+y). \end{cases}$$

În baza acestor rezultate, se obţine imediat:

4.2. PROPOZIŢIE. *Imaginile funcţiilor e_j $(j = 0,1,2)$ prin operatorul $U_n^{Q,a}$ sunt*

$$\begin{cases} U_n^{Q,a}e_0 = e_0; \\ U_n^{Q,a}e_1 = e_1; \\ (U_n^{Q,a}e_2)(x) = x^2 - \frac{n-1}{n}a(n)x(1-x)\frac{\left(Q'^{-2}p_{n-2}\right)(a(n))}{p_n(a(n))}, \end{cases} \quad (3)$$

şi are loc egalitatea

$$(U_n^{Q,a}((t-x)^2);x) = x(1-x)\left(1 - \frac{n-1}{n}\frac{a^2(n)\left(Q'^{-2}p_{n-2}\right)(a(n))}{p_n(a(n))}\right). \quad (4)$$

Ultima egalitate ne conduce la preluarea notaţiei $w_n(Q)$ din [6], cu o uşoară adaptare:

$$w_n^{(a)}(Q) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{n-1}{n} \frac{a^2(n)\left(Q^{l-2}p_{n-2}\right)(a(n))}{p_n(a(n))}, \tag{5}$$

ca şi la preluarea, din [6], a clasei de delta operatori W, ca fiind

$$W = \{Q\colon \Pi \to \Pi \mid Q \text{ delta operator}, \\ p_n'(0) \geq 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots;\ \lim_{n\to\infty} w_n^{(a)}(Q) = 0\} \tag{6}$$

Ţinând seama de egalităţile precedente şi aplicând teorema Bohman-Korovkin- Popoviciu, se obţine rezultatul central din această secţiune, legat de convergenţa şirului de operatori $U_n^{Q,a}$ către operatorul identic.

4.3. TEOREMĂ. *Dacă delta operatorul Q aparţine clasei W, atunci $U_n^{Q,a}f \rightrightarrows f$ pentru orice $f \in C[0,1]$.*

*

* *

Vom trece acum la examinarea unor cazuri particulare ale operatorului $U_n^{Q,a}$, obţinute prin diferite particularizări ale operatorului Q şi alegeri adaptate ale şirului $a = (a_n)$.

a) Cazul $Q = D$ (operatorul de derivare).

În acest caz, şirul polinoamelor bazice este constituit din monoame, $p_n(x) = e_n(x) = x^n$

Se obţine $Q' = D' = I$, $(Q')^{-2} = I$ şi deci

$$w_n(D) = 1 - \frac{n-1}{n}\frac{a^2(n)e_{n-2}(a(n))}{e_n(a(n))} = 1.$$

Aşadar, operatorul corespunzător $U_n^{Q,a}$ este operatorul lui **Bernstein** B_n şi nu depinde de $a = a(n)$.

b) Cazul $Q = \nabla = I - E^{-1}$ (operatorul de diferenţă ascendentă).

În acest caz, şirul polinoamelor bazice este constituit de puterile factoriale crescătoare $p_n(x) = x(x+1)\ldots(x+n-1) = (x+n-1)^{[n]}$, dacă $n \geq 1$, respectiv $p_0(x) = 1$.

Obţinem $Q' = \nabla' = E^{-1}$, deci $(\nabla')^{-2} = E^2$ de unde

$$w_n(\nabla) = 1 - \frac{n-1}{n}\frac{a^2(n)\left(E^2p_{n-2}\right)(a(n))}{p_n(a(n))} = \frac{a(n)+n}{n(a(n)+1)}.$$

Pentru construcţia prezentată, dacă particularizăm $a(n) = \dfrac{1}{\alpha(n)}$, se regăseşte, în acest caz, operatorul lui **D. D. Stancu**, $U_n^{\nabla, \frac{1}{\alpha}} f = S_n^{<\alpha>} f$.

În cazul $\alpha = \alpha(n) \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$, avem $S_n^{<\alpha>} f \rightrightarrows f$.

c) Cazul $L = \dfrac{D}{I+D}$ (operatorul Laguerre).

Şirul polinoamelor bazic corespunzător, notat (l_n) este dat de formula $l_0(x) = 1$ şi

$l_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} x^k$, pentru $n \geq 1$. Au loc egalităţile

$$l_n(x) = n! L_n^{(-1)}(-x),$$

în care $L_n^{(\alpha)}(x)$ sunt polinoamele Laguerre de ordinul α.

Operatorul corespunzător este

$$\left(U_n^{L,a} f\right)(x) = \frac{1}{l_n(a(n))} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} l_k(a(n)x) l_{n-k}(a(n)(1-x)) f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{7}$$

Vom studia acum expresia $w_n^a(L)$. În acest scop, trebuie utilizate anumite relaţii din teoria polinoamelor Laguerre (L.Lupaş şi A.Lupaş [6]), anume

$$L - nl_n = nl_{n-1} \quad \text{sau} \quad Dl_n = n(I+D)l_{n-1}, \tag{8}$$

precum şi

$$\begin{cases} x^3 l_{n+2}^{(4)}(x) = n(n+1)(n+2)\left[(n+1)(x+2)l_n(x) - 2l_{n+1}(x)\right] \\ l_{n+1}(x) = (2n+x)l_n(x) - n(n-1)l_{n-1}(x) \\ xl'_{n+1}(x) = (n+1)\left[l_{n+1}(x) - nl_n(x)\right]. \end{cases} \tag{9}$$

Astfel, găsim, după câteva calcule

$$\left(L'^{-2} l_{n-2}\right)(a(n)) = \frac{1}{n(n^2-1)(n+2)} l_{n+2}^{(4)}(a(n)),$$

iar apoi

$$W_n^a(L) = \frac{2}{na(n)} \frac{l_{n+1}(a(n))}{l_n(a(n))} - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{a(n)} + \frac{2}{na(n)}\right). \tag{10}$$

De aici rezultă o condiţie suficientă pentru a avea $\lim_{n\to\infty} W_n^a(L) = 0$, anume $a(n) \to \infty$ şi $\dfrac{l_{n+1}(a(n))}{l_n(a(n))} \sim n$ $\left(\text{sau } \dfrac{l_{n+1}(a(n))}{l_n(a(n))} \sim a(n)\right)$.

Dar rezultatul obţinut se adaptează cel mai bine la două cazuri particulare importante pe care le prezentăm în continuare.

c₁) În cazul particular $a(n) = 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, se regăseşte operatorul introdus de T. Popoviciu în [9]. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_{n+1}(a(n))}{l_n(a(n))} = \lim_{n\to\infty} \frac{l_{n+1}(1)}{l_n(1)} = 1$$

şi din formula (10) rezultă

$$\lim_{n\to\infty} w_n^{(1)}(L) = 0.$$

Astfel rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} U_n^{L,1} f = f$, pentru orice $f \in C(I)$, deci se regăseşte convergenţa şirului de operatori consideraţi de T.Popoviciu.

c₂) În cazul particular $a(n) = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, se regăseşte unul din cazurile particulare ale operatorului L_n^Q definit şi studiat de L.Lupaş şi A.Lupaş în [6] (anume, cazul IV, de la punctul 3, din lucrarea citată).

Din formula (10), particularizând $a(n) = n$, rezultă ca şi în [6]

$$w_n(Q) = w_n^{(n)}(L) = \frac{2}{n^2} \frac{l_{n+1}(n)}{l_n(n)} - \frac{3n+2}{n^2}$$

Din a treia şi respectiv a doua egalitate din (9), ţinând seama că $l'_{n+1}(x) \geq 0$ şi respectiv $l_{n-1}(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [0,1]$, se obţine dubla inegalitate

$$1 \leq \frac{l_{n+1}(x)}{n l_n(x)} \leq 2 + \frac{x}{n}. \tag{11}$$

Luând acum $x = a$ în (11), rezultă $1 \leq \dfrac{l_{n+1}(n)}{n l_n(n)} \leq 3$.

Deci, obţinem ca în [6]

$$\frac{3}{n} \leq w_n^{(n)}(L) \leq \frac{3}{n},$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} w_n^{(n)}(L) = 0$. Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty} U_n^{L,n} f = f$, pentru orice $f \in C[0,1]$ şi se regăseşte convergenţa şirului de operatori din [6].

d) Cazul $Q = T = \ln(I + D)$ (operatorul lui Touchard).

Şirul său de polinoame bazice, (t_n) este numit şirul polinoamelor exponenţial sau şirul polinoamelor lui Touchard şi este definit de formula

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} [0, 1, 2, \ldots, k; e_a] x^k, \tag{12}$$

sau încă

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^k$$

unde $S(n,k) = [0,1,2,\dots,k;e_n]$ sunt polinoamele lui Stirling de speţa a doua. Polinoamele pot fi reprezentate şi prin formula lui Dobinski

$$t_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^n x^k}{k!}. \tag{13}$$

Derivata Pincherle este $T' = (I+D)^{-1}$, de unde $T'^{-1} = I + D$, deci $T'^{-2} = (I+D)^2$. Mai avem (în baza formulei lui Rodrigues),

$$t_n = X(I+D)t_{n-1},$$

sau încă

$$t_n(x) = x\left(t_{n-1}(x) + t'_{n-1}(x)\right),$$

Ţinând seama că $Dt_n(x) = \dfrac{t_{n+1}(x)}{x} - t_n(x)$, rezultă

$$\left(T'^{-2}t_{n-2}\right)(x) = \frac{t_n(x) - t_{n-1}(x)}{x^2}$$

şi deci

$$w_n(T) = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\frac{t_{n-1}(a(n))}{t_n(a(n))}. \tag{14}$$

Rezultatele obţinute pot fi aplicate în două cazuri particulare.

d₁) Situaţia $a(n) = 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Se obţine

$$w_n(T) = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\frac{t_{n-1}(1)}{t_n(1)},$$

unde $t_n(1) = B_n$ sunt numerele lui Bell. În teza sa de doctorat, C. Manole a arătat că există două constante pozitive c_1 şi c_2, astfel încât

$$c_1\frac{\ln n}{n} \le \frac{B_{n-1}}{b_n} \le c_2\frac{\ln n}{n}.$$

De aici rezultă dubla inegalitate

$$\frac{1}{n} + c_1\frac{n-1}{n}\frac{\ln n}{n} \le w_n(T) \le \frac{1}{n} + c_2\frac{n-1}{n}\frac{\ln n}{n},$$

deci operatorul definit de egalitatea

$$\left(U_n^{T,(1)} f\right)(x) = \frac{1}{t_n(1)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t_k(x) t_{n-k}(1-x) f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{15}$$

are proprietatea $U_n^{T,(1)} f \rightrightarrows f$, pentru $f \in C[0,1]$; altfel spus converge către operatorul identic I.

d$_2$) Situaţia $a(n) = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Se obţine operatorul studiat în [6], care, cu notaţia noastră, se scrie

$$\left(U_n^{T,(n)} f\right)(x) = \frac{1}{t_n(n)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t_k(nx) t_{n-k}(n-nx) f\left(\frac{k}{n}\right). \tag{16}$$

Ţinând seama că $\frac{t_{n-1}(x)}{t_n(x)} \le \frac{1}{x}$, rezultă $\frac{t_{n-1}(n)}{t_n(n)} \le \frac{1}{n}$, de unde

$$0 \le w_n(T) < \frac{2}{n},$$

deci operatorul este convergent pe $C(I)$, către operatorul identic I.

Bibliografie

[1] Bohman, H., *On approximation of continuous and of analytic functions*, Ask. Mat. (**2**), **3** (1951), 43-51.

[2] Korovkin, P.P.: *Linear operators and approximation theory*, Delhi, 1960.

[3] Lupaş, A., *The approximation by means of some liniar operators*, Aproximation Theory, Proc. IDoMAT 95, Edited by M.W.Müller, M.Felten, D.H.Mache, Mathematical Research, vol. 86, Akademie Verlag, Berlin, 201-229.

[4] Lupaş, A., *Classical polynomials and approximation theory*, Colloquiumvortrag, Angewandte Analysis, Univ. Duisburg, Dec. **1996**.

[5] Lupaş, A., *Approximation operators of binomial type*, I.S.N.M. (International Series of Numerical Mathematics), vol. 132, New Development in Approximation Theory, **1999**, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland.

[6] Lupaş, L., Lupaş, A., *Polynomials of binomial type and approximation operators*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, **XXXII**, (4), (1987), 61 - 69.

[7] Manole, C., *Approximation operators of binomial type* Univ. of Cluj-Napoca, Faculty of Math. and Physics, Research Seminars. Seminar on Numerical and Statistical Calculus, Preprint No. 9, **1987**, 93-99.

[8] Mullin, R., Rota, G.C., *On the foundations of combinatorial theory* (III), Theory of binomial enumeration, Graph Theory and its Applications, Academic Press, New York, **1970**, 167 - 213.

[9] Popoviciu, T., *Remarques sur les polynômes binomiaux*, Mathematica, **6** (1932), 8 - 10.

[10] Popoviciu, T, *Asupra demonstraţiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare*, Lucrările Sesiunii Generale Stiinţifice Acad. R.P.R. (1950), 1664 - 1667.

[11] Roman, S.M., *The Umbral Calculus*, Academic Press, New York, **1984**.

[12] Roman, S.M. and Rota, G.C., *The umbral calculus*, Advances in Mathematics, **27**, 2, (1978), 95-188.

[13] Rota, G.C., *Finite Operator Calculus*, Academic Press, New York, **1975**.

[14] Rota, G.C., Kahaner, D., Odlyzko, A., *On the foundations of combinatorial theory, Finite operator calculus*, Journal of Math.Analysis and Applications, **42** (1973), 685 - 760.

[15] Stancu, D.D., *Approximation of functions by a new class of linear positive operators*, Rev.Roum.Math.Pures et Appl., **13** (1968), 1173-1194.

[16] Stancu, D.D., *Approximation of functions by means of some new classes of positive linear operators*, "Numerische Methoden der Approximationstheorie", Proc. Conf., Oberwolfach, 1971, ISNM, vol. 1,6 Birkhäuser Verlag, Basel, Schwitzerland, **1972**, 187-203.

[17] Stancu D.D. and Vernescu A., *Approximation of bivariate functions by means of a class of operators of Tiberiu Popoviciu type*, Mathematical Reports (Studii şi Cercetari matematice), vol 1(51), No. 3 **1999**.

[18] Vernescu, A., *Teză de doctorat*, Cluj-Napoca, **2000**.

Colegiul Naţional de Informatică "Tudor Vianu",
Str. Arh. Ion Mincu, 10,
Bucureşti,
Romania

An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa Vol. 8(1), 2000, 187–192

METODE PROIECŢIONALE ŞI NEPROIECŢIONALE LA REZOLVAREA ECUAŢIILOR OPERATORIALE. APLICAŢII

V. Zolotarevschi, V. Seiciuc

Este cunoscută teoria metodelor proiecţionale de rezolvare aproximativă a ecuaţiilor operatoriale de speţa doi pe consecutivităţi de proiectori care converg puternic către operatorul unitate. Această teorie, elaborată de academicianul L. Kantorovici la finele anilor 1940 (a se vedea [1]), a fost dezvoltată şi generalizată de mai mulţi matematicieni şi mai cu seamă de către I. Gohberg (a se vedea [23), de aceea poate fi considerată clasică. Teoria clasică nu poate fi aplicată în unele cazuri cum ar fi: atunci când spaţiul în care se cercetează ecuaţia nu este separabil (spaţiile Hölder) sau proiectorii ce generează metoda nu sunt mărginiţi în normă (proiectorii de interpolare Lagrange, cercetaţi în spaţiul Lebesgue), sau când metoda aproximativă nu este proiecţională. Astfel a apărut necesitatea elaborării unei teorii generale a metodelor aproximative neclasice aplicate la rezolvarea ecuaţiilor operatoriale ce nu se includ în cele clasice. Vom prezenta unele rezultate obţinute de noi în această direcţie. Mai întâi, a fost elaborată teoria linealului de convergenţă (a se vedea [5]) pentru operatorii liniari, unde sunt stabilite condiţii suficiente pentru ca metodele aproximative, ce nu se includ în cele clasice (conform teoriei lui L.Kantorovici), să fie compatibile şi convergente. S-au obţinut teoreme generale ce stabilesc compatibilitatea schemelor de calcul şi convergenţa soluţiilor aproximative către cea exactă în cazurile când proiectorii, cu care se construiesc aceste metode nu converg sau sunt nemărginiţi în normă. Rezultate similare celor descrise s-au obţinut pentru metode ce nu sunt proiecţionale.

Cu ajutorul acestor rezultate s-a obţinut fundamentarea teoretică a metodei de trunchiere pentru ecuaţii şi sisteme de ecuaţii Wiener-Hopf, ecuaţii integrale singulare şi sistemelor lor, cercetate în scara spaţiilor Hölder. În aceleaşi spaţii Hölder, s-a stabilit fundamentarea teoretică a metodelor de colocaţii şi cuadraturi pentru ecuaţii integrale singulare şi sistemele lor.

Rezultatele menţionate mai sus au fost generalizate în mai multe direcţii. Au fost elaborate şi teoretic fundamentate schemele de calcul ale metodelor de colocaţii şi cuadraturi pentru ecuaţiile integrale singulare complete, nucleul regular al cărora conţine singularitate slabă, au fost obţinute rezultate asupra rezolvării aproximative a ecuaţiilor integro-diferenţiale singulare şi a sistemelor lor, asupra ecuaţiilor integrale singulare cu coeficienţi operatoriali. Aceste rezulate au fost stabilite pentru cazul în care conturul pe care sunt definite aceste ecuaţii coincide cu circumferinţa unitate din planul complex. Pentru acelaşi domeniu de integrare, anume circumferinţa unitate, au fost elaborate şi teoretic fundamentate schemele de calcul ale metodelor de colocaţii şi trunchiere pentru ecuaţiile integrale singulare cu argument deplasat, avînd în vedere specificul unor proprietăţi caracteristice numai circumferinţei unitate (a se vedea [4,5]).

Cazul circumferinţei unitate a fost condiţie esenţială în cercetările efectuate. Nu se cunoştea posibilitatea de trecere la alte contururi închise din planul complex, diferite de cel standard. S-ar părea că trecerea de la conturul închis prin intermediul funcţiei Riemann la circumferinţa unitate ar putea reduce problema la cea studiată. În realitate, însă, situaţia este mult mai complicată. Spre exemplu, pentru conturul Liapunov, schemele de calcul ale metodelor de trunchiere şi colocaţii, din punct de vedere aplicativ, devin dificile, iar viteza de convergenţă devine foarte mică şi depinde de contur; metoda cuadraturilor în acest caz nu poate fi aplicată.

Investigaţiile ce s-au făcut pe circumferinţa unitate s-au extins asupra ecuaţiilor integrale singulare neliniare (a se vedea [6-8]). S-au stabilit condiţiile pentru care operatorul determinat de ecuaţia integrală singulară neliniară sau de sistemul ei admite derivată Fréchet. Aceste rezultate şi cele pentru ecuaţiile liniare au permis fundamentarea teoretică a metodelor de trunchiere, colocaţii şi cuadraturi pentru ecuaţiile menţionate. Convergenţa metodelor a fost stabilită în scara spaţiilor Hölder.

În lucrările [9-12], pentru prima dată, sunt obţinute rezultate principial noi de aplicare a metodelor direct-aproximative la rezolvarea ecuaţiilor integrale singulare definite pe contur închis de tip Liapunov fără a face transformarea acestuia în circumferinţa unitate. S-a obţinut fundamentarea teoretică a metodelor de trunchiere, colocaţii şi cuadraturi în scara spaţiilor Hölder pentru ecuaţii integrale singulare şi sisteme, pentru ecuaţii integrale singulare neliniare şi sisteme (a se vedea [13]), precum şi pentru ecuaţii integro-diferenţiale singulare (a se vedea [14]).

Fundamental noi sunt rezultatele conţinute în monografia [5]. Este cercetat cazul în care ecuaţiile integrale singulare sunt definite pe un contur arbitrar neted închis ce mărgineşte un domeniu monoconex al planului complex. În legătură cu trecerea la conturul arbitrar a apărut necesitatea de a dezvolta în continuare unele compartimente ale teoriei generale a metodelor de calcul cum ar fi: a) teoria aproximării funcţiilor de variabilă complexă definite pe contur arbitrar neted şi închis, b) teoria linealului de convergenţă pentru proiectori nemărginiţi, c) teoria cuadraturilor în planul complex ş.a. Aceste probleme au fost studiate în lucrările [5,15-17].

Aceste rezultate au permis obţinerea [a se vedea 15, 16] fundamentării teoretice a unor metode direct-aproximative pentru rezolvarea mai multor clase de ecuaţii integrale singulare date pe contur arbitrar neted şi închis al planului complex: ecuaţii şi sisteme de ecuaţii integrale singulare de tip eliptic şi neeliptic, ecuaţii şi sisteme de ecuaţii integro-diferenţiale singulare (a se vedea [18]), ecuaţii integrale singulare cu conjugata funcţiei necunoscute şi cu argument deplasat (a se vedea [19,20]). A fost obţinută convergenţa metodelor de colocaţii şi cuadraturi în scara spaţiilor Hölder şi în spaţiile Lebesgue.

Ecuaţiile integrale singulare neliniare pe contur arbitrar închis cercetate în spaţiile Lebesgue, Hölder şi Hölder generalizate au fost rezolvate prin metode aproximative în lucrările [21-25]. Rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor integrale singulare cu indice nenul a fost efectuată în [26]. S-au obţinut schemele de calcul ale metodelor de colocaţii şi cuadraturi şi s-au demonstrat teoreme ce stabilesc convergenţa acestor metode în scara spaţiilor Hölder şi Lebesgue.

În lucrările [27, 28] au fost cercetate problemele rezolvării aproximative a ecuaţiilor integrale bisingulare definite pe un produs cartezian a două contururi de tip Liapunov. S-au stabilit condiţii suficiente de compatibilitate a schemelor de calcul a metodelor de colocaţii şi cuadraturi şi s-a stabilit convergenţa acestor metode în spaţiile Hölder. Pentru ecuaţiile integrale bisingulare cu coeficienţi constanţi, au fost obţinute scheme eficiente de calcul a metodei de trunchiere şi s-a demonstrat convergenţa acestei metode.

Unele rezultate descrise mai sus au fost stabilite (a se vedea [29]) în spaţiul funcţiilor Hölder generalizate.

Problemele rămase deschise pentru cercetarea viitoare ţin de extinderea metodelor aproximative de rezolvare a mai multor clase de ecuaţii integrale pentru cazurile în care aceste ecuaţii sunt definite pe: 1) contur compus ce mărgineşte un domeniu biconex, 2) contur care are autointersecţie, 3) contur închis, care nu e neted, 4) contur neted deschis şi alte cazuri, nestudiate pînă în prezent.

Bibliografie

[1] Andrieş Gh., Zolotarevschi V., *The approximation of functions in generali Hölder spaces,* Comp. Sci. J. of Moldova, 1995, vol.3, nr.3, pp.300-307.

[2] Andrieş Gh., Zolotarevschi V., *Approximaţia functsii v obobscennîh prostr*

Ghelidera i priblijennoe reşenie singulearnîh integralinîh uravnenii, Differenţialinîe uravnenia, tom.32, nr.10, 1996, pp.1069-1074 (în rusă).

[3] Gohberg I., Felidman I., *Uravnenia v svertcah i proecţionnîe metodî ih reşenia*, M.: Nauka, 1971, (în rusă).

[4] Kantorovici L., *Funcţionalinâi analiz i pricladnaia matematica,* Uspehi Matem.Nauk, 1948, t. 3, pp. 89-185(în rusă).

[5] Seiciuc V., *O suscestovanii proizvodnoi Frechet u operatora, opredelennogo sistemoi nelineinîh singulearnîh integralinîh uravnenii, Issledovania po funkţ. analizu i differ. uravneniam*, Kişinev: Ştiinţa, 1981, pp. 93-100 (în rusă).

[6] Seiciuc V., *O shodimosti kollokaţionnogo metoda i metoda mehaniceskih cvadratur dlea singulearnîh integralinîh uravnenii, zadannîh na leapunovscom conture, Differenţialinîe uravnenia*, 1984, t.20, nr.7, pp.1267-1275 (în rusă).

[7] Seiciuc V., *Priblijennoe reşenie sistem singulearnîh integralinîh uravnenii, zadannîh na proizvolinom zamknutom leapunovskom conture, Issledovania po pricladnoi matematike i informatike*, Kişinev: Ştiinţa, 1990, pp.146-156 (în rusă).

[8] Seiciuc V., *Shodimosti kollokaţionnogo i cvadraturno-interpoleaţionnogo metodov dlea singulearnîh integro-differenţialinîh uravnenii na leapunovskom conture, Diff. uravnenia*, 1991, t.27, nr.1, pp.174-178 (în rusă).

[9] Seiciuc V., *Shodimosti metodov kollokaţii i mehaniceskih cvadratur dlea nelineinîh singulearnîh integralinîh uravnenii v prostranstve* L_p, *Diff.uravnenia*, 1994, t.30, nr.12, pp.2183-2185 (în rusă).

[10] Seiciuc V., *Collocation method of solving nonlinear singular integral equations given on closed smooth contour,* Buletinul Ştiinţific al Universităţii din Baia Mare, Seria B. Matem.-Inform., 1997, vol.13, nr.1-2, pp. 147-152.

[11] Seiciuc V., Şavga L., *Metode directe de rezolvare aproximativă a ecuaţiilor integrale singulare neliniare*,a II-a Conferinţă anuală a Societăţii de Ştiinţe Matematice din Rom^ania, Cluj-Napoca, 27-31 mai 1998, pp. 211-214.

[12] Seiciuc V., *The theoretical foundation in the Hölder space of quadratures method of solving nonlinear singular integral equations given on closed smooth contour,* Scientific Annals Faculty of Mathematics and Informatics State University of Moldova. Chişinău, vol.1, 1999, pp. 164-174.

[13] Seiciuc V., *Metode directe de rezolvare aproximativă a ecuaţiilor singulare neliniare în spaţiile Hölder generalizate, Teoria obcisleni*, Institut ciberneticí "V.M.Gluşcov", Kiev, 1999, pp. 316-320 (în ucraineană).

[14] Spinei I., Zolotarevschi V., *Direct methods for solving singular integral equations with complex conjugation*, Computer Science Journal of Moldova, vol.6, no.1(16), 1998. pp.83-91.

[15] Zolotarevschi V., *Konecinomernîe metodî reşenia singulearnîh integralinîh uravnenii na zamknutîh conturah integrirovania*, Kişinev: Ştiinţa, 1991 (în rusă).

[16] Zolotarevschi V., Neagu V., *Priblijennîe reşenia odnogo klassa singulearnîh integralinîh uravnenii so sdvigom*, Izvestia vuzov, Matem., nr.11, 1976 (în rusă).

[17] Zolotarevschi V., Neagu V., *O priblijennom reş enii odnogo singulearnogo integralinogo uravnenia so sdvigom, Lineinîe operatorî i integralinîe uravnenia*, Kişinev: Ştiinţa, 1981 (în rusă).

[18] Zolotarevschi V., Seiciuc V., *Reşenie sistem nelineinîh singulearnîh integralinîh uravnenii metodom collocaţii i mehaniceskih cvadratur, Issledovania po funcţionalinomu analizu i differ. uravnenieam*, Kişinev, 1981, pp. 48-50 (în rusă).

[19] Zolotarevschi V., Seiciuc V., *Reşenie sistem nelineinîh singulearnîh integralinîh uravnenii metodom momentov, Izvestia vuzov*, Matem., nr.7, 1980, pp. 79-82 (în rusă).

[20] Zolotarevschi V., Seiciuc V., *O metode momentov reşenia sistem lineinîh i nelineinîh singulearnîh integro-differenţialinîh uravnenii, Issledovania po cislennîm metodam i teoreticescaia kibernetica*, Kişinev: Ştiinţa, 1985, pp. 55-82 (în rusă).

[21] Zolotarevschi V., Seiciuc V.. *Kollokaţionnîi metod reşenia singulearnîh integralinîh uravnenii zadannîh na Leapunovskom conture integrirovania*, Dokladî AN SSSR, t.258, nr.1, 1981, pp. 93-100 (în rusă).

[22] Zolotarevschi V., Siečiuc V., *Collocaţionnîi metod reşenia singulearnîh uravnenii vdoli Leapunovskogo contura, Differenţialinîe uravnenia*, 1983, t.19, nr.6, pp. 1056-1064 (în rusă).

[23] Zolotarevschi V., *O metode kollokaţii priblijennogo reşenia sistem singulearnîh integralinîh uravnenii s obrascaiuscimisea v nuli simvolami, Izvestia vuzov*, Matematica, 1990, nr.1, pp.25-29 (în rusă).

[24] Zolotarevski V., *Direct methods for solving singular integral equations on closed smooth contour in spaces L_p*, Revue D'Analyse Numerique et de Theorie de l'Approximation. Tome 25; nr.1-2, 1996, pp.257-265.

[25] Zolotarevski V., Seichiuk V., *Approximation of complex variable functions and applications for solving singular integral equations,* Revue D'Analyse Numerique et de Theorie de l'Approximation. Tome 26, no.1-2, 1997, pp.259-268.

[26] Zolotarevschi V., Cărăuş Iu., *The appoximative solution of singular integro-differential equations on smooth contours in spaces L_p*, Computer Science Journal of Moldova, Academy of Sciences of Moldova, Institute of mathematics, Kishinev, 1997, vol.5, nr.1, pp.44-45.

[27] Zolotarevschi V., Spinei I., Secrieru I., *Metode direct aproximative la rezolvarea ecuaţiilor integrale singulare pe contur neted închis*, Anale ştiinţifice ale U.S.M. Chişinău, 1999, pp.214-221.

[28] Zolotarevschi V., Tutunaru S., *Kollokaţionnîi metod reşenia bisingulearnîh uravnenii s iadramu Cauchy, Differenţialinîe uravnenia*, 1987, t.23, nr.6, pp.1077-1080 (în rusă).

[29] Zolotarevschi V., Tutunaru S., *Asupra unor metode direct-aproximative de rezolvare a ecuaţiilor integrale bisingulare, Issledovania po differentsialinîm uravneniam i matemat. analizu,* Chişinău: Ştiinţa, 1989, pp.23-27 (în rusă).

Universitatea de Stat,
Chişinău,
Moldova
e-mail: zolotar@usm.md

Co-Operative Commercial University,
Chişinău,
Moldova
e-mail: seiciuc@uccm.moldnet.md

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

Manuscripts may be submitted ellectronically, either on a MS-DOS disk or by e-mail (to make sure your message arrives safely, leave no lines longer than 80 characters). Papers should be in $\LaTeX\,2_\varepsilon$ format, using the standard article document class., i.e.,

```
\documentclass{article}
\usepackage{}          % Please include any local package you are using
\author{}              % Here insert the authors' name and the address
\title{}               % Here insert the title
\date{}                % this must be left empty
\begin{document}
\maketitle
\begin{abstract}
................
................
\end{abstract}
..................
..................     % Here comes the body of the text
..................

\begin{thebibliography}{11}
\bibitem{}
\bibitem{}
.....................
\end{thebibliography}
\end{document}
```

The manuscript should also contain one or more key words which describe the important concepts of your paper, as well as *Mathematical Reviews* classification numbers of your work.

Graphics files can be included in either $\LaTeX$ character graphics format or in PostScript format. To include PostScript files in your document, we prefer the macro commands in the `epsfig.sty`.